

2025 学年第二学期八年级数学期中试卷

(满分: 100 分, 时间: 90 分钟)

一、选择题 ($3' \times 6 = 18'$)

1. 内角和与外角和相等的多边形是 ()

- A. 六边形 B. 五边形 C. 四边形 D. 三角形

【答案】C

【解析】

【分析】设这个多边形为 n 边形, 根据题意列出方程, 解方程即可求解.

【详解】解: 设这个多边形为 n 边形, 由题意得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

解得 $n=4$,

所以这个多边形是四边形.

故选: C

【点睛】本题考查多边形的内角和公式, 多边形的外角和 360° , 熟知两个定理是解题关键.

2. 点 P 的坐标为 (a, b) , 若 $a > 0$, $b < 0$, 则点 P 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据平面直角坐标系内第四象限的符号特征 $(+, -)$, 即可得出答案

【详解】解: $\because a > 0, b < 0$,

$\therefore$ 点 $P(a, b)$ 位于第四象限.

3. 将点 $M(-3, 2)$ 先向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 4 个单位长度后到达点 N , 那么点 N 的坐标是 ()

- A. $(-3, -2)$ B. $(0, -2)$ C. $(0, 2)$ D. $(-6, -2)$

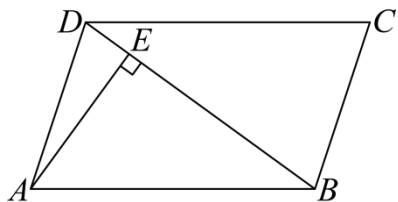
【答案】D

【解析】

【分析】根据将点向左平移 3 个单位, 即横坐标减去 3, 再根据将点向下平移 4 个单位, 即纵坐标减去 4, 可得答案.

【详解】解：将点 $M(-3,2)$ 向左平移 3 个单位长度可得点的坐标为 $(-3-3,2)$ ，即 $(-6,2)$ ，再将点 $(-6,2)$ 向下平移 4 个单位长度得到点 $N(-6,2-4)$ ，即 $N(-6,-2)$ 。

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $BD = CD$ ， $\angle C = 70^\circ$ ， $AE \perp BD$ 于点 E ，则 $\angle DAE$ 的度数为（ ）



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，平行线的性质，等腰三角形的性质，直角三角形两锐角互余，由等腰三角形的性质可得 $\angle DBC = \angle C = 70^\circ$ ，由平行四边形可得 $AD \parallel BC$ ，进而得到 $\angle ADE = \angle DBC = 70^\circ$ ，再根据直角三角形两锐角互余可得 $\angle DAE = 20^\circ$ ，掌握平行四边形的性质是解题的关键。

【详解】解： $\because BD = CD$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBC = \angle C = 70^\circ$ ，
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
 $\therefore AD \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle ADE = \angle DBC = 70^\circ$ ，
 $\because AE \perp BD$ ，
 $\therefore \angle AED = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAE = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ ，

故选：A。

5. 顺次连接对角线互相垂直且相等的四边形各边中点所围成的四边形是（ ）

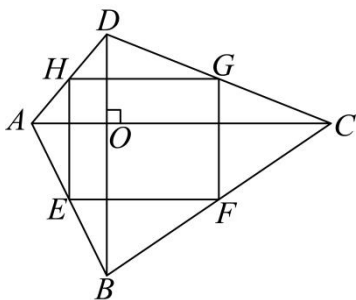
- A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是三角形中位线定理以及正方形的判定。根据三角形中位线定理得到所得四边形的对边都平行且相等，那么其为平行四边形，再根据邻边互相垂直且相等，可得四边形是正方形。

【详解】解：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AC = BD, AC \perp BD$ ， $E、F、G、H$ 分别是 $AB、BC、CD、AD$ 的中点，



由三角形中位线定理可得， $EF \parallel AC \parallel GH$ ， $EH \parallel GF \parallel BD$ ， $EH = FG = \frac{1}{2}BD$ ， $GH = EF = \frac{1}{2}AC$ ，

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

∵ $AC = BD, AC \perp BD$ ，

∴ $EF = FG, EF \perp FG$ ，

∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

故选：C.

6. 在四边形 $ABCD$ 中， $AC、BD$ 相交于点 O ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $BO = DO$ ，那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是（ ）.

A. $\angle ABC = 90^\circ$

B. $AO = OC$

C. $AB \parallel CD$

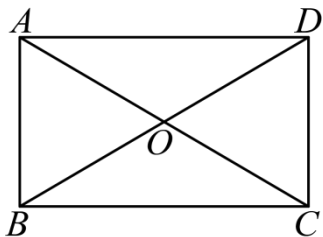
D. $AB = CD$

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形的判定定理：有一个角是直角的平行四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形分别进行分析即可.

【详解】解：如图



A、∵ $\angle BAD = 90^\circ$ ， $BO = DO$ ，

∴ $OA = OB = OD$ ，

∴ $\angle OAB = \angle OBA$ ，

$\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAD - \angle OAB = \angle ABC - \angle OBA$, 即 $\angle OAD = \angle OBC$,
 $\because \angle AOD = \angle BOC$,
 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC (A, S, A)$,
 $\therefore OD = OC$,
 $\therefore AO = OB = OD = OC$,

即对角线平分且相等,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, 正确, 不符合题意;

B、 $\because AO = OC$, $BO = DO$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形, 该选项不符合题意;

C、 $\because AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\because BO = DO$,

$\therefore OA = OB = OD$,

$\therefore \angle DAO = \angle ADO$,

$\therefore \angle BAO = \angle ODC$,

$\because \angle AOB = \angle DOC$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC (ASA)$,

$\therefore AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \square ABCD$ 是矩形, 正确, 不符合题意;

D、 $\because \angle BAD = 90^\circ$, $BO = DO$, $AB = CD$,

无法得出 $\triangle ABO \cong \triangle DCO$,

故无法得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

进而无法得出四边形 $ABCD$ 是矩形, 错误, 符合题意;

二、填空题 ($3' \times 12 = 36'$)

7. 六边形的外角和是_____度.

【答案】

360

【解析】

【详解】解：根据多边形外角和定理可知，任意多边形的外角和都为 360° ，

$\therefore$ 六边形的外角和是 360 度.

8. 若点 $P(m+3, 2m)$ 在 x 轴上，则 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】根据 x 轴上点的坐标特征， x 轴上点的纵坐标为 0，据此列一元一次方程求解即可.

【详解】解： $\because x$ 轴上的点的纵坐标为 0，点 $P(m+3, 2m)$ 在 x 轴上.

$$\therefore 2m = 0$$

解得 $m = 0$.

9. 在平面直角坐标系内有两点 $E(\sqrt{3}, -2)$ 、 $F(2\sqrt{3}, 2)$ ，则线段 $EF =$ _____.

【答案】 $\sqrt{19}$

【解析】

【详解】解： $\because E(\sqrt{3}, -2)$ 、 $F(2\sqrt{3}, 2)$ ，

$$\therefore EF = \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}.$$

10. 在 $\square ABCD$ 中， $AB = 5\text{cm}$ ， $BC = 6\text{cm}$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 的周长是_____ cm .

【答案】 22

【解析】

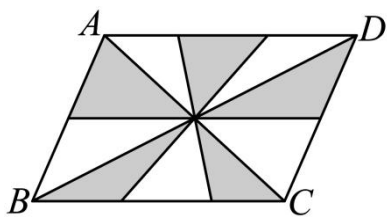
【分析】本题考查平行四边形的性质，掌握平行四边形对边相等的性质是解题的关键，由平行四边形对边相等得到四条边的长度，再计算周长即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore CD = AB = 5\text{cm}, AD = BC = 6\text{cm},$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长为 } AB + BC + CD + AD = 5 + 6 + 5 + 6 = 22(\text{cm}).$$

11. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的面积是 24，图中分割线均经过对角线 AC 、 BD 的交点，那么阴影部分的面积为_____.

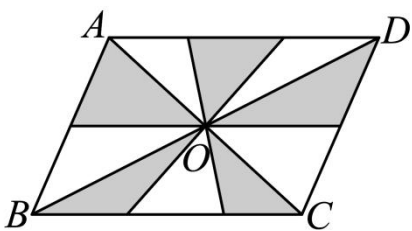


【答案】 12

【解析】

【分析】 根据平行四边形是中心对称图形，对角线交点为对称中心，过对称中心的直线将图形分成面积相等的两部分，利用中心对称性质可知阴影部分面积等于平行四边形面积的一半.

【详解】 解：设平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O .

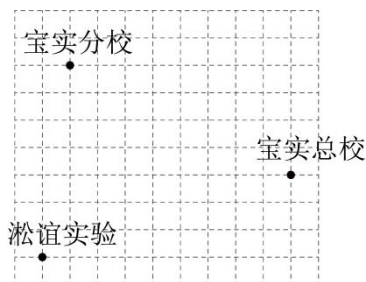


因为平行四边形是中心对称图形，对称中心是对角线的交点 O . 又因为图中分割线均经过点 O , 所以根据中心对称的性质，阴影部分与空白部分关于点 O 对称，即阴影部分的面积等于空白部分的面积. 所以阴影部分的面积等于平行四边形 $ABCD$ 面积的一半.

因为平行四边形 $ABCD$ 的面积是 24,

所以阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} \times 24 = 12$.

12. 如图，地图上标注了宝实分校附近学校的位置，若标记宝实分校的坐标为 $(-3, 4)$ ，宝实总校的坐标为 $(5, 0)$ ，淞谊实验学校的位置恰好在格点上，则其坐标为_____.

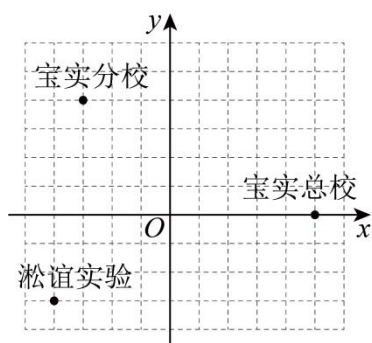


【答案】 $(-4, -3)$

【解析】

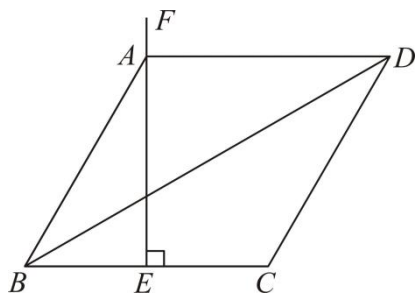
【分析】 先确定原点的位置，画出直角坐标系，即可得出结果.

【详解】 解：由题意，建立直角坐标系如下：



由图可知，淞谊实验学校的坐标为 $(-4, -3)$ 。

13. 如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 16cm ， BC 的垂直平分线 EF 经过点 A ，则对角线 BD 长为_____ cm 。



【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用菱形的性质和线段垂直平分线的性质求解即可。

【详解】 解：连接 AC 与 BD 相交于 O ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 16cm ，

$\therefore AB=BC=4\text{cm}$ ， $AC \perp BD$ ， $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

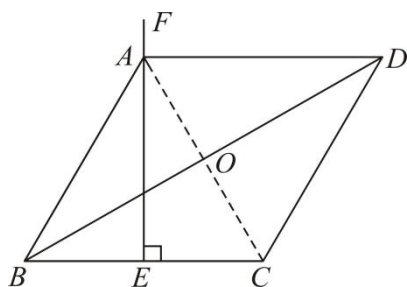
$\because BC$ 的垂直平分线 EF 经过点 A ，

$\therefore AC=AB=4\text{cm}$ ， $\therefore OA=\frac{1}{2}AC=2\text{cm}$ ，

$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=2\sqrt{3}\text{cm}$ ，

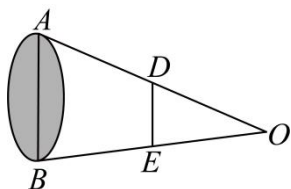
$\therefore BD=2OB=4\sqrt{3}\text{cm}$ 。

故答案为 $4\sqrt{3}$ 。



【点睛】 本题考查菱形的性质、线段垂直平分线的性质、勾股定理，熟练掌握菱形的性质和线段垂直平分线的性质是解答的关键.

14. 如图，是一座塔的俯视图，现要测量塔基两侧 A 、 B 之间的距离，因无法直接测量，于是在塔前广场上选一点 O ，找到 OA 和 OB 之间的中点 D 、 E ，测得 DE 的长为 6 米，则塔基两侧 A 、 B 之间的距离为_____米.



【答案】 12

【解析】

【分析】 根据题意可知点 D 、 E 分别是 OA 、 OB 的中点，利用三角形中位线定理可得 $AB = 2DE$ ，代入数据计算即可.

【详解】 解： $\because$ 点 D 是 OA 的中点，点 E 是 OB 的中点，

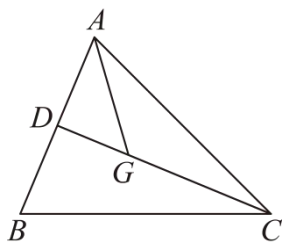
$\therefore DE$ 是 $\triangle OAB$ 的中位线.

$\therefore AB = 2DE$.

$\because DE = 6$ 米，

$\therefore AB = 2 \times 6 = 12$ 米.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 为重心，延长 CG 交 AB 于点 D ，若 CD 平分 $\angle ACB$ ， $AC = 13$ ， $AB = 10$ ，则 CG 的长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 根据重心的定义得出 CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，过点 D 作 $DM \perp BC$ ， $DN \perp AC$ ，结合 CD 平分 $\angle ACB$ ，利用全等证得 $AC = BC$ ，用等腰三角形“三线合一”的性质判定 $CD \perp AB$ ，利用勾股定理求出 CD 的长，最后根据重心的性质求出 CG 的长.

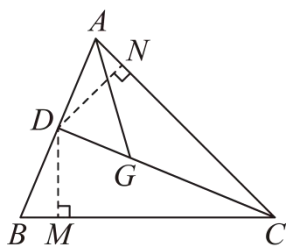
【详解】 解： $\because$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，延长 CG 交 AB 于点 D ，

$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

过点 D 作 $DM \perp BC$, $DN \perp AC$,



$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore DM = DN,$$

$\because AD = BD$,

$$\therefore Rt\triangle ADN \cong Rt\triangle BDM (HL),$$

$$\therefore \angle NAD = \angle MBD,$$

$$\therefore AC = BC,$$

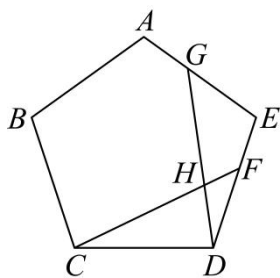
$$\therefore CD \perp AB,$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中, 由勾股定理得 $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$,

$\because$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore CG = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} \times 12 = 8.$$

16. 如图, 在每个内角都相等且每条边都相等的五边形 $ABCDE$ 中, 点 F 、 G 在边 DE 、 AE 上, 且 $AG = EF$, 则 $\angle CHG =$ _____ 度.



【答案】

108

【解析】

【分析】根据正五边形的性质可知每个内角的度数是 108° , 可证 $\triangle GDE \cong \triangle FCD$, 根据全等三角形的性质可得 $\angle GDE + \angle CFD = 72^\circ$, 根据三角形内角和定理可知 $\angle FHD = 108^\circ$, 根据对顶角相等可得

$$\angle CHG = 108^\circ.$$

【详解】解：∵五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$$\therefore AB = BC = CD = DE = AE, \quad \angle E = \angle CDF = 180^\circ - \frac{1}{5} \times 360^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore AG = EF,$$

$$\therefore GE = DF,$$

在 $\triangle GDE$ 和 $\triangle FCD$ 中，

$$\begin{cases} GE = FD \\ \angle E = \angle FDC, \\ DE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GDE \cong \triangle FCD,$$

$$\therefore \angle GDE = \angle FCD, \quad \angle DFC = \angle EGD,$$

在 $\triangle GDE$ 中， $\angle E = 108^\circ$ ，

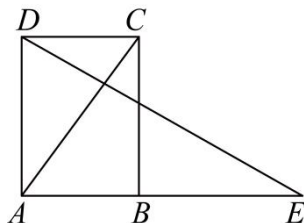
$$\therefore \angle GDE + \angle EGD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle GDE + \angle CFD = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle FHD = 180^\circ - (\angle GDE + \angle CFD) = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle CHG = 108^\circ.$$

17. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $\angle DAC = 40^\circ$ ，延长 AB 至点 E ，使 $BE = AC$ ，那么 $\angle E =$ _____.

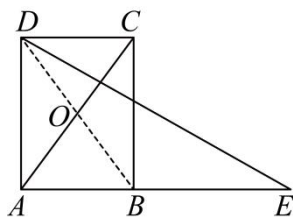


【答案】 25° ## 25 度

【解析】

【分析】连接 BD ，交 AC 于点 O ，由矩形的性质得出 $\angle DAB = 90^\circ$ ， $AC = BD$ ， $OA = OB$ ，由等边对等角得出 $\angle ABO = \angle OAB = 50^\circ$ ，由平角的定义得出 $\angle DBE = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ ，再得出 $BD = BE$ ，最后根据等边对等角以及三角形内角和定理即可求出 $\angle E$ 。

【详解】解：连接 BD ，交 AC 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ, \quad AC = BD,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC, \quad OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\because \angle DAC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle OAB = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ,$$

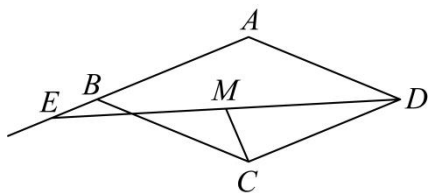
$$\because BE = AC,$$

$$\therefore BD = BE,$$

$$\therefore \angle E = \angle BDE,$$

$$\therefore \angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ.$$

18. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AD = 4$, $\angle A = 135^\circ$, 点 E 在射线 AB 上运动, 点 M 是线段 DE 的中点, 则线段 CM 的最小值是_____.

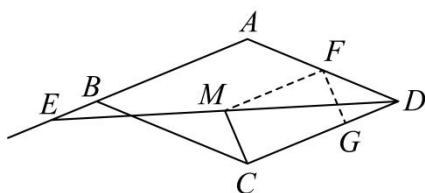


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】取 AD 的中点 F , 连接 MF , 根据三角形中位线定理可得 $MF \parallel AB$, 结合菱形性质可得 $MF \parallel CD$, 从而确定点 M 的运动轨迹为过点 F 且平行于 CD 的射线, 当 $CM \perp MF$ 时, CM 取得最小值, 此时 CM 的长度等于点 F 到 CD 的距离, 通过解直角三角形即可求解.

【详解】解: 取 AD 的中点 F , 连接 MF



∵ 点 M 是线段 DE 的中点，点 F 是 AD 的中点

∴ MF 是 ADE 的中位线

∴ $MF \parallel AB$

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形

∴ $AB \parallel CD$, $AD = CD = 4$, $\angle A + \angle ADC = 180^\circ$

∴ $MF \parallel CD$

∵ 点 E 在射线 AB 上运动

∴ 点 M 在过点 F 且平行于 CD 的射线上运动当 $CM \perp MF$ 时，线段 CM 的值最小，此时 CM 的长度等于平行线 MF 与 CD 之间的距离过点 F 作 $FG \perp CD$ 于点 G

∵ $\angle A = 135^\circ$

∴ $\angle ADC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

∵ 点 F 是 AD 的中点， $AD = 4$

∴ $DF = \frac{1}{2}AD = 2$

在 $Rt\triangle FGD$ 中， $\angle FGD = 90^\circ$, $\angle FDG = 45^\circ$

∴ $FG = \frac{\sqrt{2}}{2}DF = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

∴ 线段 CM 的最小值是 $\sqrt{2}$.

三、解答题 (6+6+6+8+8+12=46')

19. 如果一个多边形的内角和是四边形内角和的 5 倍，那么这个多边形的边数是多少？

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查多边形内角和的计算，解题思路是先明确四边形的内角和，再根据多边形内角和公式结合题目给出的倍数关系列方程求解.

【详解】 解：设这个多边形的边数为 n 四边形内角和为 $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$

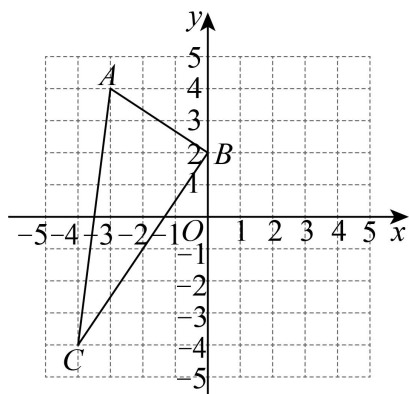
根据题意列方程得 $(n-2) \cdot 180^\circ = 5 \times 360^\circ$

等式两边同时除以 180° 得 $n - 2 = 10$

解得 $n = 12$

答：这个多边形的边数是 12.

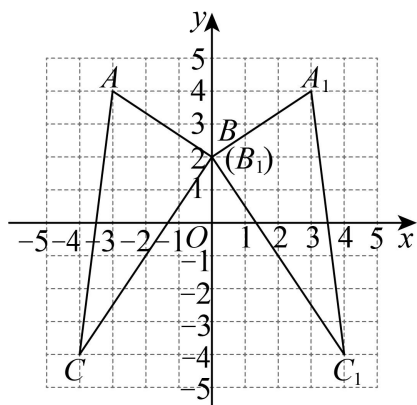
20. 在由边长为1个单位长度的小正方形组成的网格中，建立如图平面直角坐标系，原点 O 及 ABC 的顶点都在格点上.



- (1) 直接写出 A 、 B 、 C 的坐标；
- (2) 请画出 ABC 关于 y 轴的对称图形；
- (3) 求 ABC 的面积.

【答案】 (1) $A(-3, 4)$, $B(0, 2)$, $C(-4, -4)$

(2) 解：如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求作：



(3) 13

【解析】

【分析】 (1) 根据平面直角坐标系中格点的位置，直接读取各点的横纵坐标即可；

(2) 先求出 $\triangle ABC$ 三个顶点关于 y 轴的对称点坐标（纵坐标不变，横坐标互为相反数），再在网格中描点并依次连接，即可得到对称图形；

(3) 采用割补法，用包围 $\triangle ABC$ 的最小矩形面积，减去矩形内三个多余直角三角形的面积，即可求出 $\triangle ABC$ 的面积.

【小问 1 详解】

解: $A(-3,4)$, $B(0,2)$, $C(-4,-4)$;

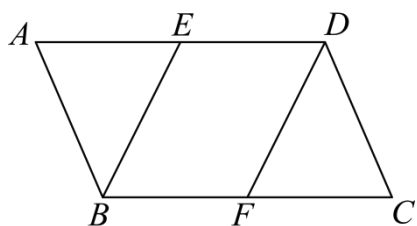
【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

解: $S_{\triangle ABC} = 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times 1 \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 13$.

21. 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 、 F 是边 AD 和 BC 的中点, 连接 BE 、 DF .



(1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

(2) 连接 BD , 若 BD 平分 $\angle EBF$, 求证: 四边形 $BFDE$ 是菱形.

【答案】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$.

$\because$ 点 E , F 分别是 AD , BC 的中点,

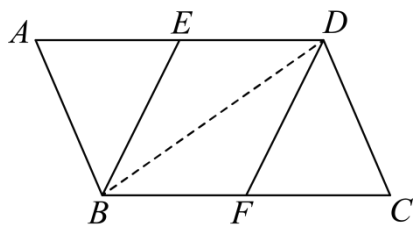
$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD$, $BF = CF = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore DE = BF$.

又 $\because DE \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

(2) 证明: 连接 BD ,



$\because BD$ 平分 $\angle EBF$,

$\therefore \angle EBD = \angle FBD$,

$\because$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

$\therefore ED \parallel BF$,

$$\therefore \angle EDB = \angle FBD,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB,$$

$$\therefore EB = ED,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是菱形.

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质和中点的性质可得 $DE = BF$ ，即可得结论；

(2) 根据 BD 平分 $\angle EBF$ ，得出 $\angle EBD = \angle FBD$ ，根据平行线的性质可得 $\angle EDB = \angle FBD$ ，即可得出 $\angle EBD = \angle EDB$ ，根据等角对等边可得 $EB = ED$ ，即可得证.

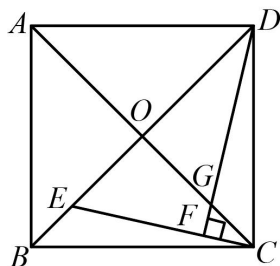
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

22. 在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，在 OB 上有一点 E ，若 $DF \perp CE$ ，交 OC 于点 G .



(1) 求证: $\triangle DOG \cong \triangle COE$;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的面积为 18, $OE = 2BE$, 求 DG 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据正方形的性质可得 $OD = OC$ ， $\angle DOG = \angle COE = 90^\circ$ ，结合已知可得 $\angle OEC = 90^\circ - \angle ODG = \angle OGD$ ，即可证明 $\triangle DOG \cong \triangle COE$ (AAS)；

(2) 根据正方形的性质以及勾股定理求得 $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 3$ ，根据 $OE = 2BE$ ，得出 $OE = 2$ ，进而

勾股定理求得 $EC = \sqrt{13}$ ，再根据全等三角形的性质，即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore OD = OC, \angle DOG = \angle COE = 90^\circ,$$

又 $\because DF \perp CE$,

$$\therefore \angle OEC = 90^\circ - \angle ODG = \angle OGD,$$

$$\therefore \triangle DOG \cong \triangle COE (AAS);$$

【小问 2 详解】

解: 正方形 $ABCD$ 的面积为 18,

$$\therefore BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore OB = OC, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 3,$$

$$\because OB = BE + OE = 3, \quad OE = 2BE,$$

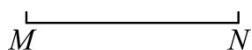
$$\therefore OE = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OEC \text{ 中, } EC = \sqrt{OE^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \triangle DOG \cong \triangle COE,$$

$$\therefore DG = EC = \sqrt{13}.$$

23. 【问题提出】我们已经会用尺规作图画出已知线段的中点, 那么如何用尺规作图画出已知线段 MN 的三等分点呢?



(1) 【知识回顾】

利用三角形重心定理, 可以尺规作图画出任意一个三角形的中线的的一个三等分点. 如图 1, 在 ABC 中,

中线 AD 与 BE 相交于点 G , 则线段_____ $= \frac{1}{3} AD$.

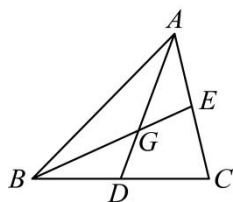


图1

【问题解决】

(2) 方法一: 如图 2, 作法如下.

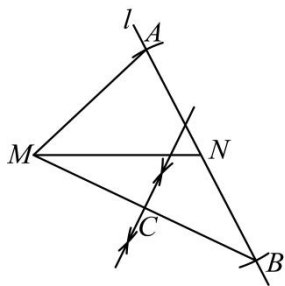


图2

①过线段 MN 的端点 N 画一条直线 l ，以 N 为圆心，任意长为半径画弧交直线 l 于点 A 、 B ，连接 AM 、 BM ；

②以点 B 、 M 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BM$ 的长为半径画弧，相交于两点，交点的连线交 BM 于点 C ；

③连接 AC 交 MN 于点 G ，点 G 即线段 MN 的一个三等分点。……

请根据上述作法在图 2 中作出点 G ，并继续用尺规作图画出线段 MN 的另一个三等分点 H ，不用说明作图过程，需要保留作图痕迹。

(3) 方法二：如图 3，作法如下。

①以线段 MN 为一边作 $\triangle AMN$ ，以 M 、 N 为圆心，以线段 AN 、 AM 的长为半径作弧，两弧在线段 MN 下方交于点 B ，连接 BM 、 BN ；

②作线段 BM 和 BN 的中点 C 、 D ，连接 AC 、 AD 分别交 MN 于点 H 和 G ；所以， H 、 G 即 MN 的三等分点。请根据上述的作法，证明： $MH = HG = NG$ 。

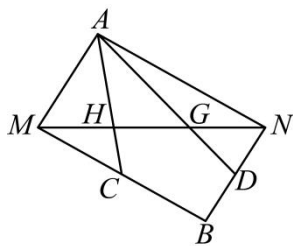
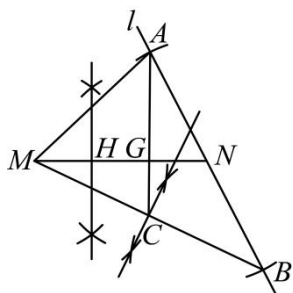


图3

【答案】(1) GD

(2) 如图， G ， H 即为所求三等分点：



(3) 由作图可知， $AM = BN$ ， $AN = BM$ ，四边形 $AMBN$ 是平行四边形，

$\therefore C$ 、 D 是线段 BM 和 BN 的中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}AN,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{2}AM$$

$$\therefore AN \parallel MB,$$

$$\therefore \triangle MCH \sim \triangle NAH,$$

$$\therefore \frac{MH}{HN} = \frac{MC}{AN} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{MH}{MN} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } MH = \frac{1}{3}MN,$$

$$\text{同理可得: } NG = \frac{1}{3}MN,$$

$$\therefore MH = HG = NG.$$

【解析】

【分析】(1) 连接 ED ，根据三角形的中位线定理可得出 $DE \parallel AB$ ， $ED = \frac{1}{2}AB$ ，然后根据相似三角形的判定和性质即可得出结果；

(2) 根据题意作出点 G 即可，由于点 G 是 MN 的三等分点，故再求第二个三等分点只需作 MG 的中点即可；

(3) 由作图可知， $AM = BN$ ， $AN = BM$ ，四边形 $AMBN$ 是平行四边形，再求出 $\triangle MCH \sim \triangle NAH$ ，利用相似三角形的性质可得出结果.

【小问 1 详解】

解： $GD = \frac{1}{3}AD$ ，理由如下：

如图，连接 ED ，由三角形中位线性性质可得出：

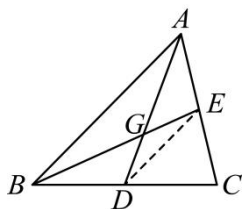


图1

$$ED \parallel AB, \quad ED = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \triangle EDG \sim \triangle BAG,$$

$$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore GD = \frac{1}{3}AD.$$

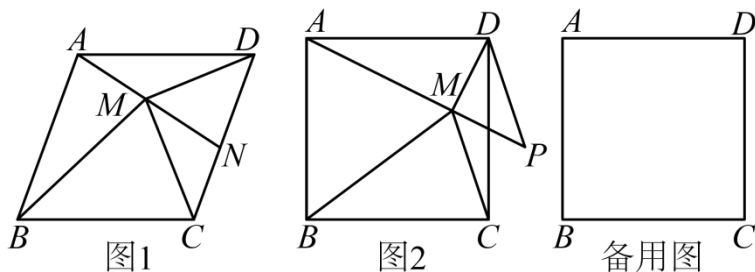
【小问2详解】

取 $>\frac{1}{2}MG$ 长度为半径，以 M, G 为圆心分别做弧，交于 MG 上方和下方各两点，连接两点，交 MG 于 H ， H 即为第二个三等分点。

【小问3详解】

略

24. 在四边形 $ABCD$ 中，边 AB 绕点 B 按顺时针方向旋转，点 A 与点 M 重合，且点 M 在四边形内，连接 AM, CM, DM ，延长 AM 交边 CD 于点 N 。



(1) 如图1，当四边形 $ABCD$ 是菱形时，

①若 $\angle ABC = 70^\circ$ ，则 $\angle CMN = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (直接写出度数)；

②若 $\angle ABC = a$ ，用含 a 的式子表示 $\angle CMN$ ，并说明理由；

(2) 如图2，当四边形 $ABCD$ 是正方形时， $AB = 5$ ，作 $DP \parallel CM$ 交 AM 的延长线于点 P 。当 $\triangle DMP$ 是直角三角形时，求 DP 的长。

【答案】(1) ① 35 ；② $\angle CMN = \frac{a}{2}$ ，理由见解析

(2) $\sqrt{10}$ 或 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) ①根据旋转的性质可得 $BA = BM$ ，根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理分别求得 $\angle AMN, \angle BMC$ ，进而得出 $\angle CMN = \frac{1}{2}\angle ABC$ ，即可求解；

②根据①的方法，即可求解；

(2) 先求得 $\angle DPM = 45^\circ$ ，分两种情况讨论，当 $\angle DMP = 90^\circ$ 时，则 $\triangle PMD$ 是等腰直角三角形，过点 B 作 $BN_1 \perp AP$ 于点 N_1 ，证明 $\triangle ABN_1 \cong \triangle DAM$ (AAS) 得出 $DM = AN_1$ ，设 $DM = AN_1 = x$ ，则 $AM = 2x$ ，在 $Rt\triangle AMD$ 中， $AD^2 = DM^2 + AM^2$ ，根据勾股定理建立方程，解方程，即可求解；当 $\angle MDP = 90^\circ$ 时，

如图，过点 B 作 $BQ \perp MC$ 于点 Q ，同理可得出 $\triangle BCQ \cong \triangle CDM$ ，设 $DM = CQ = y$ ，则 $CM = 2y$ ，在 $\text{Rt}\triangle CMD$ 中，根据勾股定理，即可求解。

【小问 1 详解】

解：① $\because$ 边 AB 绕点 B 按顺时针方向旋转，点 A 与点 M 重合，

$$\therefore BA = BM$$

$$\therefore \angle BMA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABM) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABM$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BA = BC$$

$$\therefore BM = BC$$

$$\therefore \angle BMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBC) = 90^\circ - \angle MBC$$

$$\therefore \angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MBC$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABM + \angle MBC)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\therefore \angle CMN = 180^\circ - \angle AMC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\because \angle ABC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle CMN = \frac{1}{2}\angle ABC = 35^\circ$$

② $\because$ 边 AB 绕点 B 按顺时针方向旋转，点 A 与点 M 重合，

$$\therefore BA = BM$$

$$\therefore \angle BMA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABM) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABM$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BA = BC$$

$$\therefore BM = BC$$

$$\therefore \angle BMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBC) = 90^\circ - \angle MBC$$

$$\therefore \angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MBC$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABM + \angle MBC)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\therefore \angle CMN = 180^\circ - \angle AMC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\because \angle ABC = a,$$

$$\therefore \angle CMN = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{a}{2}$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 90^\circ, \quad AD = AB$$

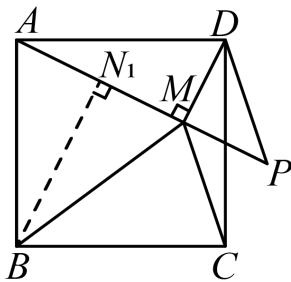
$$\text{由 (1) 可得 } \angle CMP = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore DP \parallel CM,$$

$$\therefore \angle DPM = 45^\circ,$$

当 $\angle DMP = 90^\circ$ 时, 则 $\triangle PMD$ 是等腰直角三角形,

如图, 过点 B 作 $BN_1 \perp AP$ 于点 N_1 ,



$$\therefore \angle AMD = 180^\circ - \angle DMP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle AMD = \angle BN_1A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAN_1 = 90^\circ - \angle DAM = \angle ADM$$

$$\text{又 } \because AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ABN_1 \cong \triangle DAM (A, A, S)$$

$$\therefore DM = AN_1$$

$$\text{又 } \because BA = BM, \quad BN_1 \perp AP$$

$$\therefore AN_1 = N_1M = \frac{1}{2}AM$$

设 $DM = AN_1 = x$ ，则 $AM = 2x$

在 $\text{Rt}\triangle AMD$ 中， $AD^2 = DM^2 + AM^2$

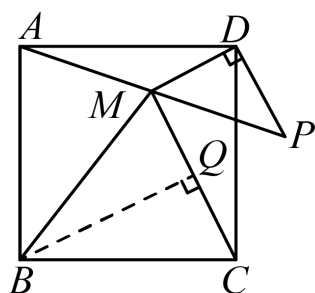
$$\therefore 5^2 = x^2 + (2x)^2$$

解得： $x = \sqrt{5}$

$\therefore \triangle PMD$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore PD = \sqrt{2}DM = \sqrt{10}$$

当 $\angle MDP = 90^\circ$ 时，如图，过点 B 作 $BQ \perp MC$ 于点 Q ，



同理可得 $\triangle BCQ \cong \triangle CDM$ ，

$$\therefore DM = CQ$$

又 $\because BC = BM$ ， $BQ \perp MC$

$$\therefore MQ = QC = \frac{1}{2}MC$$

设 $DM = CQ = y$ ，则 $CM = 2y$

在 $\text{Rt}\triangle CMD$ 中， $CD^2 = DM^2 + CM^2$

$$\therefore 5^2 = y^2 + (2y)^2$$

解得： $y = \sqrt{5}$

$\therefore \triangle PMD$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore PD = DM = \sqrt{5}$$