

上海市世外中学 2025-2026 学年下学期期中考试八年级数学

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

注意: 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定位置作答, 在本试卷上答题无效

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分):

1. 已知一个多边形的外角和等于内角和的一半, 那么这个多边形的对角线条数为 ().

- A. 6 条 B. 7 条 C. 8 条 D. 9 条

【答案】D

【解析】

【分析】先利用任意多边形外角和为定值的性质求出多边形内角和, 再根据内角和公式求出边数, 最后代入对角线条数公式计算得到结果.

【详解】解: 设多边形边数为 n , 根据题意得,

$$(n-2) \times 180^\circ \times \frac{1}{2} = 360^\circ,$$

解得 $n = 6$,

即该多边形为六边形,

$$\therefore \text{该多边形对角线条数为 } \frac{6 \times (6-3)}{2} = 9 \text{ (条)}.$$

2. 下列命题中, 假命题的是 ()

- A. 矩形的对角线相等
B. 平行四边形的对角线互相平分
C. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形
D. 对角线相等且互相垂直的四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形, 矩形, 菱形和正方形的对角线进行判断即可.

【详解】A、矩形的对角线相等, 是真命题;

B、平行四边形的对角线互相平分, 是真命题;

C、对角线互相垂直平分的四边形是菱形, 是真命题;

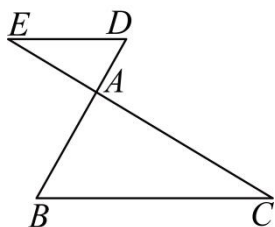
D、对角线平分、相等且互相垂直的四边形是正方形, 是假命题;

故选 D.

【点睛】本题考查了从对角线来判断特殊四边形的方法: 对角线互相平分的四边形为平行四边形; 对角线

互相垂直平分的四边形为菱形；对角线互相平分且相等的四边形为矩形；对角线互相垂直平分且相等的四边形为正方形。也考查了真命题与假命题的概念。

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 的反向延长线上，已知 $DE \parallel BC$ ， $AB = 2AD$ ，下列结论正确的是（ ）。



- A. $\frac{AC}{AE} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ C. $\frac{AC}{EC} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例可得 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ ，再根据比例的性质进行变形即可。

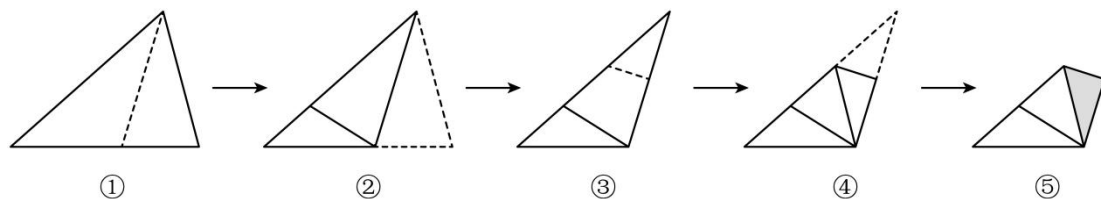
【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = 2, \quad \frac{AC}{EC} = \frac{AC}{AE + AC} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{AE + AC} = \frac{1}{3}, \quad \text{故 C 正确, A、D 错误;}$$

对于 B，由已知条件，无法判断 AB 与 AE 的关系，故 B 错误。

4. 将一张三角形纸片按如图步骤①至④折叠两次得图⑤，然后剪出图⑤中的阴影部分，则阴影部分展开铺平后的图形是（ ）



- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 矩形 D. 菱形

【答案】D

【解析】

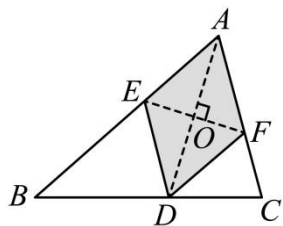
【分析】此题是有关剪纸的问题，此类问题应亲自动手折一折，剪一剪。

【详解】解：由题可知， AD 平分 $\angle BAC$ ，折叠后 $\triangle AEO$ 与 $\triangle AFO$ 重合，故全等，所以 $EO = OF$ ；

又作了 AD 的垂直平分线，即 EO 垂直平分 AD ，所以 $AO = DO$ ，且 $EO \perp AD$ ；

由平行四边形的判定：对角线互相平分的四边形为平行四边形，所以 $AEDF$ 为平行四边形；

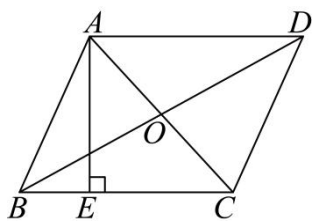
又 $AD \perp EF$ ，所以平行四边形 $AEDF$ 为菱形.



故选: D.

【点睛】本题主要考查学生对于立体图形与平面展开图形之间的转换能力，与课程标准中“能以实物的形状想象出几何图形，有几何图形想象出实物的图形”的要求相一致，充分体现了实践操作性原则.

5. 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC ， BD 相交于点 O ， $AC = 2$ ， $BD = 2\sqrt{3}$. 过点 A 作 $AE \perp BC$ 的垂线交 BC 于点 E ，记 BE 长为 x ， BC 长为 y . 当 x ， y 的值发生变化时，下列代数式的值不变的是 ()



A. $x + y$

B. $x - y$

C. xy

D. $x^2 + y^2$

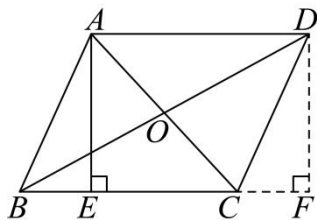
【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，过点 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (AAS)，得到 $AE = DF$ ， $BE = CF = x$ ，由勾股定理可得，

$AE^2 = 4 - (y - x)^2$ ， $DF^2 = 12 - (y + x)^2$ ，则 $4 - (y - x)^2 = 12 - (y + x)^2$ ，整理后即可得到答案.

【详解】解：过点 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F ，



$\because AE \perp BC$ 的垂线交 BC 于点 E ,

$\therefore \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = DC, AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ABE = \angle DCF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF (\text{AAS})$$

$$\therefore AE = DF, BE = CF = x,$$

$$\text{由勾股定理可得, } AE^2 = AC^2 - CE^2 = AC^2 - (BC - BE)^2 = 4 - (y - x)^2,$$

$$DF^2 = BD^2 - BF^2 = BD^2 - (BC + CF)^2 = BD^2 - (BC + BE)^2 = 12 - (y + x)^2,$$

$$\therefore 4 - (y - x)^2 = 12 - (y + x)^2,$$

$$\therefore (y + x)^2 - (y - x)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 - y^2 + 2xy - x^2 = 8$$

$$\text{即 } 4xy = 8, \text{ 解得 } xy = 2,$$

$\therefore$ 当 x, y 的值发生变化时, 代数式的值不变的是 xy ,

故选: C

二、填空题 (每题 3 分, 共 33 分):

6. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, 那么 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

$$\frac{2}{3}$$

【解析】

【详解】解: $\frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - \frac{y}{y} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$

7. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 如果 $AB = 2$, 那么 BP 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $3 - \sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5} + 3$

【解析】

【分析】本题考出来黄金分割, 解一元二次方程组. 由题意知, $BP = AB - AP = 2 - AP$, 由点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 可得 $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$, 即 $\frac{AP}{2} = \frac{2 - AP}{AP}$, 整理得 $AP^2 - 2AP + 4 = 0$, 计算求出满足要求的解即可.

【详解】解: 由题意知, $BP = AB - AP = 2 - AP$,

∵ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点,

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}, \text{ 即 } \frac{AP}{2} = \frac{2-AP}{AP}, \text{ 整理得 } AP^2 - 2AP + 4 = 0,$$

解得: $AP = -1 + \sqrt{5}$ 或 $AP = -1 - \sqrt{5}$ (舍去),

$$\therefore BP = 2 - AP = 2 - (-1 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$$

故答案为: $3 - \sqrt{5}$.

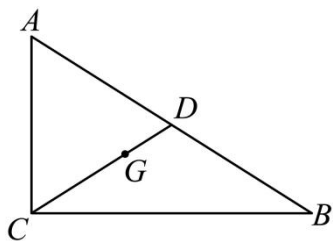
8. $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$, G 为重心, 则 $CG =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了三角形的重心: 三角形的重心是三角形三边中线的交点; 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$. 也考查了直角三角形斜边上的中线性质的. 根据直角三角形斜边上的中线性质的求出 CD , 根据重心的性质求出 CG 的长即可.

【详解】解: 如图, $\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,



$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $CG = 2DG$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore CG = 2,$$

故答案为: 2.

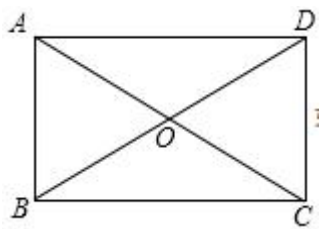
9. 已知矩形的两条对角线的夹角为 60° , 如果一条对角线长为 6, 那么矩形的面积为_____.

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】

【详解】分析: 先画图, 由题意可知四边形 $ABCD$ 是矩形, $AC=6$, $\angle AOB=60^\circ$, 根据矩形性质可知 $OA=OB$, $\angle ABC=90^\circ$, 易证 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 即可求出 AB 的长, 再利用勾股定理求出 BC 的长, 然后再利用矩形的面积公式求解即可.

详解: 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle AOB=60^\circ$, $AC=6$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OB=OA=\frac{1}{2}AC=3, \angle ABC=90^\circ,$$

又 $\because \angle AOB=60^\circ$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore AB=AO=3,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得,

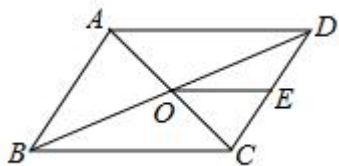
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{矩形} ABCD} = AB \times BC = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

故答案为 $9\sqrt{3}$.

点睛: 本题主要考查了矩形的性质、等边三角形的性质及勾股定理. 利用矩形的性质及已知条件得出 $\triangle AOB$ 是等边三角形是解题的关系.

10. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 是 CD 的中点, $\triangle ABD$ 的周长为 16cm , 则 $\triangle DOE$ 的周长是 _____ cm .



【答案】 8

【解析】

【分析】根据平行四边形的对边相等和对角线互相平分可得, $BC=AD$, $DC=AB$, $DO=BO$, E 点是 CD 的中点, 可得 OE 是 $\triangle DCB$ 的中位线, 可得 $OE = \frac{1}{2}BC$. 从而得到结果是 8cm .

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore O$ 是 BD 中点, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$,

又 $\because E$ 是 CD 中点,

$\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC,$$

即 $\triangle DOE$ 的周长 $= \frac{1}{2}\triangle BCD$ 的周长,

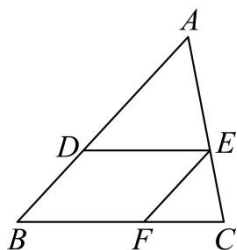
$$\therefore \triangle DOE \text{ 的周长} = \frac{1}{2}\triangle DAB \text{ 的周长}.$$

$$\therefore \triangle DOE \text{ 的周长} = \frac{1}{2} \times 16 = 8\text{cm}.$$

故答案为: 8.

【点睛】 本题主要考查平行四边形的性质及三角形中位线的性质的应用, 利用中位线定理推导 $\triangle DOE$ 的周长 $= \frac{1}{2}\triangle DAB$ 的周长是解题的关键.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在 AB, AC, BC 上, $DE \parallel BC, EF \parallel AB$. 若 $AB=8, BD=3, BF=4$, 则 FC 的长为_____.



【答案】 $\frac{12}{5}$.

【解析】

【详解】 $\because DE \parallel BC, EF \parallel AB,$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE} = \frac{FC}{BF},$$

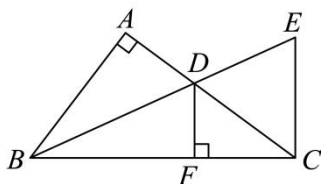
$$\because AB=8, BD=3, BF=4,$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{FC}{4},$$

$$\text{解得: } FC = \frac{12}{5}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{12}{5}.$$

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ, AB = 6, BC = 10, \angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 与 BC 的垂线 CE 相交于点 E , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 则 $BD:DE$ 为_____.



【答案】 3:2

【解析】

【分析】由勾股定理得 $AC = 8$ ，再由角平分线的性质得 $DA = DF$ ，进而由面积法求出 $DF = 3$ ，则 $CD = AC - DA = 5$ ，然后由勾股定理得 $CF = 4$ ，则 $BF = 6$ ，最后由平行线分线段成比例定理即可得出结论.

【详解】解： $\because \angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，

$$\therefore DA \perp BA, \quad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $DF \perp BC$ ，

$$\therefore DA = DF,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot DA + \frac{1}{2} BC \cdot DF,$$

$$\therefore 6 \times 8 = 6DF + 10DF,$$

解得： $DF = 3$ ，

$$\therefore DA = 3,$$

$$\therefore CD = AC - DA = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BF = BC - CF = 10 - 4 = 6,$$

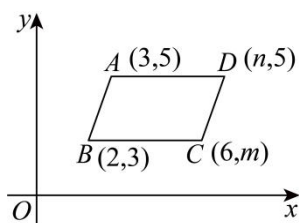
$\because DF \perp BC$ ， $CE \perp BC$ ，

$$\therefore DF \parallel CE,$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{BF}{CF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

即 $BD : DE = 3 : 2$.

13. 在平面直角坐标系中， $\square ABCD$ 在第一象限内，且 $AD \parallel BC \parallel x$ 轴，各顶点坐标如图所示，则 $m - n$ 的值是_____.



【答案】 -4

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质对边平行且相等，结合点的坐标即可解答.

【详解】 解： $\because B(2,3), C(6,m)$,

$$\therefore BC = 6 - 2 = 4,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = 4,$$

$$\therefore n - 3 = 4,$$

$$\therefore n = 7,$$

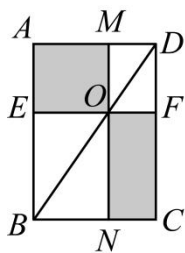
$\because BC \parallel x$ 轴,

$$\therefore m = 3,$$

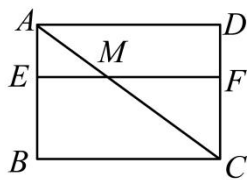
$$\therefore m - n = 3 - 7 = -4.$$

14. 中国北宋数学家贾宪提出一个定理“从长方形对角线上任一点作两条分别平行于两邻边的直线，则所容两长方形面积相等（如图①中 $S_{\text{矩形}AEOM} = S_{\text{矩形}CFON}$ ）”. 问题解决：如图②，点 M 是矩形 $ABCD$ 的对角线

AC 上一点，过点 M 作 $EF \parallel BC$ 分别交 AB, CD 于点 E, F . 连接 BM ，若 $CF = 4$, $EM = 3$, $DF = 2$ ，则 $MF =$ _____.



图①



图②

【答案】 6

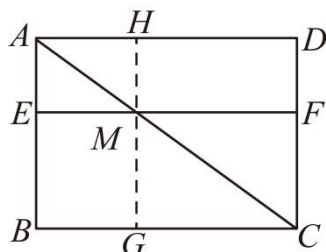
【解析】

【分析】 过点 M 作 $HG \parallel AB$ ，交 AD, BC 于点 H, G ，得到四边形 $EBGM$ 、 $DHMF$ 是矩形，根据题

意 $S_{\text{矩形}EBGM} = S_{\text{矩形}DHMF}$ ，即可求解。

本题考查了矩形的性质，三角形的面积等知识，掌握相关知识是解题的关键。

【详解】解：过点 M 作 $HG \parallel AB$ ，交 AD 、 BC 于点 H 、 G ，如图：



图②

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $EF \parallel BC$ ， $HG \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $EBGM$ 、 $DHMF$ 是矩形，

$\therefore EB = CF = 4$ ，

$\therefore$ 点 M 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点， $EF \parallel BC$ ， $HG \parallel AB$ ，

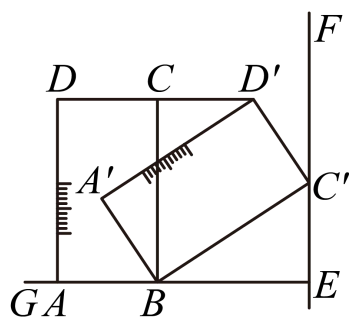
$\therefore S_{\text{矩形}EBGM} = S_{\text{矩形}DHMF}$ ，

$\therefore EB \cdot EM = MF \cdot DF$ ，即 $4 \times 3 = MF \times 2$ ，

$\therefore MF = 6$ ，

故答案为：6。

15. 如图，直尺 $ABCD$ 直立在水平桌面 GE 上，点 B 不动，转动直尺，使其一顶点靠在竖直墙壁 EF 上。观测发现，点 D 、 C 、 D' 在同一直线上，顶点 A 到墙壁 EF 的距离 AE 为 20cm ， $\angle C'BE = 30^\circ$ ，则直尺长 AD 为 _____ cm 。



【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

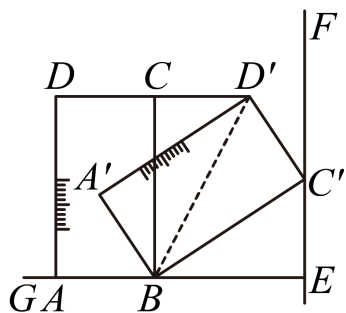
【分析】连接 BD' ，由矩形的性质和旋转的性质可得， $\angle BCD' = \angle BC'D' = 90^\circ$ ， $\angle CBC' = 60^\circ$ ，

$BC = BC'$ ，从而证明 $Rt\triangle BCD' \cong Rt\triangle BC'D' (HL)$ ，因此 $\angle CBD' = \angle C'BD' = \frac{1}{2} \angle CBC' = 30^\circ$ 。根据

含 30° 的直角三角形的性质可得， $BC' = \sqrt{3}C'D'$ ， $BE = \frac{\sqrt{3}}{2} BC'$ ，则 $BE = \frac{3}{2} C'D' = \frac{3}{2} AB$ ，结合

$AE = 20$ 可计算出 $AB = 8$ ，因此 $AD = \sqrt{3}AB = 8\sqrt{3}$ 。

【详解】解：如图，连接 BD' ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore \angle CBC' = 180^\circ - \angle ABC - \angle C'BE = 60^\circ$ ，

$\because$ 点 D 、 C 、 D' 在同一直线上，

$\therefore \angle BCD' = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$ ，

由旋转的性质可得， $BC' = BC$ ， $CD = C'D'$ ， $\angle BC'D' = \angle BCD = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle BCD'$ 和 $Rt\triangle BC'D'$ 中，

$$\begin{cases} BC = BC' \\ BD' = BD' \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle BCD' \cong Rt\triangle BC'D' (HL)$ ，

$\therefore \angle CBD' = \angle C'BD' = \frac{1}{2} \angle CBC' = 30^\circ$ ，

在 $Rt\triangle BC'D'$ 中， $\angle C'BD' = 30^\circ$ ，

$\therefore BD' = 2C'D'$ ，

由勾股定理可得， $BC' = \sqrt{BD'^2 - C'D'^2} = \sqrt{3}C'D'$ ，

在 $Rt\triangle BC'E$ 中， $\angle C'BE = 30^\circ$ ，

$\therefore C'E = \frac{1}{2} BC'$ ，

由勾股定理可得, $BE = \sqrt{BC'^2 - C'E^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} BC'$,

$$\therefore BE = \frac{3}{2} C'D' = \frac{3}{2} CD = \frac{3}{2} AB,$$

$$\therefore AE = AB + BE = 20\text{cm},$$

$$\therefore AB + \frac{3}{2} AB = 20, \text{ 解得 } AB = 8\text{cm},$$

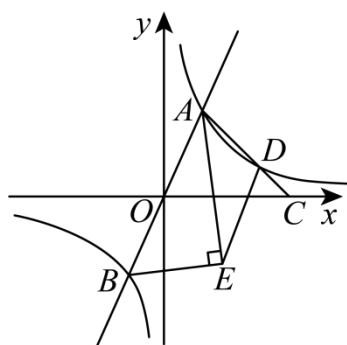
$$\therefore C'D' = AB = 8\text{cm},$$

$$\therefore BC' = \sqrt{3}C'D' = 8\sqrt{3}\text{cm},$$

$$\therefore BC' = BC, \quad BC = AD,$$

$$\therefore AD = 8\sqrt{3}\text{cm}.$$

16. 如图, 过原点的直线与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 A, B 两点, 点 A 在第一象限点 C 在 x 轴正半轴上, 连结 AC 交反比例函数图象于点 D . AE 为 $\angle BAC$ 的平分线, 过点 B 作 AE 的垂线, 垂足为 E , 连结 DE . 若 $AC = 3DC$, $\triangle ADE$ 的面积为 8, 则 k 的值为_____.



【答案】6

【解析】

【分析】连接 OE, CE , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DG \perp AF$; 由 AB 经过原点, 则 A 与 B 关于原点对称, 再由 $BE \perp AE$, AE 为 $\angle BAC$ 的平分线,

可得 $AD \parallel OE$, 进而可得 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AOC}$; 设点 $A(m, \frac{k}{m})$, 由已知条件 $AC = 3DC$, $DH \parallel AF$, 可得 $3DH = AF$,

则点 $D(3m, \frac{k}{3m})$, 证明 $\triangle DHC \sim \triangle AGD$, 得到 $S_{\triangle HDC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ADG}$, 所以 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOF} + S_{\text{梯形}}$

$$AFHD + S_{\triangle HDC} = \frac{1}{2} k + \frac{4k}{3} + \frac{k}{6} = 12; \text{ 即可求解;}$$

【详解】连接 OE, CE , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DG \perp AF$,

$$= \frac{1}{2}k + \frac{4k}{3} + \frac{k}{6} = 12,$$

$$\therefore 2k = 12,$$

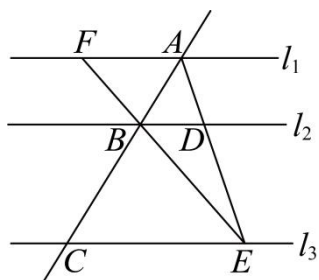
$$\therefore k = 6;$$

故答案为 6.

【点睛】本题考查反比例函数 k 的意义；借助直角三角形和角平分线，将 $\triangle ACE$ 的面积转化为 $\triangle AOC$ 的面积是解题的关键.

三、解答题 (17 题 8 分, 18 题 6 分, 19 题 7 分, 20、21 题每题 10 分, 22 题 11 分, 共 52 分)

17. 如图, $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AD = 2$, $DE = 4$.



(1) $AB = 3$, 求 BC ;

(2) $EF = 7.5$, 求 BE 的长.

【答案】(1) 6 (2) 5

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线分线段成比例定理, 灵活运用所学知识是解题的关键.

(1) 根据平行线分线段成比例定理求解即可;

(2) 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{DE}{AD} = \frac{EB}{BF}$, 然后代值计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}, \text{ 即 } \frac{3}{BC} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore BC = 6;$$

【小问 2 详解】

解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EB}{BF},$$

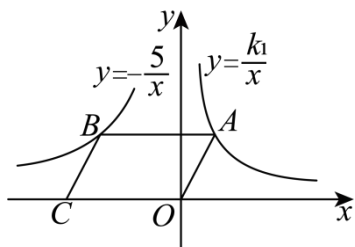
$$\because AD = 2, DE = 4, EF = 7.5,$$

$$\therefore \frac{4}{2} = \frac{BE}{7.5 - BE},$$

解得 $BE = 5$,

$\therefore BE$ 的长为 5.

18. 如图, $\square AOCB$ 的顶点 A, B 分别在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = -\frac{5}{x}$ 上, 顶点 C 在 x 轴上, 已知点 A 的坐标为 $(1, 2)$.



(1) 求双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 的解析式;

(2) 求 $\square AOCB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x}$

(2) 7

【解析】

【分析】 (1) 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ 求解即可;

(2) 连接 OB , 设 AB 与 y 轴交于点 D , 根据反比例函数的比例系数的几何意义可得 $S_{\triangle BOD} = \frac{5}{2}$, $S_{\triangle AOD} = 1$, 从而可知 $S_{\triangle AOB} = \frac{7}{2}$, 即可求得答案.

【小问 1 详解】

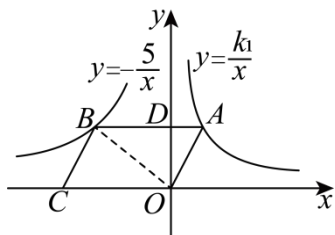
解: 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ 得: $2 = \frac{k_1}{1}$,

解得: $k_1 = 2$,

$\therefore$ 双曲线的解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 连接 OB , 设 AB 与 y 轴交于点 D ,



∵ 四边形 $AOCB$ 为平行四边形, 点 C 在 x 轴上,

∴ $AB \parallel y$ 轴,

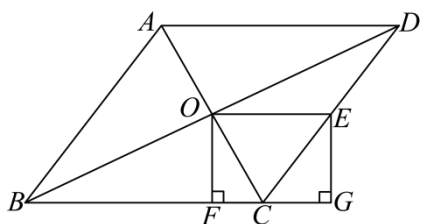
∵ 点 A 和点 B 分别在双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{5}{x}$ 上,

$$\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{5}{2}, \quad S_{\triangle AOD} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOD} + S_{\triangle AOD} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2},$$

$$\therefore S_{AOCB} = 2S_{\triangle AOB} = 2 \times \frac{7}{2} = 7.$$

19. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , E 是 CD 边的中点, 连接 OE . 过点 O , E 作直线 BC 的垂线, 垂足分别为 F , G .



(1) 求证: 四边形 $OEGF$ 是矩形;

(2) 若四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 6$, $BD = 8$, 则矩形 $OEGF$ 的面积为_____.

【答案】(1) 详见解析

(2) 6

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定及性质、矩形的判定及性质、菱形的性质、勾股定理、三角形的面积计算, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质得到 $BO = DO$, 由 E 是 CD 边的中点可得 $DE = CE$, 根据三角形中位线定理得到 $OE \parallel BC$, 即 $OE \parallel FG$, 进而推出四边形 $OEGF$ 是平行四边形, 根据矩形的判定定理得到结论;

(2) 根据菱形的性质得到 $AC \perp BD$, 求得 $\angle BOC = \angle COD = 90^\circ$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4$, $OC = \frac{1}{2}AC = 3$, 由勾股定理求出 $BC = CD = 5$, 根据三角形面积公式得到 $OF = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$, 根据矩形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: ∵ $OF \perp BC$, $EG \perp BC$,

∴ $OF \parallel EG$, $\angle OFG = 90^\circ$,

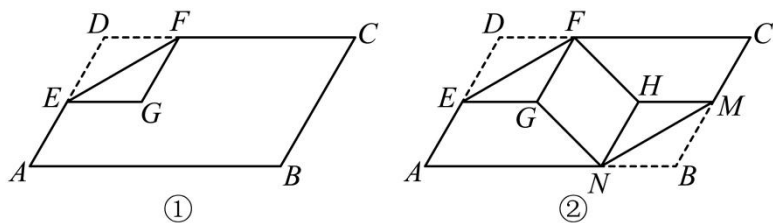
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BO = DO$,
 $\because E$ 是 CD 边的中点,
 $\therefore DE = CE$,
 $\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,
 $\therefore OE \parallel BC$, 即 $OE \parallel FG$,
 $\therefore$ 四边形 $OEGF$ 是平行四边形,
 $\because \angle OFG = 90^\circ$,
 $\therefore$ 平行四边形 $OEGF$ 是矩形;

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 6$, $BD = 8$,
 $\therefore AC \perp BD$,
 $\therefore \angle BOC = \angle COD = 90^\circ$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4$, $OC = \frac{1}{2}AC = 3$,
 $\therefore BC = CD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,
 $\because E$ 是 CD 边的中点,
 $\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$,
 $\because OF \perp BC$,
 $\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OF = \frac{1}{2}OB \cdot OC$,
 $\therefore OF = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$,
 $\therefore$ 矩形 $OEGF$ 的面积 $= OE \cdot OF = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = 6$.

20. 【问题背景】在学习了平行四边形后, 某兴趣小组研究了一个内角为 60° 的平行四边形的折叠问题. 其探究过程如下:



(1) 如图①, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB > AD$, E 为 AD 边的中点, 点 F 在边 DC 上, $DF = DE$, 连接 EF , 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle GEF$, 点 D 的对称点为点 G , 小组成员发现四边形 $DEGF$ 是一个特殊的四边形, 请判断四边形 $DEGF$ 的形状为 _____;

【探究证明】

(2) 在 (1) 的条件下, 取 BC 的中点 M , 点 N 在边 AB 上, 且 $BN = BM$, 连接 MN , 将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle HMN$, 点 B 的对称点为点 H , 连接 FH 、 GN , 如图②, 求证: 四边形 $GFHN$ 是平行四边形;

【探究提升】

(3) 在 (1) (2) 的条件下, 若四边形 $GFHN$ 为轴对称图形, 请直接写出 $\frac{AD}{AB}$ 的值为_____.

【答案】 (1) 菱形 (2) 证明见解析

(3) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由折叠的性质结合 $DF = DE$ 可得, $DE = GE = GF = DF$, 由此判定为菱形;

(2) 容易判断四边形 $DEGF$ 也是菱形, 由菱形的性质可得, $BM \parallel NH$, $BM = NH$, $GF \parallel DE$, $GF = DE$, 结合平行四边形的性质和中点的性质可得, $GF \parallel NH$, $GF = NH$, 命题得证;

(3) 分两类讨论, 当四边形 $GFHN$ 为矩形时, 作 $ET \perp AB$ 于点 T , 作 $GK \perp AB$ 于点 K , 设 $AD = BC = 4a$, 由含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理可得可得, $AT = a$, $ET = \sqrt{3}a$, 容易证明四边形 $ETKG$ 是

矩形, 则 $GK = ET = \sqrt{3}a$, $EG = TK = 2a$. 由矩形的性质可得, $\angle GNH = 90^\circ$, 则 $\angle GKN = 30^\circ$, 从而得到 $KN = 3a$, 进一步计算出 $AB = 8a$, 因此 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$; 当四边形 $GFHN$ 为菱形时, 延长 FG 交 AB

于点 W , 设 $AD = 4a$, 容易判断 $\angle GWN = \angle A = 60^\circ$, $GN = GW = 2a$, 从而判断 $\triangle GWN$ 是等边三角

形, 则 $WN = 2a$, 进而计算出 $AB = 6a$, 因此 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$.

【小问 1 详解】

解: 由折叠的性质可得, $DE = GE$, $DF = GF$,

$\therefore DF = DE$,

$\therefore DE = GE = GF = DF$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明: 同理 (1) 可得, 四边形 $BMHN$ 是菱形,

$\therefore BM \parallel NH$, $BM = NH$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形,

$\therefore GF \parallel DE$, $GF = DE$,

$$\therefore \angle GET = \angle ATE = 90^\circ,$$

$$\therefore GK \perp AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ETKG$ 是矩形,

$$\therefore GK = ET = \sqrt{3}a, \quad EG = TK = 2a,$$

$\therefore$ 四边形 $BMHN$ 是菱形,

$$\therefore BN = BM = 2a, \quad BM \parallel NH,$$

$$\therefore \angle KNH = \angle B = 120^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 为矩形,

$$\therefore \angle GNH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GKN = \angle KNH - \angle GNH = 30^\circ,$$

在 $Rt\triangle GKN$ 中, $\angle GKN = 30^\circ$,

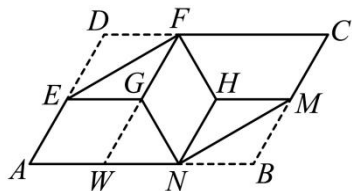
$$\therefore GN = 2GK = 2\sqrt{3}a,$$

由勾股定理可得, $KN = \sqrt{GN^2 - GK^2} = 3a$,

$$\therefore AB = AT + TK + KN + BN = 8a,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{4a}{8a} = \frac{1}{2};$$

②当四边形 $GFHN$ 为菱形时, 如图, 延长 FG 交 AB 于点 W , 设 $AD = 4a$,



由①可知, $AE = DE = BM = BN = 2a$,

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形,

$$\therefore DE \parallel GF, \quad GE \parallel CD, \quad DE = GE = GF = 2a,$$

$$\therefore \angle GWN = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel GE,$$

$\therefore$ 四边形 $AWGE$ 是平行四边形,

$$\therefore AE = GW = 2a, \quad AW = GE = 2a,$$

$\therefore$ 四边形 $GFHN$ 为菱形,

$$\therefore GF = GN = 2a,$$

$$\therefore GN = GW,$$

$\therefore \triangle GWN$ 是等边三角形,

$$\therefore WN = GW = 2a,$$

$$\therefore AB = AW + WN + BN = 6a,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{4a}{6a} = \frac{2}{3},$$

综上所述, $\frac{AD}{AB}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$.

21. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = 2x + 4$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 过点 B 的另一条直线交 x 轴正半轴于点 C , 且 $OC = 3$.

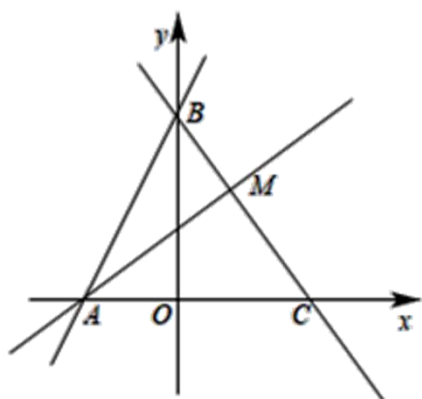


图 1

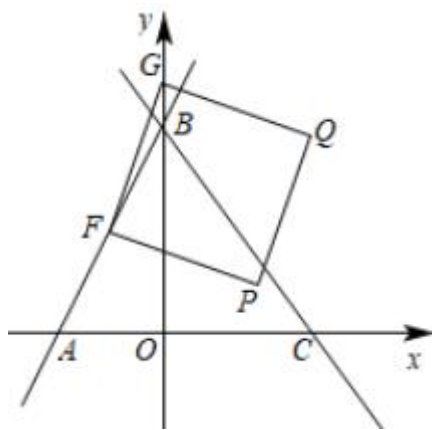


图 2

(1) 求直线 BC 的解析式;

(2) 如图 1, 若 M 为线段 BC 上一点, 且满足 $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AOB}$, 请求出点 M 的坐标;

(3) 如图 2, 设点 F 为线段 AB 中点, 点 G 为 y 轴上一动点, 连接 FG , 以 FG 为边向 FG 右侧作正方形 $FGQP$, 在 G 点的运动过程中, 当顶点 Q 落在直线 BC 上时, 求点 G 的坐标;

【答案】 (1) $y = -\frac{4}{3}x + 4$; (2) $M(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$; (3) $G(0, \frac{23}{7})$ 或 $G(0, -1)$

【解析】

【分析】 (1) 求出点 B , C 坐标, 再利用待定系数法即可解决问题;

(2) 结合图形, 由 $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AOB}$ 分析出直线 OM 平行于直线 AB , 再利用两直线相交建立方程组求得交点 M 的坐标;

(3) 分两种情形: ①当 $n > 2$ 时, 如图 2-1 中, 点 Q 落在 BC 上时, 过 G 作直线平行于 x 轴, 过点 F , Q 作该直线的垂线, 垂足分别为 M , N . 求出 $Q(n-2, n-1)$. ②当 $n < 2$ 时, 如图 2-2 中, 同法可得 $Q(2-n, n+1)$,

代入直线 BC 的解析式解方程即可解决问题.

【详解】解: (1) $\because$ 直线 $y=2x+4$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B,

$\therefore A(-2, 0), B(0, 4),$

又 $\because OC=3,$

$\therefore C(3, 0),$

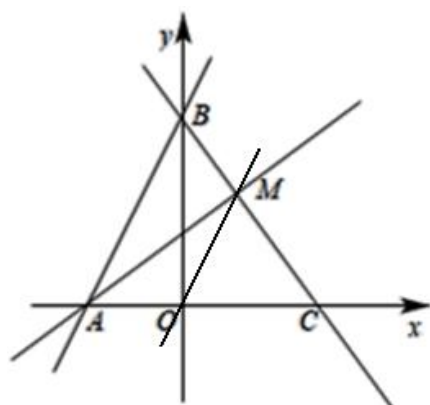
设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$, 将 B、C 的坐标代入得:

$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=4 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k=-\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases},$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4;$

(2) 连接 OM,



$$\because S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AOB},$$

$\therefore$ 直线 OM 平行于直线 AB, 故设直线 OM 解析式为: $y=2x,$

将直线 OM 的解析式与直线 BC 的解析式联立得方程组

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{4}{3}x+4 \end{cases},$$

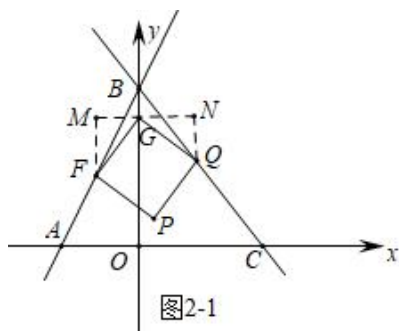
解得: $\begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{12}{5} \end{cases}$

故点 $M(\frac{6}{5}, \frac{12}{5});$

(3) $\because FA=FB$, $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$,

$\therefore F(-1, 2)$, 设 $G(0, n)$,

①当 $n > 2$ 时, 如图 2-1 中, 点 Q 落在 BC 上时, 过 G 作直线平行于 x 轴, 过点 F, Q 作该直线的垂线, 垂足分别为 M, N .



$\because$ 四边形 $FGQP$ 是正方形, 易证 $\triangle FMG \cong \triangle GNQ$,

$\therefore MG=NQ=1$, $FM=GN=n-2$,

$\therefore Q(n-2, n-1)$,

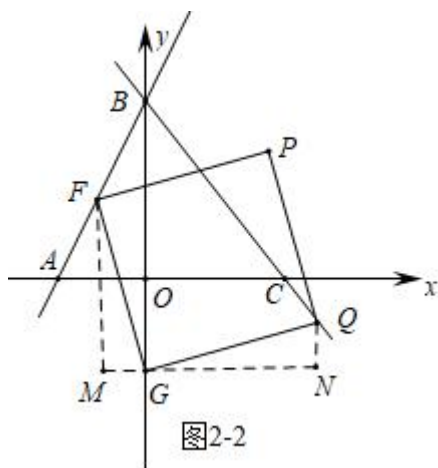
$\because$ 点 Q 在直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 上,

$$\therefore n-1 = -\frac{4}{3}(n-2) + 4,$$

$$\therefore n = \frac{23}{7},$$

$$\therefore G(0, \frac{23}{7}).$$

②当 $n < 2$ 时, 如图 2-2 中, 同法可得 $Q(2-n, n+1)$,



$\because$ 点 Q 在直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 上,

$$\therefore n+1 = -\frac{4}{3}(2-n) + 4,$$

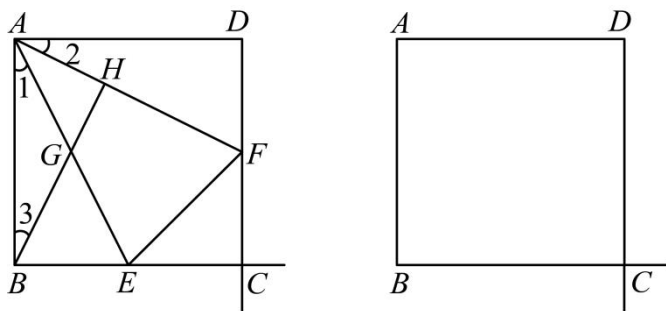
$$\therefore n = -1,$$

$$\therefore G(0, -1).$$

综上所述，满足条件的点 G 坐标为 $G(0, \frac{23}{7})$ 或 $G(0, -1)$

【点睛】本题属于一次函数综合题，考查了待定系数法，三角形的面积，全等三角形的判定和性质，正方形的性质等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

22. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别为射线 BC 、射线 DC 上的点，且满足 $BE = DF$ ，联结 AE 、 AF ，点 G 为 AE 的中点，射线 BG 交 AF 于点 H .



备用图

(1) 如图，当点 E 在线段 BC 上时，

①证明： $BH \perp AF$ ；

②联结 FG ，当 $FG \parallel BC$ 时，求：四边形 $BEFG$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比.

(2) 当 $AB = 4$ ， $\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 时，求： BE 的值.

【答案】(1) ①见解析； ② $\frac{5}{16}$

(2) $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $8 + 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) ①先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS)， $\angle 1 = \angle 2$ ，由直角三角形斜边中线得到 $GA = GB$ ，则 $\angle 1 = \angle 3$ ，那么 $\angle 2 = \angle 3$ ，由 $\angle 2 + \angle BAH = 90^\circ$ ，可得 $\angle 3 + \angle BAH = 90^\circ$ ，即可求证；

②延长 FG 交 AB 于点 K ，可得 $CF = BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ ， $KF = BC$ ，设正方形边长为 $2x$ ，则

$BE = DF = EC = CF = x$ ，而 GK 为 $\triangle ABE$ 的中位线，则 $GK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x$ ，那么 $GF = KF - KG = \frac{3}{2}x$ ，

最后由 $\frac{S_{\text{四边形}BEFG}}{S_{\text{正方形}ABCD}} = \frac{(FG+BE) \times FC \times \frac{1}{2}}{AB \times BC}$ 即可求解;

(2) 当点 E 在线段 BC 上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$, 则 GH 为 $\triangle AEK$ 的中位线, 那么

$GH \parallel EK, GH = \frac{1}{2}EK$, 则 $\frac{\frac{1}{2}EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 即 $\frac{EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $\frac{KF}{EF} = \frac{1}{2}$, 根据 30° 角直角三角形的性质

逆定理可得 $\angle KEF = 30^\circ$, 导角得到 $\angle FAD = 15^\circ$, 在 AD 上取点 T , 连接 FT , 使得 $TA = TF$, 则

$\angle DTF = 30^\circ$, 那么 $TF = 2DF$, 设 $TA = TF = 2n$, 则 $DF = n$, 则 $DT = \sqrt{TF^2 - DF^2} = \sqrt{3}n$, 有

$AT + TD = AD$, 得 $\sqrt{3}n + 2n = 4$, 即可求解; 当点 E 线段 BC 延长线上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,

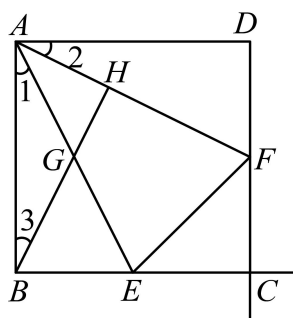
同理可得: $\angle EFK = 60^\circ$, $\angle CFE = 45^\circ$, 则 $\angle AFD = \angle KFE - \angle CFE = 15^\circ$, 在 DF 上取点 R , 连接 AR ,

使得 $RA = RF$, 同理可得: $\angle ARD = 30^\circ$, 同理可得 $AR = 2AD = 8$, $DR = \sqrt{3}AD = 4\sqrt{3}$, 那么

$DF = DR + RF = 8 + 4\sqrt{3}$.

【小问 1 详解】

证明: ①如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle ABE = \angle ADF = \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$,

$\because BE = DF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS),

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\because G$ 为 AE 的中点, $\angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore GA = GB$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

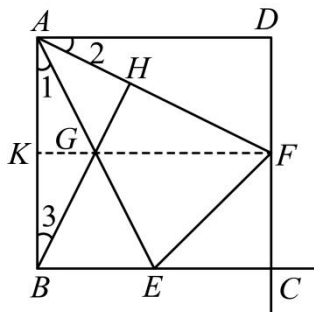
$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$$\therefore \angle 2 + \angle BAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle BAH = 90^\circ,$$

$$\therefore BH \perp AF;$$

② 延长 FG 交 AB 于点 K ,



$$\therefore GF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FKB = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

即 $FK \perp AB$,

$$\therefore GA = GB,$$

$\therefore$ 点 K 为 AB 中点,

$$\therefore \angle FKB = \angle ABC = \angle BCF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $KBCF$ 为矩形,

$$\therefore CF = BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD, KF = BC,$$

$$\therefore BE = DF = EC = CF,$$

设正方形边长为 $2x$, 则 $BE = DF = EC = CF = x$,

$\therefore K, G$ 为 AB, AE 的中点,

$\therefore GK$ 为 $\triangle ABE$ 的中位线,

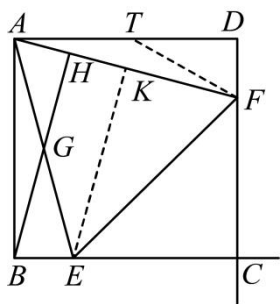
$$\therefore GK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore GF = KF - KG = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形} BEFG}}{S_{\text{正方形} ABCD}} = \frac{(FG + BE) \times FC \times \frac{1}{2}}{AB \times BC} = \frac{\left(\frac{3}{2}x + x\right) \cdot \frac{1}{2}x}{4x^2} = \frac{5}{16};$$

【小问 2 详解】

解: 当点 E 在线段 BC 上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,



$\because G$ 为 AE 的中点,

$\therefore GH$ 为 $\triangle AEK$ 的中位线,

$$\therefore GH \parallel EK, GH = \frac{1}{2}EK,$$

$$\therefore \angle EKA = \angle BHA = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \frac{EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

设 $EK = \sqrt{3}m$, 则 $EF = 2m$,

$$\therefore KF = \sqrt{EF^2 - EK^2} = m,$$

$$\therefore \frac{KF}{EF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle KEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EFK = 90^\circ - \angle KEF = 60^\circ,$$

$$\because BE = DF, BC = CD,$$

$$\therefore CE = CF,$$

又 $\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CEF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CFE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = 180^\circ - \angle CFE - \angle KEF = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = 15^\circ,$$

在 AD 上取点 T , 连接 FT , 使得 $TA = TF$,

$$\therefore \angle TAF = \angle TFA = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DTF = 30^\circ,$$

$$\therefore TF = 2DF,$$

设 $TA = TF = 2n$, 则 $DF = n$,

$$\therefore DT = \sqrt{TF^2 - DF^2} = \sqrt{3}n,$$

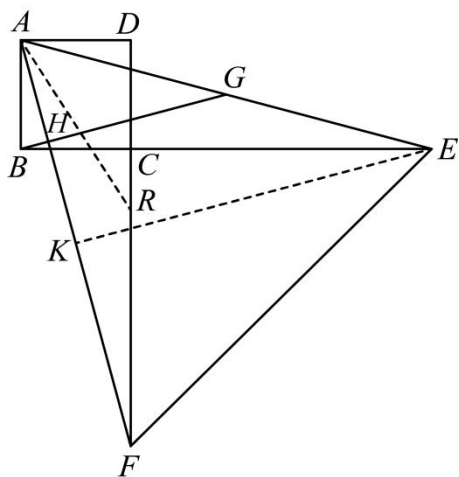
$$\therefore AT + TD = AD,$$

$$\therefore \sqrt{3}n + 2n = 4,$$

$$\text{解得: } n = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = DF = 8 - 4\sqrt{3};$$

当点 E 在线段 BC 延长线上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,



同理可得: $\angle EFK = 60^\circ$, $\angle CFE = 45^\circ$,

$$\therefore \angle AFD = \angle KFE - \angle CFE = 15^\circ,$$

在 DF 上取点 R , 连接 AR , 使得 $RA = RF$,

同理可得: $\angle ARD = 30^\circ$,

$$\therefore \text{同理可得 } AR = 2AD = 8, \quad DR = \sqrt{3}AD = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore DF = DR + RF = 8 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = DF = 8 + 4\sqrt{3},$$

综上: BE 的值 $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $8 + 4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 勾股定理, 30° 直角三角形的性质及其逆定理, 全等三角形的判定与性质, 三角形的中位线定理, 难度较大, 解题的关键在于正确构造辅助线.