

2025-2026 学年上海实验东校八年级第二学期期中数学试卷

一、填空题 (每题 2 分, 满分 28 分)

1. 若函数 $y = kx + 2(x-1)$ 是关于 x 的一次函数, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \neq -2$

【解析】

【分析】 先将给定函数整理为一次函数的一般形式, 再根据一次函数的定义, 要求一次项系数不为 0, 列不等式求出 k 的取值范围即可.

【详解】 解: $y = kx + 2(x-1) = (k+2)x - 2$,

$\therefore$ 函数 $y = kx + 2(x-1)$ 是关于 x 的一次函数,

$\therefore k+2 \neq 0$,

$\therefore k \neq -2$.

2. 已知直线 $y = -\frac{3}{2}x + b$ 经过点 $A(m_1, -2)$, $B(m_2, -1)$ 两点, 则 m_1 _____ m_2

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据一次函数增减性可得, $k < 0$, y 随 x 的增大而减小, $k > 0$, y 随 x 的增大而增大即可判断得出答案.

【详解】 解: $\therefore$ 直线的解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + b$

$\therefore k < 0$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{3}{2}x + b$ 经过点 $A(m_1, -2)$, $B(m_2, -1)$ 两点, $-2 < -1$

$\therefore m_1 > m_2$

故答案为: $>$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图像的增减性与系数 k 的关系, 解题的关键在于熟练掌握, 当 $k < 0$, y 随 x 的增大而减小, $k > 0$, y 随 x 的增大而增大.

3. 方程 $(x+1) \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程，二次根式的性质，原方程可化为： $x+1=0$ 或 $\sqrt{x-2}=0$ ，先解方程，再验根.

【详解】 解：原方程可化为： $x+1=0$ 或 $\sqrt{x-2}=0$

$\therefore x = -1$ 或 $x = 2$,

$\because x \geq 2$,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 2$,

故答案为： $x = 2$.

4. 方程 $x^3 - 1 = 0$ 的实数解是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 根据立方根定义求解即可.

【详解】 解： $x^3 - 1 = 0$

$$x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{1} = 1.$$

5. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$;

【解析】

【分析】 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$ ，原方程变为： $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$ ，方程两边乘最简公分母 y ，可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】 解：设 $\frac{x-2}{x} = y$,

原方程变为 $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$,

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】 本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

6. 如果方程 $\frac{x-3}{x-2} + 1 = \frac{m}{x-2}$ 有增根, 那么 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 把 $x = 2$ 代入整式方程求出 m 的值即可.

【详解】 解: 去分母得: $x - 3 + x - 2 = m$,

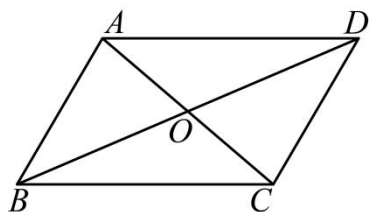
由分式方程有增根, 得到 $x = 2$,

代入整式方程得: $m = -1$,

故答案为 -1

【点睛】 此题考查了分式方程的增根, 增根确定后可按如下步骤进行: ① 化分式方程为整式方程; ② 把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

7. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 要使四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则需添加一个条件, 这个条件可以是_____.



【答案】 $AB = CD$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的判定, 熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键. 根据平行四边形的判定方法解答即可.

【详解】 解: $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (一组对边平行且相等的四边形是平行四边形),

$\therefore$ 可添加的条件是: $AB = CD$;

在四边形 $ABCD$ 中,

$\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

$\therefore$ 可添加条件 $AD \parallel BC$;

故答案是: $AB = CD$ (答案不唯一) .

8. 已知一个多边形的每一个内角都等于 108° , 则这个多边形的边数是_____.

【答案】 5

【解析】

【详解】解: $\because$ 多边形的每一个内角都等于 108°

$\therefore$ 每一个外角为 72°

$\because$ 多边形的外角和为 360°

$\therefore$ 这个多边形的边数是: $360 \div 72 = 5$

故答案为: 5

9. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线将 CD 分成 4cm 和 2cm 两部分, 则平行四边形 $ABCD$ 的周长为_____

【答案】 16cm 或 20cm

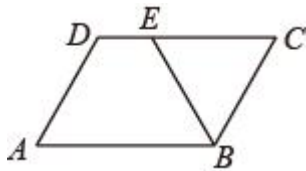
【解析】

【分析】设 $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 E , 先画出图形 (见解析), 分 $DE = 2\text{cm}, CE = 4\text{cm}$ 和

$DE = 4\text{cm}, CE = 2\text{cm}$ 两种情况, 再根据平行四边形的性质、等腰三角形的判定可得 $BC = CE$, 然后根据平行四边形的周长公式即可得.

【详解】解: 设 $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 E ,
由题意, 分以下两种情况:

(1) 如图, 当 $DE = 2\text{cm}, CE = 4\text{cm}$ 时, 则 $CD = CE + DE = 6\text{cm}$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \angle BEC = \angle ABE,$

$\because BE$ 平分 $\angle ABC,$

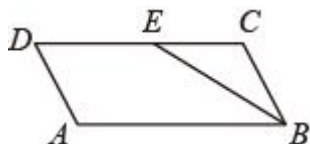
$$\therefore \angle CBE = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle CBE,$$

$$\therefore BC = CE = 4\text{cm},$$

则平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(BC + CD) = 2 \times (4 + 6) = 20(\text{cm})$;

(2) 如图, 当 $DE = 4\text{cm}$, $CE = 2\text{cm}$ 时, 则 $CD = CE + DE = 6\text{cm}$,



同理可得: $BC = CE = 2\text{cm}$,

则平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(BC + CD) = 2 \times (2 + 6) = 16(\text{cm})$;

综上, 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 16cm 或 20cm ,

故答案为: 16cm 或 20cm .

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的判定等知识点, 熟练掌握平行四边形的性质, 并分两种情况讨论是解题关键.

10. 平行四边形的周长为 36 , 一条对角线把它分成两个三角形, 周长都是 30cm , 则这条对角线长是_____cm.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可知, 平行四边形的对边相等, 所以一组邻边的和为 18 , 再根据三角形周长为 30cm , 可求对角线的长;

【详解】 解: 设平行四边形的两条边是 x , y ,

$$\therefore 2x + 2y = 36, \text{ 即 } x + y = 18,$$

$\because$ 三角形的周长都是 30cm ,

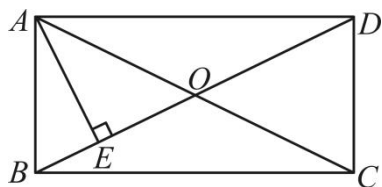
$$\therefore x + y + \text{这条对角线长} = 30,$$

把 $x + y = 18$ 代入得到这条对角线长 $= 30 - 18 = 12\text{cm}$.

故答案为 12.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的基本性质, 并利用性质解题. 平行四边形基本性质: ① 平行四边形两组对边分别平行; ② 平行四边形的两组对边分别相等; ③ 平行四边形的两组对角分别相等; ④ 平行四边形的对角线互相平分.

11. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , $AE \perp BD$, 垂足为点 E , 且 $BE:EO=2:3$, $AE=4\text{cm}$, 那么 $AD=$ _____ cm .



【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 解分式方程以及勾股定理, 进行解答即可.

【详解】 解: $\because BE:EO=2:3$,

$\therefore$ 设 $BE=2x\text{cm}$, 则 $EO=3x\text{cm}$, ($x>0$).

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore \angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$, $OB = OD = BE + OE = 5x$,

$\therefore DE = OD + OE = 8x\text{cm}$.

$\because AE \perp BD$,

$\therefore \angle AEB = \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle EAD$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DAE$,

$$\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{AE}{DE},$$

$$\text{即 } \frac{2x}{4} = \frac{4}{8x},$$

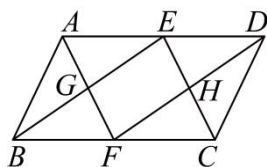
解得, $x=1$, (负值已舍去),

经检验, $x=1$ 是原方程的解,

$\therefore DE=8\text{cm}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}(\text{cm})$.

12. 如图, 点 E , F 分别为平行四边形 $ABCD$ 边 AD , BC 的中点, 连接 EB , FA 交于点 G , 连接 EC , FD 交于点 H , 那么四边形 $EGFH$ 的面积与平行四边形 $ABCD$ 的面积之比是_____.

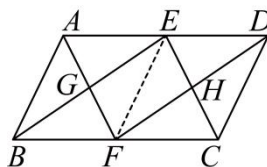


【答案】 1:4

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质及中点推出平行四边形 $ABEF$ 和 $EFCD$ ，从而判断 G 和 H 点是中点，利用等底等高三角形面积相等即可求出答案.

【详解】解：连接 EF ，如图所示，



$\because$ 点 E ， F 分别为平行四边形 $ABCD$ 边 AD ， BC 的中点，

$$\therefore AE = ED = \frac{1}{2}AD, \quad BF = FC = \frac{1}{2}BC, \quad AD = BC, \quad AD \parallel BC, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore AE \parallel BF, \quad AE = BF, \quad ED \parallel FC, \quad ED = FC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 和 $EFCD$ 都是平行四边形，

$\therefore G$ 是 AF 和 BE 的中点， H 是 EC 和 FD 的中点

$\therefore \triangle ABG$ ， $\triangle AGE$ ， $\triangle BGF$ 和 $\triangle GEF$ 等底等高， $\triangle EFH$ ， $\triangle FHC$ ， $\triangle DHC$ 和 $\triangle EDH$ 等底等高，

$$\therefore S_{\triangle GEF} = \frac{1}{4}S_{\square ABFE}, \quad S_{\triangle EFH} = \frac{1}{4}S_{\square EFCD}.$$

$$\because AE = ED = BF = FC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore S_{\square ABFE} = S_{\square EFCD} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$$

$$\therefore S_{\square EFGH} = S_{\triangle GEF} + S_{\triangle FHE} = \frac{1}{4}S_{\square ABFE} + \frac{1}{4}S_{\square EFCD} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}S_{\square ABCD} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD},$$

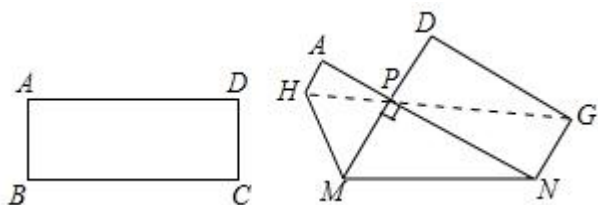
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积与平行四边形 $ABCD$ 的面积之比是 1:4.

故答案为：1:4.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定和性质，解题的关键在于巧妙利用中点和等底等高找到面积的关系.

13. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠， B 、 C 两点恰好重合落在 AD 边上点 P 处，已知 $\angle MPN = 90^\circ$ ，

$PM=3$, $PN=4$ ，那么矩形纸片 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 28.8

【解析】

【分析】 由折叠的性质可知 $BC=PM+MN+PN$, 且 AB 与 $Rt\triangle PMN$ 中边 MN 上的高相等, 在 $Rt\triangle PMN$ 中可求得 MN 及 MN 边上的高, 则可求得答案

【详解】 $\because \angle MPN=90^\circ$, 且 $PM=3, PN=4$

$$\therefore MN=5, \text{边 } MN \text{ 上的高} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

又由折叠的性质可知

$$BC=PM+MN+PN=3+5+4=12$$

$$AB=\frac{12}{5}$$

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCD}=12 \times \frac{12}{5}=28.8$$

【点睛】 此题考查翻折变换(折叠问题)和矩形的性质, 解题关键在于利用折叠的性质可知 $BC=PM+MN+PN$

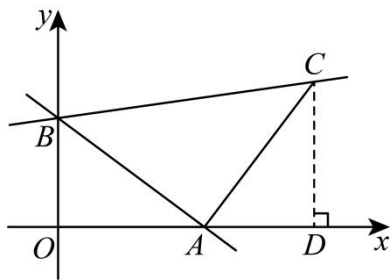
14. 一次函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 的图像分别于 x 轴, y 轴交于 A 、 B , 将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AC , 则 B 、 C 两点的直线解析式为_____

【答案】 $y=\frac{1}{7}x+3$

【解析】

【分析】 先分别求出点 A 、 B 的坐标, 再根据旋转的性质、三角形全等的判定定理与性质求出点 C 的坐标, 然后利用待定系数法即可得.

【详解】 解: 由题意, 画图如下:



对于一次函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$,

当 $y=0$ 时, $-\frac{3}{4}x+3=0$, 解得 $x=4$, 即 $A(4,0), OA=4$,

当 $x=0$ 时, $y=3$, 即 $B(0,3), OB=3$,

过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ,

由旋转的性质得: $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$,

$\therefore \angle OAB + \angle CAD = 90^\circ$,

$\because x$ 轴 $\perp y$ 轴,

$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle ABO$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BAO$ 中,
$$\begin{cases} \angle CDA = \angle AOB = 90^\circ \\ \angle CAD = \angle ABO \\ AC = BA \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BAO (AAS)$,

$\therefore AD = OB = 3, CD = OA = 4$,

$\therefore OD = OA + AD = 7$,

$\therefore C(7,4)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将点 $B(0,3), C(7,4)$ 代入得:
$$\begin{cases} b = 3 \\ 7k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{7} \\ b = 3 \end{cases},$$

则直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{7}x + 3$,

故答案为: $y = \frac{1}{7}x + 3$.

【点睛】 本题考查了利用待定系数法求一次函数的解析式、旋转的性质等知识点, 熟练掌握旋转的性质是解题关键.

二、选择题: (每题 3 分, 满分 12 分)

15. 一次函数 $y = 3x + b$ 的图像经过第一、三、四象限, 则 b 的取值范围是 ()

A. $b \geq 0$

B. $b > 0$

C. $b \leq 0$

D. $b < 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】根据一次项系数的符号确定直线经过的象限，再结合已知经过的象限判断直线与 y 轴的交点位置，即可得到 b 的取值范围.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = 3x + b$ 的一次项系数为 $3 > 0$,

$\therefore$ 该一次函数图像一定经过第一、三象限,

$\because$ 该函数图像还经过第四象限,

$\therefore$ 函数图像与 y 轴相交于 y 轴负半轴,

当 $x = 0$ 时, $y = b$, 交点坐标为 $(0, b)$,

$\therefore b < 0$.

16. 下列关于 x 的方程有实数解的是 ()

A. $\frac{x-2}{x^2-5x-6} = 0$

B. $\sqrt{x^2-2} + 1 = 0$

C. $\sqrt{3-x} = x-4$

D. $(a^2+1)x^2+1=0$ (a 为实数).

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式方程的定义，二次根式和平方的非负性等初中知识点，逐一判断各选项即可.

【详解】解：A、 $\because$ 分式 $\frac{x-2}{x^2-5x-6} = 0$ 成立需分子为 0 且分母不为 0,

令 $x-2=0$ 得 $x=2$, 代入分母得 $2^2-5 \times 2-6=-12 \neq 0$, 满足条件,

$\therefore$ 方程存在实数解 $x=2$, 符合题意;

B、 $\because \sqrt{x^2-2} \geq 0$,

$\therefore \sqrt{x^2-2} + 1 \geq 1 > 0$, 不可能等于 0, 方程无实数解, 不符合题意;

C、由根式有意义得 $3-x \geq 0$, 即 $x \leq 3$,

此时 $x-4 \leq -1 < 0$,

而左边 $\sqrt{3-x} \geq 0$, 非负数不可能等于负数,

$\therefore$ 方程无实数解, 不符合题意;

D、 $\because a$ 是实数,

$\therefore a^2+1 \geq 1 > 0$,

又 $x^2 \geq 0$,

$\therefore (a^2+1)x^2+1 \geq 1 > 0$, 不可能等于 0, 方程无实数解.

17. 用换元法解分式方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是 ()

A. $y^2 + y - 3 = 0$

B. $y^2 - 3y + 1 = 0$

C. $y - \frac{3}{y} + 1 = 0$

D. $3y^2 - y - 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查换元法解分式方程, 将换元后的代数式代入原方程, 去分母整理即可得到整式方程.

【详解】解: $\because$ 设 $\frac{x-1}{x} = y$

$\therefore \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{y}$, 将其代入原方程得:

$$y - \frac{3}{y} + 1 = 0$$

方程两边同乘 y ($y \neq 0$) 消去分母得:

$$y^2 - 3 + y = 0$$

整理得: $y^2 + y - 3 = 0$

18. 已知下列四个命题: ① 一组对边平行且相等的四边形; ② 两组对角分别相等的四边形; ③ 对角线相等的四边形; ④ 对角线互相平分的四边形. 其中能判断是平行四边形的命题个数为 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】平行四边形的判定方法: ① 两组对边分别平行的四边形; ② 两组对角分别相等的四边形; ③ 两组对边分别相等的四边形; ④ 一组对边平行且相等的四边形; ⑤ 对角线互相平分的四边形.

【详解】解: 根据平行四边形的判定方法, 知 ①、②、④ 正确; ③ 错误.

故选 C.

【点睛】本题考查的是平行四边形的判定定理, 比较简单.

三、解方程 (组): (第 19、20、23 题每题 5 分, 第 21、22 题每题 6 分, 共 27 分)

19. 解方程: $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$.

【答案】 -1.

【解析】

【详解】 试题分析: 去分母, 把分式方程化为整式方程. 注意要验根.

试题解析: 去分母, 得 $x+2-4=x^2-4$, 移项、整理得 $x^2-x-2=0$, 经检验: $x_1=2$ 是增根, 舍去; $x_2=-1$ 是原方程的根, 所以, 原方程的根是 $x=-1$.

考点: 解分式方程.

20. 解方程: $1+\sqrt{4x+1}=2x$

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 方程整理后, 两边平方转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到无理方程的解.

【详解】 解: 方程整理得: $\sqrt{4x+1}=2x-1$,

两边平方得: $4x+1=(2x-1)^2$, 即 $4x^2-8x=0$,

分解因式得: $4x(x-2)=0$,

解得: $x=0$ 或 $x=2$,

经检验 $x=0$ 是增根, 无理方程的解为 $x=2$.

【点睛】 此题考查了无理方程, 利用了转化的思想, 解无理方程注意要验根.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x+3y=1 \\ x^2+xy-6y^2=3 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=\frac{11}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$$
.

【解析】

【分析】 利用代入消元法解方程组即可得.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x+3y=1 \text{ ①} \\ x^2+xy-6y^2=3 \text{ ②} \end{cases}$$
,

由①得: $x = 1 - 3y$,

将 $x = 1 - 3y$ 代入②得: $(1 - 3y)^2 + y(1 - 3y) - 6y^2 = 3$,

整理得: $1 - 6y + 9y^2 + y - 3y^2 - 6y^2 = 3$, 即 $1 - 6y + y = 3$,

解得 $y = -\frac{2}{5}$,

将 $y = -\frac{2}{5}$ 代入①得: $x - \frac{6}{5} = 1$,

解得 $x = \frac{11}{5}$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了利用代入消元法解方程组, 熟练掌握代入消元法是解题关键.

22. 解方程组: $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \\ x^2 + 2xy = 15 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 把原方程组分解因式, 即可化为两个新的方程组, 即可求解.

【详解】 解: $\therefore \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \text{ ①} \\ x^2 + 2xy = 15 \text{ ②} \end{cases}$,

$\therefore$ 由①得, $(x + 2y)^2 = 9$,

$\therefore x + 2y = \pm 3$;

由②得, $x(x + 2y) = 15$,

$\therefore$ 可得方程组 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x(x + 2y) = 15 \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ x(x + 2y) = 15 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$,

故原方程组的解为 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$.

23. 解关于 x 的方程: $ax^2 + 3 = 1 (a \neq 0)$.

【答案】当 $a < 0$ 时, 方程的解为 $x_1 = -\frac{\sqrt{-2a}}{a}$, $x_2 = \frac{\sqrt{-2a}}{a}$; 当 $a > 0$ 时, 方程无实数根

【解析】

【分析】根据解方程的步骤求解, 注意求解时, 要分 $a < 0$ 或 $a > 0$ 两种情况讨论即可.

【详解】解: $\because ax^2 + 3 = 1 (a \neq 0)$,

$$\therefore ax^2 = -2,$$

$$\therefore x^2 = -\frac{2}{a},$$

$$\therefore \text{当 } a < 0 \text{ 时, } x = \pm \sqrt{-\frac{2}{a}},$$

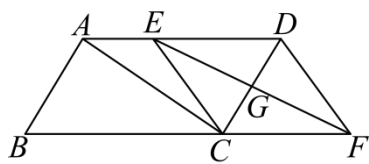
$$\therefore x_1 = -\frac{\sqrt{-2a}}{a}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{-2a}}{a};$$

当 $a > 0$ 时, 方程无实数根,

综上, 当 $a < 0$ 时, 方程的解为 $x_1 = -\frac{\sqrt{-2a}}{a}$, $x_2 = \frac{\sqrt{-2a}}{a}$; 当 $a > 0$ 时, 方程无实数根.

四、解答题: (每题 11 分, 共 33 分)

24. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AD 上的一个动点, 点 G 是边 CD 的中点, EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F , 连接 CE, DF .



(1) 求证: 四边形 $CFDE$ 是平行四边形

(2) 若 $BC = 2AB$, $\angle B = 60^\circ$

①当 $\frac{AE}{DE}$ 的值是_____时, 四边形 $CFDE$ 是矩形 (直接写出答案);

②当 $\frac{AE}{DE}$ 的值是_____时, 四边形 $CFDE$ 是菱形, 并说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) ①3, ②1, 见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $CF = DE$ 即可得证;

(2) ①根据矩形的判定求解即可;

②根据菱形的判定解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because \square ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle FCD,$$

$\because$ 点 G 是边 CD 的中点,

$$\therefore DG = CG,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle EDC = \angle FCD \\ DG = CG \\ \angle DGE = \angle CGF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DGE \cong \triangle CGF \text{ (ASA)}$$

$$\therefore DE = CF,$$

$$\therefore DE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\because \square ABCD$, $BC = 2AB$, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore AD = BC, AB = CD, \angle B = \angle ADC = 60^\circ,$$

$\because$ 点 G 是边 CD 的中点,

$$\therefore DG = CG,$$

设 $DG = CG = x$,

$$\therefore AD = BC = 4x, AB = CD = 2x;$$

① $\because$ 四边形 $CFDE$ 是矩形,

$$\therefore DG = CG = EG = GF = x,$$

$\therefore \triangle DGE$ 是等边三角形,

$$\therefore DE = DG = CG = EG = GF = x,$$

$$\therefore AE = AD - DE = 3x,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{3x}{x} = 3,$$

故当 $\frac{AE}{DE}$ 的值是 3 时, 四边形 $CFDE$ 是矩形;

②解: $\because$ 四边形 $CFDE$ 是菱形,

$$\therefore DE = EC,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ$$

$\therefore \triangle DCE$ 是等边三角形,

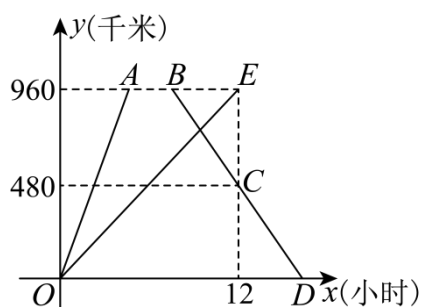
$$\therefore DE = EC = CD = 2x,$$

$$\therefore AE = AD - DE = 2x,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{2x}{2x} = 1,$$

故当 $\frac{AE}{DE}$ 的值是 1 时, 四边形 $CFDE$ 是菱形.

25. 一列快车和一列慢车同时从甲地出发, 分别匀速驶向乙地, 快车到达乙地后停留了 2 小时, 然后以比原来速度慢 40 千米/小时的速度沿原路返回甲地, 设慢车离开甲地的时间为 x (小时), y_1 (千米)、 y_2 (千米) 分别表示慢车、快车离甲地的距离. 图中线段 OE 与折线 $O-A-B-D$ 分别表示 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数关系. 根据图像进行以下探究:



- (1) 甲、乙两地之间的距离是_____千米;
- (2) 慢车的速度是_____千米/小时;
- (3) 求快车从甲地到乙地的速度; (写出解答过程)
- (4) 慢车出发_____小时, 两车相距 400 千米?

【答案】 (1) 960 千米

(2) 80

(3) 160

(4) 5 或 7 或 11.6

【解析】

【分析】 (1) 根据图象回答即可;

(2) 根据速度 = 路程 $\div$ 时间计算即可;

(3) 根据快车返回时速度相同列方程求解即可;

(4) 分类讨论：快车去乙地时、快车停留时、快车返回时；

【小问 1 详解】

从图象中 A 、 B 、 E 点的纵坐标可以看出，两地相距 960 千米；

【小问 2 详解】

由图可知：慢车 12 小时行驶了 960 千米，

$\therefore$ 慢车的速度是： $960 \div 12 = 80$ 千米/小时；

【小问 3 详解】

设快车从甲地到乙地的速度为 v 千米/小时，从图象可知，

快车到达乙地的时间为 $\frac{960}{v}$ 小时，

$\therefore$ 点 A 的横坐标为 $\frac{960}{v}$ ，

$\because$ 快车在乙地停留 2 小时，

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 $\frac{960}{v} + 2$ ，

$\because$ 返回时速度比原来速度慢 40 千米/小时，

$\therefore$ 返回时速度为 $(v - 40)$ 千米/小时，

由图可知：点 C 的纵坐标为 480，此时快车在返途中，也行驶了 480 千米，

快车由乙地返回到 480 千米时的所用时间为： $12 - \left(\frac{960}{v} + 2 \right) = \left(10 - \frac{960}{v} \right)$ 小时，

根据返回速度列方程： $v - 40 = \frac{480}{10 - \frac{960}{v}}$ ，

整理得： $v^2 - 184v + 3840 = 0$ ，

$(v - 160)(v - 24) = 0$ ，

$\therefore v = 160$ 或 $v = 24$ （舍去），

当 $v = 160$ 时，返回速度为 $160 - 40 = 120$ 千米/小时，点 B 横坐标为 $\frac{960}{160} + 2 = 8$ ，返回时间为 $12 - 8 = 4$ 小时，

$120 \times 4 = 480$ 千米，符合题意；

$\therefore$ 快车从甲地到乙地的速度为 160 千米/小时；

【小问 4 详解】

由 (3) 可得，快车从甲地到达乙地时， $x = 960 \div 160 = 6$ 小时，

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 6$ 时，

快车路程 $y_2 = 160x$ ，慢车路程 $y_1 = 80x$ ，

$$\therefore 160x - 80x = 400,$$

解得： $x = 5$ ；

当快车停留时，即 $6 < x \leq 8$ 时，

快车路程 $y_2 = 960$ ，慢车路程 $y_1 = 80x$ ，

$$\therefore 960 - 80x = 400,$$

解得： $x = 7$ ；

当快车返回时，由题可得，返回总时间为 $\frac{960}{120} + 8 = 16$ 小时，

$\therefore$ 当 $8 < x \leq 16$ 时，设 BD 直线解析式为 $y_2 = kx + b$ ，

$\therefore$ 点 $(8, 960)$ ， $C(12, 480)$ 在函数图象上，

$$\therefore \begin{cases} 960 = 8k + b \\ 480 = 12k + b \end{cases},$$

解得： $k = -120$ ， $b = 1920$ ，

$$\therefore y_2 = -120x + 1920,$$

$$\therefore |-120x + 1920 - 80x| = 400,$$

$$\therefore |1920 - 200x| = 400,$$

$$\therefore 1920 - 200x = 400 \text{ 或 } 1920 - 200x = -400,$$

$$\therefore x = 7.6 \text{ 或 } x = 11.6,$$

$\therefore x = 7.6 < 8$ (舍去)，

$$\therefore x = 11.6;$$

$\therefore$ 满足条件的 x 的值为 5 或 7 或 11.6.

26. 已知：在矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $BC=12$ ，四边形 $EFGH$ 的三个顶点 E 、 F 、 H 分别在矩形 $ABCD$ 的边 AB 、 BC 、 DA 上， $AE=2$

(1) 如图 1，当四边形 $EFGH$ 为正方形时，求 $\triangle GFC$ 的面积

(2) 如图 2，当四边形 $EFGH$ 为菱形时，设 $BF=x$ ， $\triangle GFC$ 的面积为 s ，求 s 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域

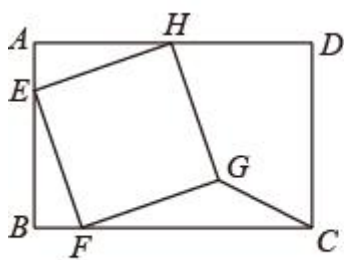


图1

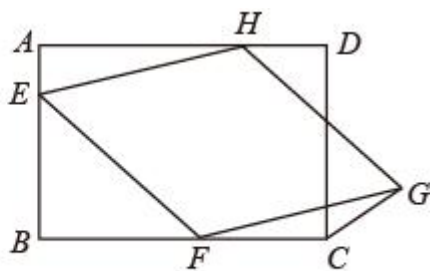


图2

【答案】(1) 10; (2) $S=12-x$ ($0 \leq x \leq 4\sqrt{7}$)

【解析】

【分析】(1) 过点 G 作 $GM \perp BC$ 于 M , 可以证明 $\triangle MFG \cong \triangle BEF$, 就可以求出 GM 的长, 进而就可以求出 FC , 求出面积;

(2) 证明 $\triangle AHE \cong \triangle MFG$, 得到 GM 的长, 根据三角形的面积公式就可以求出面积

【详解】解: (1) 如图 1, 过点 G 作 $GM \perp BC$ 于 M

在正方形 $EFGH$ 中, $\angle HEF = 90^\circ$, $EH = EF$

$$\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ$$

$$\because \angle AEH + \angle AHE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AHE = \angle BEF$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AHE \cong \triangle BEF (SAS)$$

同理可证: $\triangle MFG \cong \triangle BEF$

$$\therefore GM = BF = AE = 2$$

$$\therefore FC = BC - BF = 10$$

$$\text{则 } S_{\triangle GFC} = \frac{1}{2} FC \cdot GM = 10$$

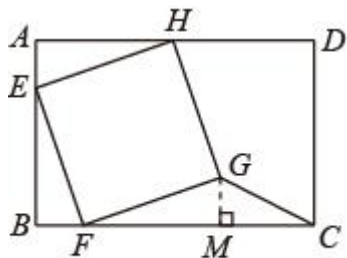


图1

(2) 如图 2, 过点 G 作 $GM \perp BC$ 于 M , 连接 HF

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle AHF = \angle MFH$$

$$\therefore EH \parallel FG$$

$$\therefore \angle EHF = \angle GFH$$

$$\therefore \angle AHE = \angle MFG$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle GMF = 90^\circ, EH = GF$$

$$\therefore \triangle AHE \cong \triangle MFG$$

$$\therefore GM = AE = 2$$

$$\therefore BF = x$$

$$\therefore FC = BC - BF = 12 - x$$

$$\therefore S_{\triangle GFC} = \frac{1}{2} FC \cdot GM = 12 - x$$

$$\text{即 } s = 12 - x$$

$$\therefore EH^2 = AH^2 + AE^2, EF^2 = BE^2 + BF^2, EF = EH$$

$$\therefore AH^2 + AE^2 = BE^2 + BF^2$$

$$\therefore AH^2 = 6^2 + x^2 - 2^2 = x^2 + 32$$

$$\therefore H \text{ 在 } AD \text{ 上}$$

$$\therefore AH \leq AD$$

$$\therefore x^2 + 32 \leq 12^2 = 144$$

$$\text{解得 } -4\sqrt{7} \leq x \leq 4\sqrt{7}$$

$$\therefore F \text{ 在 } BC \text{ 上}$$

$$\therefore BF \geq 0 \text{ 即 } x \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4\sqrt{7}$$

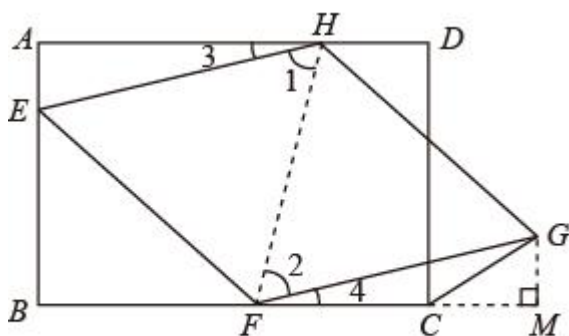


图2

【点睛】此题考查全等三角形的判定与性质、菱形的性质、正方形的性质，解题关键在于做辅助线和利用全等三角形的性质.