

南苑中学 2025 学年第二学期八年级数学期中考试

(评估时间 90 分钟, 总分 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 如果一个多边形的边数由 4 增加到 n (n 为整数, 且 $n > 4$), 那么它的外角和的度数 ()

- A. 不变 B. 增加 C. 减少 D. 不能确定

【答案】 A

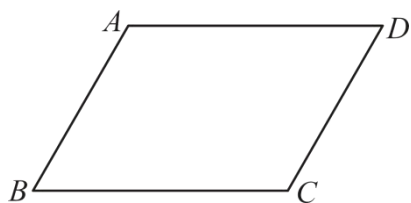
【解析】

【分析】 此题考查多边形内角和与外角和, 注意多边形外角和等于 360° . 利用多边形的外角和特征即可解决问题.

【详解】 解: 因为多边形外角和为 360° , 所以外角和的度数是不变的.

故选: A.

2. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 240^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数为 ()



- A. 60° B. 80° C. 100° D. 120°

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质, 平行四边形的对角相等, 邻角互补, 据此即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 240^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

故选: A.

3. 在平面直角坐标系中, 如果点 A 的坐标为 $(2, -1)$, 那么点 A 一定在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据各象限内点的坐标特征解答.

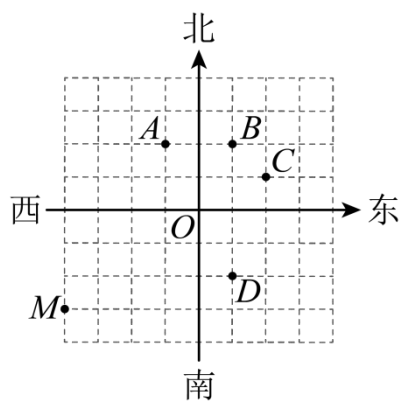
【详解】 解: $\because$ 点 $A(2, -1)$ 中, $2 > 0, -1 < 0$,

$\therefore$ 点 A 在第四象限.

故选 D .

【点睛】 本题考查了各象限内点的坐标的符号特征, 记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键, 四个象限的符号特点分别是: 第一象限 $(+, +)$; 第二象限 $(-, +)$; 第三象限 $(-, -)$; 第四象限 $(+, -)$.

4. 如图, 从点 O 出发, 先向西走 4 步, 再向南走 3 步到达点 M , 如果点 M 的位置用 $(-4, -3)$ 表示, 那么 $(1, 2)$ 表示的位置是 ()



A. 点 A

B. 点 B

C. 点 C

D. 点 D

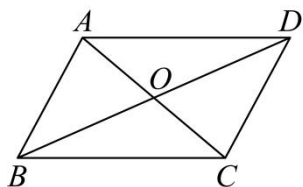
【答案】 B

【解析】

【详解】 解: $\because$ 从点 O 出发, 先向西走 4 步, 再向南走 3 步到达点 M , 点 M 的位置用 $(-4, -3)$ 表示,

$\therefore (1, 2)$ 表示的位置是先向东走 1 步, 再向北走 2 步, 即为 B 点,

5. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}, BC = 6\text{cm}$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 则 OA 的取值范围是 ()



A. $2\text{cm} < OA < 6\text{cm}$

B. $2\text{cm} < OA < 10\text{cm}$

C. $1\text{cm} < OA < 5\text{cm}$

D. $4\text{cm} < OA < 10\text{cm}$

【答案】 C

【解析】

【分析】本题考查了对平行四边形的性质，三角形的三边关系定理等知识点的理解和掌握，得到 AO 是 AC 的一半是解此题的关键.

根据三角形的三边关系定理得到 AC 的取值范围，再根据平行四边形的性质即可求出 OA 的取值范围.

【详解】解： $\because AB = 4\text{cm}, BC = 6\text{cm}, BC - AB < AC < AB + BC$,

$$\therefore 2\text{cm} < AC < 10\text{cm},$$

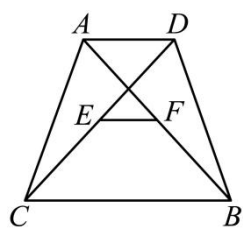
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore 1\text{cm} < OA < 5\text{cm},$$

故选：C.

6. 已知，如图， $AD \parallel CB$ ，点 E 、 F 分别为 CD ， AB 的中点，连接 EF ，设 $AD = a$ ， $CB = b$ ， $EF = c$ ，且 $a < b$ ，则下列等式一定成立的是（ ）



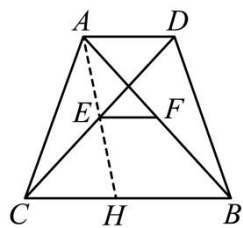
- A. $2c = b - a$ B. $2c = a + b$ C. $a + c = b$ D. $c^2 = a^2 + b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】此题重点考查平行线的性质、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识. 连接并延长 AE 交 BC 于点 H ，由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle DAE = \angle CHE$ ，而 $\angle AED = \angle HEC$ ， $DE = CE$ ，即可根据 AAS 证明 $\triangle AED \cong \triangle HEC$ ，得 $AD = HC = a$ ， $AE = HE$ ，因为 $CB = b$ ， $EF = c$ ，所以 $HB = b - a$ ，由三角形中位线定理得 $2EF = HB$ ，则 $2c = b - a$ ，于是得到问题的答案.

【详解】解：连接并延长 AE 交 BC 于点 H ，



$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAE = \angle CHE,$$

$\therefore$ 点 E 为 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE,$$

$$\text{在 } \triangle AED \text{ 和 } \triangle HEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle AED = \angle HEC \\ \angle DAE = \angle CHE, \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle HEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = HC = a, \quad AE = HE,$$

$$\therefore CB = b,$$

$$\therefore HB = CB - HC = b - a,$$

$\therefore$ 点 E 为 AH 的中点, 点 F 为 AB 的中点, $EF = c,$

$$\therefore 2EF = HB,$$

$$\therefore 2c = b - a,$$

故选: A.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 如果一个多边形的内角和是 1080° , 那么这个多边形的边数是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形内角和定理, n 边形的内角和为 $180^\circ \cdot (n-2)$, 据此建立方程求解即可.

【详解】 解: 设这个多边形的边数是 n ,

$$\text{由题意得, } 180 \cdot (n-2) = 1080,$$

$$\text{解得 } n = 8,$$

$\therefore$ 这个多边形的边数是 8,

故答案为: 8.

8. 若一个多边形从一个顶点最多能引出 5 条对角线, 则这个多边形是_____.

【答案】 八边形

【解析】

【分析】 本题主要考查多边形的对角线, 熟练掌握任意 n 边形从一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线是解决本题的关键. 根据多边形的一个顶点引出的对角线的条数与边数的关系解决此题.

【详解】解：∵任意 n 边形从一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线，

则该多边形的边数为： $5+3=8$ ，

故答案为：八边形.

9. 已知点 $A(1,0)$ ， $B(-3,-1)$ ， 则线段 AB 的长为_____

【答案】 $\sqrt{17}$

【解析】

【分析】 本题考查了两点之间的距离公式： 已知在平面直角坐标系中有两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ， 则这两点间的距离公式为 $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ， 熟练掌握两点之间的距离公式是解题关键. 根据两点之间的距离公式求解即可得.

【详解】 解： ∵ 点 $A(1,0)$ ， $B(-3,-1)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{17}.$$

故答案为： $\sqrt{17}$.

10. 如果点 $A(3, a+1)$ 在 x 轴上， 那么 a 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据 x 轴上的点纵坐标为 0 ， 列方程求解即可.

【详解】 解： ∵ 点 $A(3, a+1)$ 在 x 轴上，

$$\therefore a+1=0,$$

解得： $a=-1$.

11. 在平面直角坐标系中， 已知点 $A(-2,1)$ ， 则点 A 到 x 轴的距离是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据点到 x 轴的距离为点的纵坐标的绝对值求解即可.

【详解】 解： ∵ 点 $A(-2,1)$ ，

$$\therefore \text{点 } A \text{ 到 } x \text{ 轴的距离是 } |1|=1.$$

12. 将点 $P(m+2, 2-m)$ 向右平移 3 个单位长度得到点 Q ， 点 Q 落在 y 轴上， 则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(-3, 7)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了点坐标的平移，熟练掌握点坐标的平移规律是解题关键．先根据点坐标的平移规律可得 $Q(m+5, 2-m)$ ，再根据 y 轴上的点的横坐标等于 0 可得 m 的值，据此解答即可得．

【详解】 解： $\because$ 将点 $P(m+2, 2-m)$ 向右平移 3 个单位长度得到点 Q ，

$\therefore Q(m+2+3, 2-m)$ ，即 $Q(m+5, 2-m)$ ，

$\because$ 点 Q 落在 y 轴上，

$\therefore m+5=0$ ，

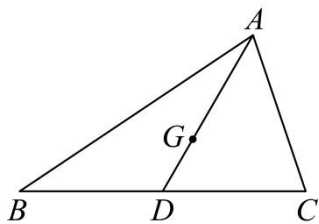
$\therefore m=-5$ ，

$\therefore m+2=-5+2=-3$ ， $2-m=2-(-5)=7$ ，

$\therefore P(-3, 7)$ ．

故答案为： $(-3, 7)$ ．

13. 如图， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，连结 AG 并延长交 BC 于点 D ，若 $AG=6$ ，则 $AD=$ _____．



【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的重心．熟记三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键．

根据三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍列式计算即可得解．

【详解】 解： $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore AG=2DG$ ，

$\because AG=6$ ，

$\therefore 2DG=6$ ，

$\therefore DG=3$ ，

$\therefore AD=AG+DG=9$ ．

故答案为：9.

14. 在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 相交于点 O， $\triangle AOD$ 的周长比 $\triangle AOB$ 的周长小 3 cm. 若 $AD = 5$ cm，则平行四边形 ABCD 的周长为_____cm.

【答案】26

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质推出 $AD=BC$ ， $AB=CD$ ， $OD=OB$ ，根据已知求出 $AB-AD=3$ cm，求出 AB 的长度即可求出答案.

【详解】解： $\because$ 平行四边形 ABCD，

$\therefore AD=BC$ ， $AB=CD$ ， $OD=OB$ ，

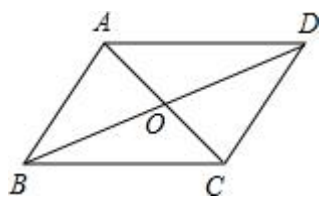
$\because \triangle AOD$ 的周长比 $\triangle AOB$ 的周长小 3cm， $AD=5$ cm，

$\therefore (OA+OB+AB) - (OA+OD+AD) = 3$ cm，

$\therefore AB-AD=3$ cm，

$\therefore AB=8$ cm，

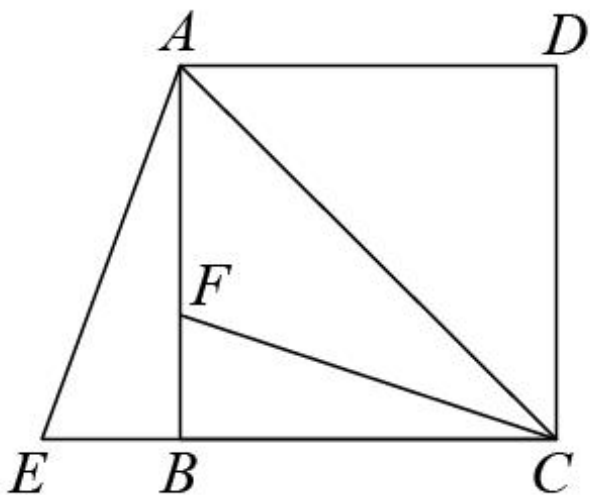
$\therefore \square ABCD$ 的周长为 $AB+AD+BC+CD=2(AB+AD) = 2 \times (8\text{cm}+5\text{cm}) = 26\text{cm}$.



故答案为 26.

【点睛】本题考查对平行四边形的性质的理解和掌握，能正确地根据平行四边形的性质求出 AB 的长度是解题关键.

15. 如图，点 E 为正方形 ABCD 边 CB 延长线上一点，点 F 为 AB 上一点，连接 AE，CF，AC，若 $BE=BF$ ， $\angle E=70^\circ$ ，则 $\angle ACF=$ _____.



【答案】 25°

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定和性质得出 $\angle BCF = \angle EAB$ ，再利用正方形的性质解答即可．

【详解】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABE = \angle CBF = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBF$ 中

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle CBF, \\ BE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BCF = \angle EAB,$$

$$\because \angle E = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle EAB = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$ ， AC 是对角线，

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ.$$

故答案为： 25° ．

【点睛】 本题主要考查正方形的四条边都相等和四个角都是直角的性质以及三角形全等的判定和全等三角形对应边相等的性质．

16. 如果一个四边形的某个顶点到其他三个顶点的距离相等，我们把这个四边形叫做等距四边形．已知平行四边形 $ABCD$ 是等距四边形， $AB = 2$ ，那么它的面积等于_____．

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】如图，由等距四边形的定义结合平行四边形的性质可得四边形 $ABCD$ 是菱形，进而可得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，然后作 $DE \perp AB$ 于 E ，利用等边三角形的性质和勾股定理求出 DE ，即可求解.

【详解】解：如图，四边形 $ABCD$ 是等距四边形， $BA = BC = BD = 2$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = AD = BD = 2$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

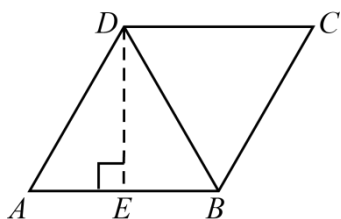
$\therefore \angle A = 60^\circ$ ，

作 $DE \perp AB$ 于 E ，则 $AE = BE = \frac{1}{2}AB = 1$ ，

$\therefore DE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= 2\sqrt{3}$ ；

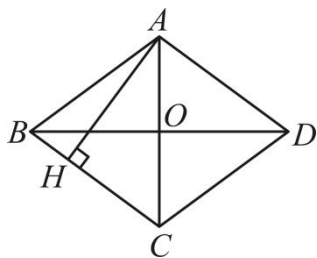
故答案为： $2\sqrt{3}$.



【点睛】本题考查了菱形的判定、平行四边形的性质、等边三角形的判定和性

质以及勾股定理等知识，得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形是解题的关键.

17. 如图，菱形 $ABCD$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，测得 $AB = 10\text{cm}$ ， $AC = 12\text{cm}$ ，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，那么 AH 的长为 _____ cm .



【答案】 $\frac{48}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质、勾股定理，由菱形的性质可得 $BC = AB = 10\text{cm}$ ， $AO = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}$ ， $BD = 2BO$ ，由勾股定理可得 $BO = 8\text{cm}$ ，即可得出 $BD = 2BO = 16\text{cm}$ ，再由菱形面积公式计算即可得

解, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore BC = AB = 10\text{cm}, \quad AO = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}, \quad BD = 2BO, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 8\text{cm},$$

$$\therefore BD = 2BO = 16\text{cm},$$

$$\therefore AH \perp BC,$$

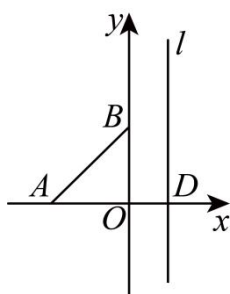
$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 10 \cdot AH,$$

$$\therefore AH = \frac{48}{5}\text{cm},$$

故答案为: $\frac{48}{5}$.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(-2,0)$, $B(0,2)$, 直线 $l \perp x$ 轴, 垂足为点 $D(1,0)$, 点 P 为直线 l 上一动点, 当 $S_{\triangle PAB} = 2$ 时, 则点 P 坐标_____.



【答案】 $(1,1)$ 或 $(1,5)$

【解析】

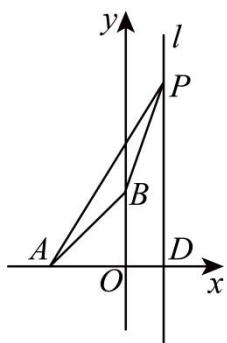
【分析】本题主要考查了坐标与图形, 设点 P 的坐标为 $(1, p)$, 根据点的坐标可得 $AD = 3$, $OB = 2$, $OA = 2$, $OD = 1$; 再分点 P 在点 B 上方, 点 P 在点 B 下方, 且在 x 轴上方和点 P 在 x 轴下方三种情况, 分别画出示意图, 讨论求解即可.

【详解】解: 设点 P 的坐标为 $(1, p)$,

$$\therefore A(-2,0), \quad B(0,2), \quad D(1,0),$$

$$\therefore AD = 3, \quad OB = 2, \quad OA = 2, \quad OD = 1,$$

如图所示, 当点 P 在点 B 上方时,



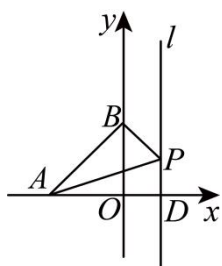
$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAD} - S_{\triangle AOB} - S_{\text{梯形}OBPD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3p - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{2+p}{2} \times 1 = 2,$$

解得 $p = 5$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 5)$;

如图所示, 当点 P 在点 B 下方, 且在 x 轴上方时,



$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle AOB} + S_{\text{梯形}OBPD} - S_{\triangle PAD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{2+p}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 3p = 2,$$

解得 $p = 1$,

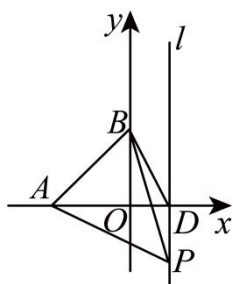
$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 1)$;

如图所示, 当点 P 在 x 轴下方时,

$$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle APD} - S_{\triangle PBD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3(-p) - \frac{1}{2} \times 1 \cdot (-p) = 2,$$

解得 $p = 1$ (舍去);



综上所述，点 P 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(1,5)$ ，

故答案为： $(1,1)$ 或 $(1,5)$ 。

三、简答题（第 19-20 题 7 分、第 21-23 题 8 分，第 24-25 题 10 分，共 58 分）

19. 已知： $A(2,1)$ ， $B(-1,2)$ ， $C(5,y)$ ， 且 ABC 是直角三角形， 其中 $\angle A = 90^\circ$ ， 求 y 的值。

【答案】 $y = 10$

【解析】

【分析】 利用勾股定理建立方程解答即可求解。

【详解】 解： $\because ABC$ 是直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ，

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$\because A(2,1), B(-1,2), C(5,y),$$

$$\therefore AB^2 = [2 - (-1)]^2 + (1 - 2)^2 = 9 + 1 = 10, \quad AC^2 = (2 - 5)^2 + (1 - y)^2 = 9 + 1 - 2y + y^2 = y^2 - 2y + 10,$$

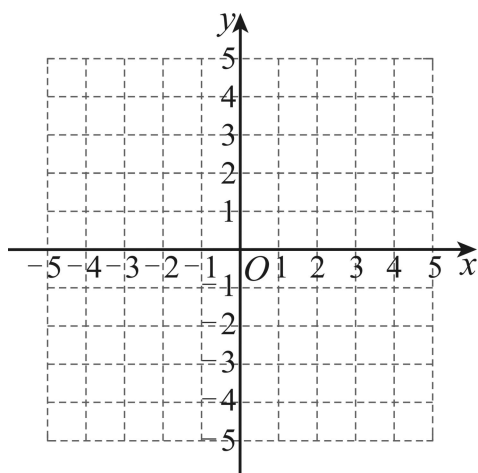
$$BC^2 = (-1 - 5)^2 + (2 - y)^2 = 36 + 4 - 4y + y^2 = y^2 - 4y + 40,$$

$$\therefore 10 + y^2 - 2y + 10 = y^2 - 4y + 40,$$

整理得， $2y = 20$ ，

解得 $y = 10$ 。

20. 如图， 在平面直角坐标系中描出以下各点： $A(3,4)$ 、 $B(4,2)$ 、 $C(1,1)$



- (1) 顺次连接 A 、 B 、 C 得到 $\triangle ABC$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 画出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A'B'C'$ ，并写出其各个顶点的坐标.

【答案】 (1) 图形见解析； 3.5

(2) 图形见解析， $A'(3, -4)$, $B'(4, -2)$, $C'(1, -1)$

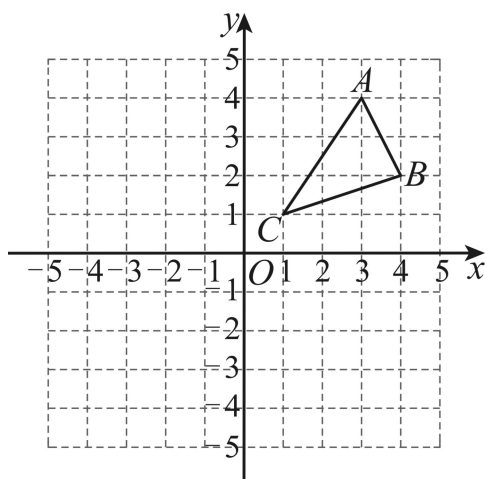
【解析】

【分析】 (1) 根据坐标连接 A 、 B 、 C 得到 $\triangle ABC$ ，再利用长方形的面积减去三个小三角形的面积即可得到答案；

(2) 根据关于 x 轴对称点的坐标特征画出图形，得到坐标.

【小问 1 详解】

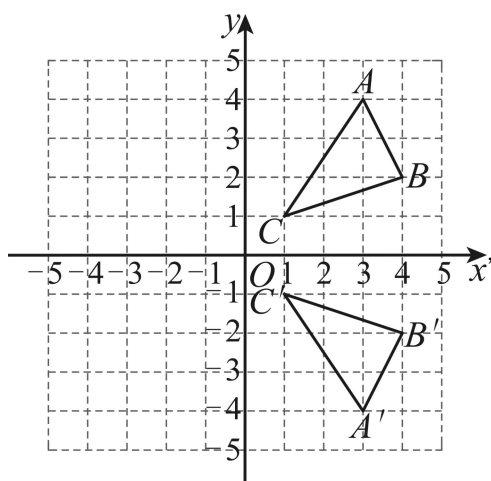
解：



$$S_{\triangle ABC} = 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 9 - 1.5 - 1 - 3 = 3.5;$$

【小问 2 详解】

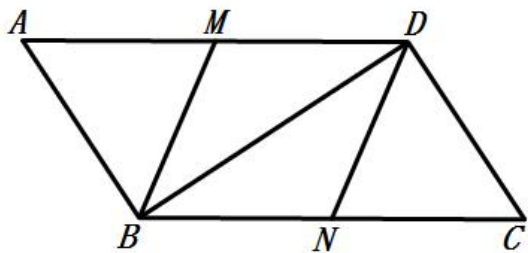
解：



$A'(3, -4), B'(4, -2), C'(1, -1)$.

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BD$, M 、 N 分别为边 AD 与 BC 的中点.

求证: 四边形 $BMDN$ 是菱形.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得到 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 再由已知条件进而证明四边形 $BNMD$ 是平行四边形, 然后再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半证出 $MD = BM$, 进而得到结论四边形 $BNMD$ 是菱形.

【详解】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$.

又 $\because M$ 、 N 是 AD 、 BC 的中点,

$\therefore MD \parallel BN$, $MD = BN$.

$\therefore$ 四边形 $BNMD$ 是平行四边形.

又 $\because AB \perp BD$,

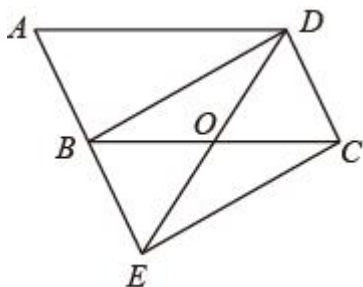
$\therefore MD = BM$,

$\therefore$ 四边形 $BNMD$ 是菱形.

【点睛】此题主要考查平行四边形的判定与性质、直角三角形的性质、菱形的判定, 熟练进行逻辑推理是

解题关键.

22. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 将边 AB 延长至点 E , 使 $AB = BE$, 联结 DE 、 EC , DE 与 BC 交于点 O .



(1) 求证: 四边形 $BECD$ 是平行四边形;

(2) 若 $\angle COE = 2\angle A$, 求证: 四边形 $BECD$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 先根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形可得 $AB = CD$, $AE \parallel CD$ 即 $BE \parallel CD$, 再证 $BE = CD$ 即可证明;

(2) 先证明 $BC = ED$, 再结合四边形 $BECD$ 是平行四边形即可证明.

【详解】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD$, $AE \parallel CD$ 即 $BE \parallel CD$

$\because AB = BE$.

$\therefore BE = CD$

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形.

(2) $\because AD \parallel CD$

$\therefore \angle A = \angle EBO$.

$\because \angle COE = 2\angle A = 2\angle EBO$, $\angle COE = \angle EBO + \angle BEO$

$\therefore \angle EBO = \angle BEO$,

$\therefore BO = EO$

$\because BO = \frac{1}{2}BC$, $EO = \frac{1}{2}ED$,

$\therefore BC = ED$

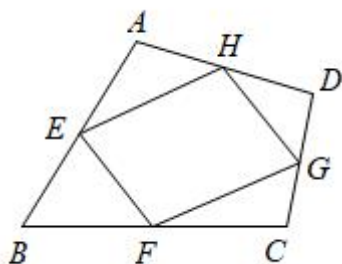
$\because$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是矩形.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定与性质和矩形的判定, 灵活应用相关性定理和判定定理是解

答本题的关键.

23. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点. 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

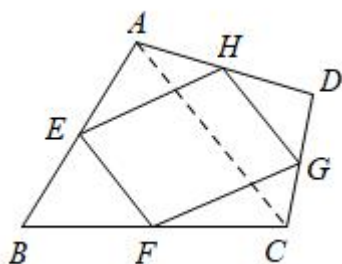


【答案】见解析

【解析】

【分析】由 E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点, 联想到运用三角形的中位线定理来证明.

【详解】解: 如下图, 连接 AC ,



$\because EF$ 是 ABC 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, \quad EF \parallel AC,$$

同理, $HG = \frac{1}{2}AC, \quad HG \parallel AC,$

$$\therefore EF = HG, \quad EF \parallel HG,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了三角形的中位线, 平行四边形的判定, 解题的关键是掌握平行四边形的判定方法.

24. “无刻度直尺”是尺规作图的工具之一, 它的作用在于连接任意两点、作任意直线、延长任意线段等. 结合图形的性质, 只利用无刻度直尺也可以解决一些几何作图问题.

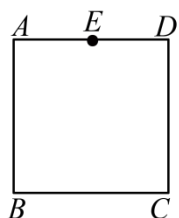


图1

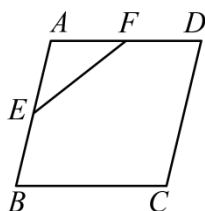


图2

(1) 如图1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 E 为 AD 边的中点, 请仅用无刻度的直尺画出 BC 边的中点 F (保留作图痕迹, 不要求写作法);

(2) 如图2, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 点 E, F 分别是 AB, AD 的中点, 请仅用无刻度的直尺作以 EF 为边的矩形 $EFGH$ (保留作图痕迹, 不写作法);

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

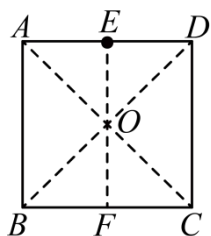
【解析】

【分析】(1) 连接 AC, BD , 交于点 O , 连接 EO , 延长 EO 交 BC 于 F , 根据正方形的性质及三角形中位线的性质得出四边形 $ABFE$ 是矩形, 得出 $AE = BF$, 即可得出 $BF = CF$, 点 F 即为所求;

(2) 连接 AC, BD , 交于点 P , 连接 EP 并延长, 交 CD 于 G , 连接 FP 并延长, 交 BC 于 H , 根据菱形的性质及中位线的性质得出 $EF \parallel GH, EF = GH, EG = FH$, 即可得出四边形 $EFGH$ 是矩形.

【小问1详解】

解: 如图, 连接 AC, BD , 交于点 O , 连接 EO , 延长 EO 交 BC 于 F , 点 F 即为所求.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore OA = OC, AD = BC, \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ,$

$\because$ 点 E 为 AD 边的中点,

$\therefore OE \parallel AB,$

$\therefore \angle AEF = \angle BFE = 90^\circ,$

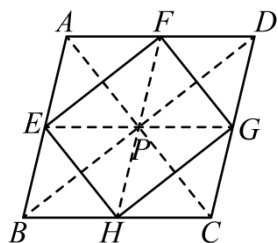
$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形, $AE = BF,$

$\therefore BF = CF,$

$\therefore$ 点 F 即为所求.

【小问2详解】

解：如图，连接 AC 、 BD ，交于点 P ，连接 EP 并延长，交 CD 于 G ，连接 FP 并延长，交 BC 于 H ，则四边形 $EFGH$ 即为所求。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，点 E ， F 分别是 AB ， AD 的中点，

$\therefore EF \parallel BD$ ， $EF = \frac{1}{2}BD$ ， $AP = PC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD = CD$ ，

$\therefore EP \parallel AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 是平行四边形， $DG = AE$ ， $EG = AD$ ，

$\therefore G$ 为 CD 中点，

同理可得，点 H 为 BC 中点， $FH = CD$ ， $GH \parallel BD$ ， $GH = \frac{1}{2}BD$ ，

$\therefore EF \parallel GH$ ， $EF = GH$ ， $EG = FH$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$\therefore EG = FH$ ，

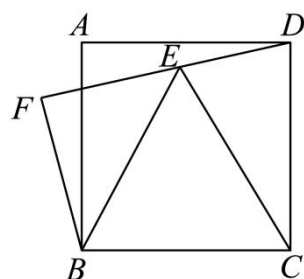
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形。

25. 已知四边形 $ABCD$ 是正方形，将线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，得到线段 CE ，联结 BE 、 CE 、 DE 。过点 B 作 $BF \perp DE$ 交线段 DE 的延长线于 F 。

(1) 如图，当 $BE = CE$ 时，求旋转角 α 的度数；

(2) 当旋转角 α 的大小发生变化时， $\angle BEF$ 的度数是否发生变化？如果变化，请用含 α 的代数式表示；如果不变，请求出 $\angle BEF$ 的度数；

(3) 联结 AF ，求证： $DE = \sqrt{2}AF$ 。



【答案】(1) 30° ；(2) 不变； 45° ；(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用图形的旋转与正方形的性质得到 $\triangle BEC$ 是等边三角形，从而求得 $\alpha = \angle DCE = 30^\circ$ 。

(2) 因为 $\triangle CED$ 是等腰三角形,再利用三角形的内角和即可求 $\angle BEF=180^\circ-\angle CED-\angle CEB=45^\circ$.

(3) 过A点与C点添加平行线与垂线,作得四边形AGFH是平行四边形,求得 $\triangle ABG\cong\triangle ADH$.从而求得矩形AGFH是正方形,根据正方形的性质证得 $\triangle AHD\cong\triangle DIC$,从而得出结论.

【详解】(1) 证明: 在正方形ABCD中, $BC=CD$.由旋转知, $CE=CD$,

又 $\because BE=CE$,

$\therefore BE=CE=BC$,

$\therefore \triangle BEC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BCE=60^\circ$.

又 $\because \angle BCD=90^\circ$,

$\therefore \alpha=\angle DCE=30^\circ$.

(2) $\angle BEF$ 的度数不发生变化.

在 $\triangle CED$ 中, $CE=CD$,

$$\therefore \angle CED=\angle CDE=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2},$$

在 $\triangle CEB$ 中, $CE=CB$, $\angle BCE=90^\circ-\alpha$,

$$\therefore \angle CEB=\angle CBE=\frac{180^\circ-\angle BCE}{2}=45^\circ+\frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle BEF=180^\circ-\angle CED-\angle CEB=45^\circ.$$

(3) 过点A作 $AG\parallel DF$ 与BF的延长线交于点G,过点A作 $AH\parallel GF$ 与DF交于点H,过点C作 $CI\perp DF$ 于点I

易知四边形AGFH是平行四边形,

又 $\because BF\perp DF$,

$\therefore$ 平行四边形AGFH是矩形.

$$\therefore \angle BAD=\angle BGF=90^\circ,$$

$$\angle BPF=\angle APD,$$

$$\therefore \angle ABG=\angle ADH.$$

又 $\because \angle AGB=\angle AHD=90^\circ$, $AB=AD$,

$$\therefore \triangle ABG\cong\triangle ADH.$$

$$\therefore AG=AH,$$

$\therefore$ 矩形AGFH是正方形.

$$\therefore \angle AFH=\angle FAH=45^\circ,$$

$$\therefore AH=AF$$

