

2025 学年第二学期八年级期中考试数学科目

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、单选题 (每题 2 分, 共 6 题, 共 12 分)

1. 下列关系中, 属于成正比例函数关系的是 ()

- A. 正方形的面积与边长
- B. 从甲地到乙地, 所用的时间和行驶速度
- C. 圆的面积与它的半径
- D. 等边三角形的周长和边长

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查正比例函数定义的应用, 根据各个选项中的说法, 利用学过的数学知识得到变量之间的关系式, 判断它们的函数关系是否是正比例函数关系即可得到答案. 读懂题意, 判断变量之间是否满足正比例函数关系是解决问题的关键.

【详解】解: A、正方形的面积 S 与边长 a 的关系是 $S = a^2$, 不是正比例函数关系, 故选项不符合题意;
B、从甲地到乙地距离固定为 s , 所用的时间 t 和行驶速度 v 的关系是 $s = vt$, 不是正比例关系, 故选项不符合题意;
C、圆的面积 S 与它的半径 r 的关系是 $S = \pi r^2$, 不是正比例函数关系, 故选项不符合题意;
D、等边三角形的周长 C 和边长 a 的关系是 $C = 3a$, 是正比例函数关系, 故选项符合题意;
故选: D.

2. 下列命题中, 不正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
- B. 对角线相等的平行四边形是矩形
- C. 对角线相等的矩形是正方形
- D. 对角线相等的菱形是正方形

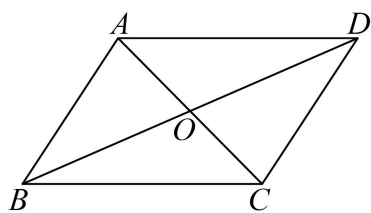
【答案】C

【解析】

【详解】A、根据菱形判定定理, 对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 故 A 选项命题正确;
B、根据矩形判定定理, 对角线相等的平行四边形是矩形, 故 B 选项命题正确;
C、矩形的对角线本来就相等, 仅对角线相等无法判定它是正方形, 故 C 选项命题不正确;
D、菱形的对角线互相垂直平分, 若对角线再相等, 则满足正方形的判定条件, 所以对角线相等的菱形是正方形, 故 D 选项命题正确.

综上，不正确的是 C.

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 和 BD 交于点 O ，要使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，则应添加的条件是 ()



- A. $AB = CD$ B. $AO = CO$ C. $\angle ADB = \angle CBD$ D. $AC = BD$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的判定定理，三角形全等的判定，平行线的性质，根据平行四边形的判定定理对选项依次判断即可.

【详解】解：A、仅 $AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$ ，四边形可能是等腰梯形，无法判定为平行四边形，故 A 错误；

B、 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAO = \angle BCO$,

在 $\triangle DAO$ 和 $\triangle BCO$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAO = \angle BCO \\ AO = CO \\ \angle AOD = \angle COB \end{cases},$$

$\therefore \triangle DAO \cong \triangle BCO$ (ASA),

$\therefore AD = BC$,

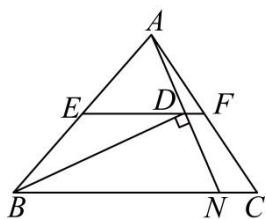
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 故 B 正确.

C、由 $\angle ADB = \angle CBD$ 无法判定为平行四边形，故 C 错误；

D、 $AD \parallel BC$ 且 $AC = BD$ ，四边形可能是等腰梯形，故 D 错误；

故选：B.

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， E, F 分别是 AB, AC 的中点，点 D 在 EF 上，延长 AD 交 BC 于 N ， $BD \perp AN$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，则 $DF =$ ()



A. 2

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形中位线的性质得到 $EF = \frac{1}{2}BC = 4$ ，然后根据直角三角形的性质得到 $DE = 3$ ，进而根据 $DF = EF - DE$ 求解即可.

【详解】解：∵ E, F 分别是 AB, AC 的中点， $BC = 8$ ，

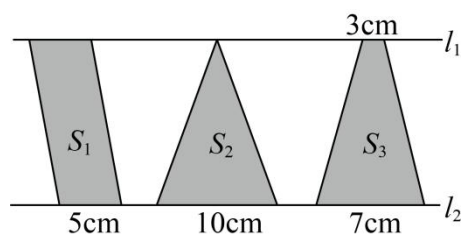
$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = 4,$$

∵ $BD \perp AN$ ， $AB = 6$ ，

$$\therefore DE = AE = BE = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore DF = EF - DE = 4 - 3 = 1.$$

5. 如图， $l_1 \parallel l_2$ ，平行四边形、三角形、梯形放置于 l_1 和 l_2 之间，它们的面积分别记为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，则下列正确的是（ ）



A. $S_1 > S_2 > S_3$

B. $S_1 = S_2 > S_3$

C. $S_1 > S_2 = S_3$

D. $S_1 = S_2 = S_3$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了平行线之间的距离，设 l_1 和 l_2 之间的距离为 h ，然后表示出 S_1 、 S_2 、 S_3 ，进而求解即可.

【详解】解：∵ $l_1 \parallel l_2$

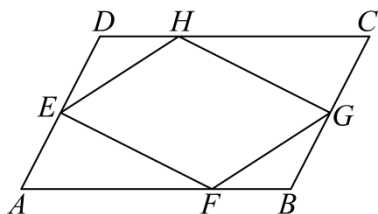
∴ 设 l_1 和 l_2 之间的距离为 h ，

$$\therefore S_1 = 5h, \quad S_2 = \frac{1}{2} \times 10h = 5h, \quad S_3 = \frac{1}{2} \times (3 + 7)h = 5h,$$

$$\therefore S_1 = S_2 = S_3.$$

故选: D.

6. 如图, 在边长为定值的平行四边形 $ABCD$ 中, E , G 分别为边 AD , BC 的中点, 点 F , H 分别在边 AB , CD 上移动 (都不与端点重合), 且满足 $BF = DH$, 连接 EF , FG , GH , HE , 下列说法中, 错误的是 ()



A. 线段 EG 的长度为定值

B. 当 F 为 AB 的中点时, 四边形 $EFGH$ 为矩形

C. 四边形 $EFGH$ 始终是平行四边形

$$D. S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}$$

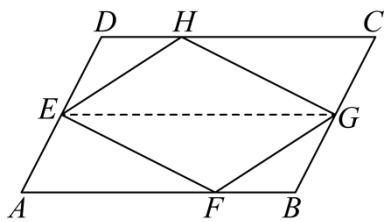
【答案】B

【解析】

【分析】根据 E 、 G 为 AD 、 BC 中点, 由平行四边形 $ABCD$ 得 $AE = DE = BG = CG$ 和 $AD \parallel BC$, 故四边形 $ABGE$ 为平行四边形, 可得 $EG = AB$ 即可判断 A; 由 $BF = DH$ 得 $AF = CH$, 证 $\triangle AEF \cong \triangle CGH$ 、 $\triangle DHE \cong \triangle BFG$, 得 $EF = GH$ 、 $EH = FG$, 故 $EFGH$ 始终为平行四边形, 即可判断 C; 当 F 为 AB 中点时, 无充分条件证明四边形 $EFGH$ 为矩形, 进而判断 B; 设 $AB = EG = a$, 平行四边形高为 h , 则

$$S_{ABCD} = ah; \text{ 进而可得 } S_{EFGH} = \frac{1}{2}a(FM + HN) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \text{ 进而判断 D.}$$

【详解】解: 连接 EG , 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$ 且 $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$,

$\because E$ 、 G 分别为 AD 、 BC 的中点,

$\therefore AE = DE = BG = CG$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABGE$ 是平行四边形.

$\therefore EG = AB$ ，故 A 正确，不符合题意；

$\therefore BF = DH$ 且 $AB = CD$ ，

$\therefore AB - BF = CD - DH$ ，

$\therefore AF = CH$ ，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CGH$ 中，

$$\begin{cases} AE = CG \\ \angle A = \angle C, \\ AF = CH \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CGH$ (SAS),

$\therefore EF = GH$ ，

在 $\triangle DHE$ 和 $\triangle BFG$ 中，

$$\begin{cases} DH = BF \\ \angle D = \angle B, \\ DE = BG \end{cases}$$

$\therefore \triangle DHE \cong \triangle BFG$ (SAS),

$\therefore EH = FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 始终是平行四边形，故 C 正确，不符合题意；

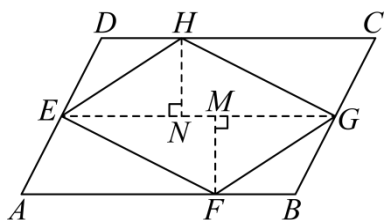
当 F 为 AB 的中点时，无法进一步证明四边形 $EFGH$ 为矩形，故 B 错误，符合题意；

设平行四边形 $ABCD$ 的底 $AB = EG = a$ ，平行四边形 $ABCD$ 的高（ AB 与 CD 之间的距离）为 h ，

$\therefore S_{ABCD} = a \cdot h$ ，

由图得， $S_{\square EFGH} = S_{\triangle EGF} + S_{\triangle EGH}$ ，

过点 F 作 $FM \perp EG$ 于 M ，过点 H 作 $HN \perp EG$ 于 N ，如图，



$\therefore AB \parallel EG \parallel CD$ ，

$\therefore FM + HN = h$ ，

$\therefore S_{\triangle EGF} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot FM$ ， $S_{\triangle EGH} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot HN$ ，

$$\therefore S_{\square EFGH} = \frac{1}{2}EG \cdot FM + \frac{1}{2}EG \cdot HN = \frac{1}{2}EG(FM + HN)$$

$$\therefore S_{EFGH} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \text{ 故 D 正确, 不符合题意.}$$

【点睛】本题以平行四边形动点为载体，综合平行四边形的判定与性质、全等三角形证明、面积计算等知识，分析动态图形的不变性质，体现了转化化归与数形结合的核心数学思想.

二、填空题: (每题 3 分, 共 12 题, 共 36 分)

7. 已知一个多边形的内角和等于 2160° , 则这个多边形的边数为_____.

【答案】十四##14

【解析】

【分析】本题考查了多边形内角和定理，掌握内角和定理并利用方程求解是解题的关键. 设多边形的边数为 n , 由内角和定理建立方程即可求解.

【详解】解: 设多边形的边数为 n ,

由内角和定理得: $(n-2) \times 180 = 2160$,

解得: $n = 14$;

故答案为: 十四.

8. 将点 $M(-3, 2)$ 先向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度后到达点 N 那么点 N 的坐标为_____.

【答案】

$(-6, 0)$

【解析】

【分析】根据平面直角坐标系中点的平移规律，向左平移横坐标减平移单位长度，向下平移纵坐标减平移单位长度，依次计算即可得到点 N 的坐标.

【详解】解: 将点 $M(-3, 2)$ 向左平移 3 个单位长度，横坐标减 3，得到点的坐标为 $(-3-3, 2)$ ，即 $(-6, 2)$ ，再将点 $(-6, 2)$ 向下平移 2 个单位长度，纵坐标减 2，得到点 $N(-6, 2-2)$ ，即 $N(-6, 0)$.

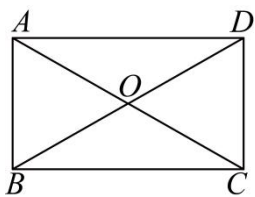
9. 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $AD = \sqrt{3}$ ，那么 BD 的长是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】首先根据矩形的性质得到 $OA = OC = OB = OD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，然后求出 $\angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$ ，得到 $AC = 2CD$ ，然后根据勾股定理求出 $CD = 1$ ，进而求解即可.

【详解】如图所示,



$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$\therefore OA = OC = OB = OD$, $\angle ADC = 90^\circ$

$\because \angle AOB = 60^\circ$

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$

$\therefore AC = 2CD$,

$\because \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2$, 即 $(\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$

$\therefore CD = 1$

$\therefore AC = 2$

$\therefore BD = AC = 2$.

故答案为: 2.

【点睛】此题考查了矩形的性质, 等边对等角, 勾股定理, 含 30° 角直角三角形的性质, 解题的关键是掌握以上知识点.

10. 点 $A(-\sqrt{2}, 6)$ 和点 $B(\sqrt{2}, -1)$ 之间的距离是_____.

【答案】 $\sqrt{57}$

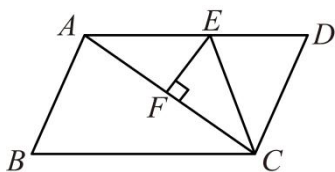
【解析】

【分析】先表示出两点之间的横向的距离和纵向的距离, 再根据勾股定理得出答案.

【详解】解: 根据勾股定理, 得 $AB = \sqrt{(-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + [6 - (-1)]^2} = \sqrt{57}$,

所以点 A 和 B 之间的距离是 $\sqrt{57}$.

11. 如图, 已知 $\square ABCD$ 的周长为 12, AC 的垂直平分线交 AD 于点 E , 交 AC 于点 F , 连接 CE , 则 $\triangle CDE$ 的周长是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AD + CD = 6$ ，根据垂直平分线的性质可知 $\triangle CDE$ 的周长 $= AD + CD$ 。

【详解】解： $\because \square ABCD$ 的周长为 12，

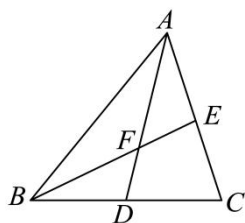
$$\therefore AD + CD = 6,$$

由题意可得：点 E 在 AC 的垂直平分线上，

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \triangle CDE \text{ 的周长} = CE + DE + CD = AE + DE + CD = AD + CD = 6.$$

12. 如图， F 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AF 并延长交 BC 于点 D ，连接 BF 并延长交 AC 于点 E 。若 $\triangle ABF$ 的面积是 8cm^2 ，则四边形 $CDFE$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}} \text{cm}^2$ 。

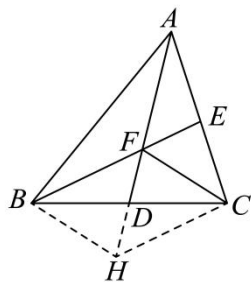


【答案】 8

【解析】

【分析】本题考查了三角形的重心，三角形的面积，理解三角形的重心的定义，等底（或同底）同高（或等高）的两个三角形的面积相等，同高（或等高）的两个三角形的面积之比等于对应底边的比是解决问题的关键，熟练掌握平行四边形的判定和性质，三角形中位线定义是解决问题的关键。延长 AD 到 H ，使 $DH = DF$ ，连接 BH ， CH ，延长 BF 交 AC 于点 E ，则 $FH = 2DF$ ，证明四边形 $FBHC$ 是平行四边形得 $BE \parallel CH$ ， $CH = BF$ ，进而得 EF 是 $\triangle ACH$ 的中位线，则 $CH = BF = 2EF$ ， $AF = FH = 2DF$ ，根据三角形的面积公式得 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DBF}} = \frac{AF}{DF}$ ，由此得 $S_{\triangle DBF} = 4$ ，进而得 $S_{\triangle DCF} = S_{\triangle DBF} = 4$ ，则 $S_{\triangle FBC} = 8$ ，再根据 $\frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{BF}{EF}$ 得 $S_{\triangle FCE} = 4$ ，据此即可得出四边形 $CDFE$ 的面积。

【详解】解：如图，延长 AD 到 H ，使 $DH = DF$ ，连接 BH ， CH ，延长 BF 交 AC 于点 E ，



$$\therefore FH = DH + DF = 2DF ,$$

$\therefore F$ 是 ABC 的重心,

$$\therefore BD = CD , \quad AE = CE ,$$

$$\therefore DH = DF ,$$

$\therefore$ 四边形 $FBHC$ 是平行四边形,

$$\therefore BE \parallel CH , \quad CH = BF ,$$

又 $\therefore AE = CE ,$

$\therefore EF$ 是 $\triangle ACH$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CH , \quad AF = FH = 2DF ,$$

$$\therefore CH = BF = 2EF ,$$

$\therefore \triangle ABF$ 的边 AF 上的高与 $\triangle DBF$ 的边 DF 上的高相同,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DBF}} = \frac{AF}{DF} ,$$

$\therefore \triangle ABF$ 的面积是 8cm^2 ,

$$\therefore \frac{8}{S_{\triangle DBF}} = \frac{2DF}{DF} ,$$

$$\therefore S_{\triangle DBF} = 4\text{cm}^2 ,$$

$\therefore BD = CD$, $\triangle DCF$ 的边 DF 上的高与 $\triangle DBF$ 的边 DF 上的高相同,

$$\therefore S_{\triangle DCF} = S_{\triangle DBF} = 4\text{cm}^2 ,$$

$$\therefore S_{\triangle FBC} = S_{\triangle DCF} + S_{\triangle DBF} = 8\text{cm}^2 ,$$

又 $\therefore \triangle FBC$ 的边 BF 上的高与 $\triangle FCE$ 的边 EF 上的高相同,

$$\therefore \frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{BF}{EF} ,$$

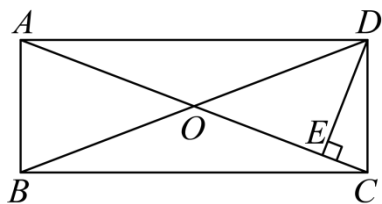
$$\therefore \frac{8}{S_{\triangle FCE}} = \frac{2EF}{EF} ,$$

$$\therefore S_{\triangle FCE} = 4\text{cm}^2 ,$$

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 的面积为: $S_{\triangle DCF} + S_{\triangle FCE} = 4 + 4 = 8(\text{cm}^2)$.

故答案为：8.

13. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , $DE \perp AC$ 于点 E , $\angle BOC = 140^\circ$, 则 $\angle CDE$ 的大小是_____.



【答案】 20°

【解析】

【分析】 根据矩形的性质得到 $OC = OD$, 则由等边对等角和三角形外角的性质可得 $\angle ODC = \angle OCD = 70^\circ$, 再根据直角三角形两锐角互余可得答案.

【详解】 解: $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O ,

$$\therefore OC = OD,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD,$$

$$\because \angle BOC = \angle ODC + \angle OCD = 140^\circ,$$

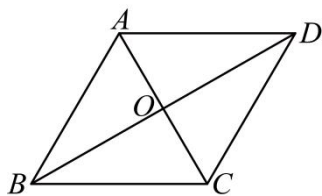
$$\therefore \angle ODC = \angle OCD = 70^\circ,$$

$$\because DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ - \angle DCE = 20^\circ.$$

14. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , $AB = 5$. 若 $\angle BAD = 120^\circ$, 则 AC 的长是_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 先结合菱形的性质得 $AD \parallel BC$, $BC = AB = 5$, 根据 $\angle BAD = 120^\circ$, 得出 $\angle ABC = 60^\circ$, 然后证明 ABC 是等边三角形, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 5$

$$\therefore AD \parallel BC, BC = AB = 5,$$

$$\therefore \angle BAD = 120^\circ,$$

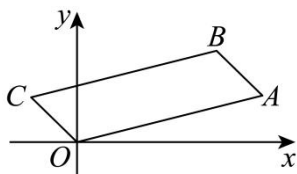
$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore BC = AB = 5$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = AB = 5.$$

15. 如图, 四边形 $OABC$ 是平行四边形, 点 A, B 的坐标分别为 $(4,1), (3,2)$, 则点 C 的坐标为_____.



【答案】 $(-1,1)$

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可得 $AB \parallel OC$, $AB = OC$, 先求得 A 到 B 的平移方式, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

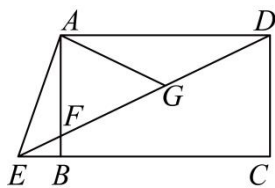
$$\therefore AB \parallel OC, AB = OC,$$

$$\therefore \text{点 } A, B \text{ 的坐标分别为 } (4,1), (3,2)$$

$\therefore$ 将 A 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 B

$\therefore$ 将 O 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 C , 即 $C(-1,1)$

16. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 连接 DE 交 AB 于点 F , $\angle AED = 2\angle CED$, 点 G 是 DF 的中点, 若 $BE = 2$, $CD = 6$, 则 DF 的长为_____.



【答案】 $4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 利用矩形的性质和勾股定理可求出 AE 的长, 利用直角三角形的性质得到 $AG = FG = GD = \frac{1}{2}DF$,

则可证明 $\angle AEG = \angle AGE$ 得到 $AE = AG$, 据此可得答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ, AD \parallel BC, AB = CD = 6,$$

$$\therefore \angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle GDA = \angle CED,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{10},$$

$\therefore$ 点 G 是 DF 的中点,

$$\therefore AG = FG = GD = \frac{1}{2}DF,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle GDA,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle GDA = \angle DEC,$$

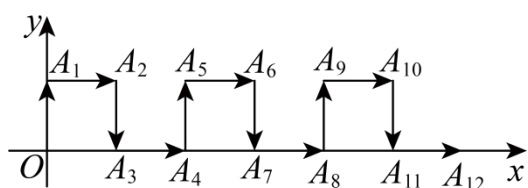
$$\therefore \angle AGE = \angle GAD + \angle GDA = 2\angle DEC, \quad \angle AED = 2\angle DEC,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle AGE,$$

$$\therefore AE = AG,$$

$$\therefore DF = 2AG = 2AE = 4\sqrt{10}.$$

17. 在平面直角坐标系中, 一只青蛙从原点 O 出发, 按向上、向右、向下、向右的方向依次跳动, 每次跳动 2 个单位长度, 其行走路线如图所示, 则点 A_{2025} 的坐标为_____.



【答案】 $(2024, 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了规律型问题在点的坐标问题中的应用, 利用移动规律得出坐标变化规律是解题的关键.

根据图象先计算出 A_4 和 A_8 的坐标, 进而得出点 A_{4n} 的坐标为 $(4n, 0)$, 再用 $2024 \div 4 = 506$, 可得出点 A_{2025} 的坐标, 即可求解.

【详解】 解: 由图可知 A_4 , A_8 都在 x 轴上,

$\therefore$ 青蛙每次移动 2 个单位,

$$\therefore OA_4 = 4, \quad OA_8 = 8,$$

$$\therefore A_4(4, 0), A_8(8, 0),$$

$$\therefore \text{点 } A_{4n} \text{ 的坐标为 } (4n, 0),$$

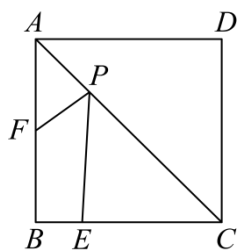
则 $2024 \div 4 = 506$,

$\therefore A_{2024}$ 点的坐标是 $(2024, 0)$.

$\therefore$ 点 A_{2024} 向上移动 2 个单位长度得到点 A_{2025} ,

$\therefore$ 点 A_{2025} 的坐标是 $(2024, 2)$

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8, E 为 BC 上的一点, $BE = 2$, F 为 AB 上的一点, $AF = 4$, P 为 AC 上一个动点, 则 $PF + PE$ 的最小值为_____.

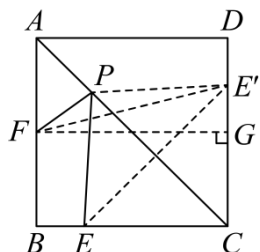


【答案】 $2\sqrt{17}$

【解析】

【分析】根据“将军饮马”模型, 作点 E 关于直线 AC 的对称点 E' , 连接 $E'F$, 则 $PF + PE$ 的最小值为 $E'F$ 的长, 再过点 F 作 $FG \perp CD$ 于点 G , 证出四边形 $AFGD$ 为矩形, 进一步得出 FG 和 GE' 的长, 最后利用勾股定理求解即可.

【详解】解: 如图, 作点 E 关于直线 AC 的对称点 E' , 连接 $E'F$, PE' , 过点 F 作 $FG \perp CD$ 于点 G ,



$\therefore EP = E'P$, $DE' = BE = 2$, $\angle FGD = 90^\circ$,

$\therefore PF + PE = PF + E'P \geq E'F$.

在正方形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle BCD = \angle B = \angle D = 90^\circ$, $AD = 8$,

$\therefore$ 四边形 $AFGD$ 为矩形,

$\therefore DG = AF = 4$, $GF = AD = 8$,

$\therefore GE' = GD - DE' = 4 - 2 = 2$.

在 $\text{Rt}\triangle E'FG$ 中,

$\therefore E'F = \sqrt{FG^2 + GE'^2} = 2\sqrt{17}$,

即 $PF + PE$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$.

三、解答题 (共 52 分)

19. 已知 $y = (k-2)x^{k^2-3}$, 且 y 是关于 x 的正比例函数.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 若 $x \leq 2$, 求函数 y 的最小值.

【答案】 (1) $y = -4x$

(2) -8

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义, 求正比例函数值, 正比例函数的增减性:

(1) 一般地, 形如 $y = kx$ (k 是常数, 且 $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数, 据此可得 $\begin{cases} k^2 - 3 = 1 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases}$, 解之即

可得到答案;

(2) 根据 (1) 所求, 先求出当 $x = 2$ 时, $y = -4 \times 2 = -8$, 再根据解析式可得 y 随 x 增大而减小, 则当 $x \leq 2$, 函数 y 的最小值为 -8 .

【小问 1 详解】

解: $\because y = (k-2)x^{k^2-3}$, 且 y 是关于 x 的正比例函数,

$$\therefore \begin{cases} k^2 - 3 = 1 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore k = -2,$$

$$\therefore y = (-2-2)x^{(-2)^2-3} = -4x;$$

【小问 2 详解】

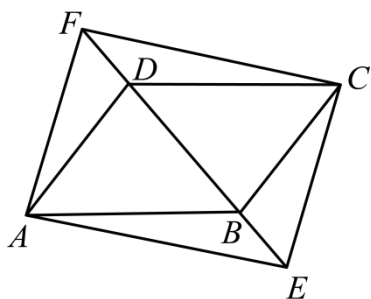
解: 在 $y = -4x$ 中, 当 $x = 2$ 时, $y = -4 \times 2 = -8$,

$\because$ 在 $y = -4x$ 中, $-4 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 增大而减小,

$\therefore$ 当 $x \leq 2$, 函数 y 的最小值为 -8 .

20. 如图, 将 $\square ABCD$ 的对角线 BD 向两个方向延长, 分别至点 E 和点 F , $BE = DF$, 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.



【答案】见解析

【解析】

【分析】先证 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS), 则 $AE = CF$, $\angle AED = \angle CFB$, 可得 $AE \parallel CF$, 可证四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【详解】解: $\because BE = DF$,

$\therefore BE + DB = DF + DB$, 即 $DE = BF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = CB$, $AD \parallel CB$.

$\therefore \angle ADE = \angle CBF$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中

$$\begin{cases} DE = BF \\ \angle ADE = \angle CBF \\ AD = CB \end{cases}$$

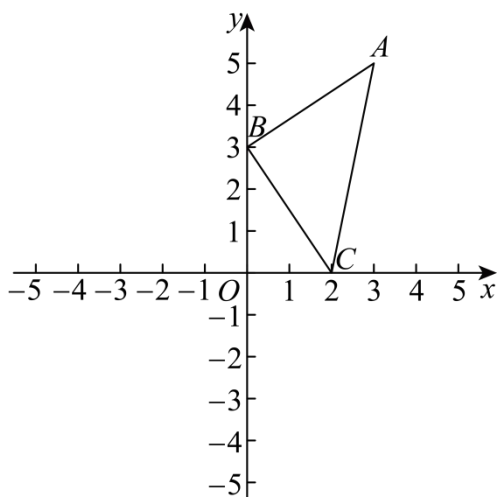
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS)

$\therefore AE = CF$, $\angle AED = \angle CFB$.

$\therefore AE \parallel CF$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

21. ABC 在平面直角坐标系中如图所示, 点 A 的坐标为 $(3, 5)$.



(1) 请求出 $S_{\triangle ABC}$;

(2) x 轴上是否存在点 P , 使得 $S_{\triangle BCP} = 2S_{\triangle ABC}$, 若不存在, 说明理由; 若存在, 求出 P 点的坐标.

【答案】 (1) 6.5 (2) 存在, 点 P 的坐标为 $\left(\frac{32}{3}, 0\right)$ 或 $\left(-\frac{20}{3}, 0\right)$

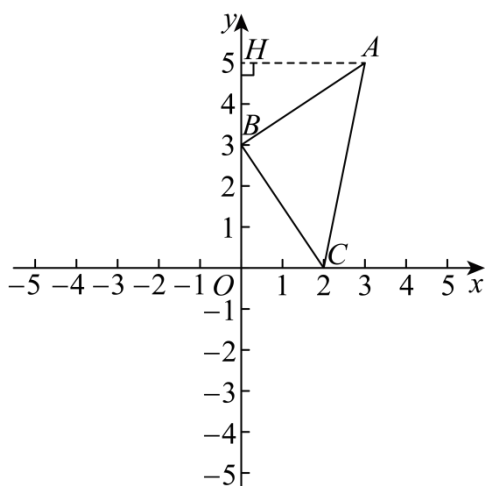
【解析】

【分析】 (1) 由 $\triangle ABC$ 的面积 = 梯形 $ACOH$ 的面积 - $\triangle ABH$ 的面积 - $\triangle BOC$ 的面积, 即可计算;

(2) 分两种情况, 由三角形面积公式, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 作 $AH \perp y$ 轴于 H ,



$\therefore \triangle ABC$ 的面积 = 梯形 $ACOH$ 的面积 - $\triangle ABH$ 的面积 - $\triangle BOC$ 的面积,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(2+3) \times 5 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 6.5;$$

【小问 2 详解】

解：存在，理由如下：

$$\because \triangle BCP \text{ 的面积} = \frac{1}{2} PC \cdot OB = 2 \times 6.5 = 13,$$

$$\therefore PC = \frac{26}{3},$$

$$\text{当 } P \text{ 在 } C \text{ 的右侧, } OP = OC + PC = 2 + \frac{26}{3} = \frac{32}{3},$$

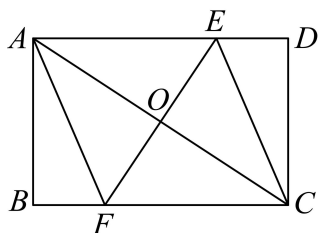
$$\therefore \text{此时 } P \text{ 的坐标是 } \left(\frac{32}{3}, 0 \right),$$

$$\text{当 } P \text{ 在 } C \text{ 的左侧, } PO = PC - OC = \frac{26}{3} - 2 = \frac{20}{3},$$

$$\therefore \text{此时 } P \text{ 的坐标是 } \left(-\frac{20}{3}, 0 \right),$$

$$\therefore P \text{ 的坐标是 } \left(\frac{32}{3}, 0 \right) \text{ 或 } \left(-\frac{20}{3}, 0 \right).$$

22. 如图， AC 为矩形 $ABCD$ 的对角线，过 AC 的中点 O 作 AC 的垂线，分别交 BC ， AD 于 F ， E ，连接 AF ， CE 。



(1) 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形。

(2) 若 $AE = 11\text{cm}$ ， $\triangle ABF$ 的面积为 12cm^2 ，求 $\triangle ABF$ 的周长。

【答案】(1) 见解析 (2) 24cm

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得出 $AD \parallel BC$ ，求出 $\angle OAE = \angle OCF$ ，可得 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，可得四边形 $AECF$ 是平行四边形。可得平行四边形 $AECF$ 为菱形；

(2) 由 $AF = AE = 11$ ，得 $AB^2 + BF^2 = AF^2 = 121$ ， $\therefore (AB + BF)^2 - 2AB \cdot BF = 121$ 由 $\triangle ABF$ 的面积
为 $\frac{1}{2} AB \cdot BF = 12$ ，得 $AB \cdot BF = 24$ ，得 $(AB + BF)^2 - 2 \times 24 = 121$ ，即 $(AB + BF)^2 = 169$ ，得

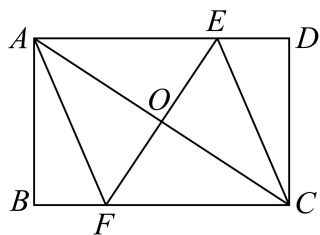
$AB + BF = 13$ (负值舍去)，即 $C_{\triangle ABF} = AB + BF + AF = 13 + 11 = 24\text{cm}$ 。

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OCF.$$



$\because O$ 是 AC 的中点,

$$\therefore OA = OC.$$

又 $\because \angle AOE = \angle COF$,

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{ASA}),$$

$$\therefore OF = OE,$$

又 $OA = OC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

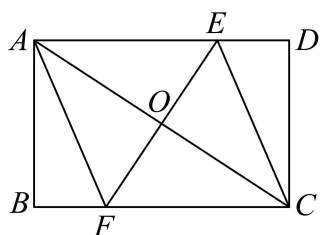
$$\because EF \perp AC,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 为菱形;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得, 四边形 $AFCE$ 是菱形,

$$\therefore AF = AE = 11,$$



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $AB^2 + BF^2 = AF^2 = 121$,

$$\therefore (AB + BF)^2 - 2AB \cdot BF = 121 \text{ ①},$$

$\because \triangle ABF$ 的面积为 12cm^2 ,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot BF = 12,$$

即 $AB \cdot BF = 24$ ②,

把②代入①得, $(AB + BF)^2 - 2 \times 24 = 121$,

即 $(AB + BF)^2 = 169$,

$\therefore AB + BF = 13$ (负值舍去),

$\therefore C_{\triangle ABF} = AB + BF + AF = 13 + 11 = 24\text{cm}$.

23. 综合与实践

【问题情境】

在数学综合与实践活动课上, 老师让同学们以“特殊平行四边形的旋转”为主题开展探究活动.

如图1, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$, 连接 DG , BE .

【操作发现】

(1) 当正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转, 如图2, 线段 DG 与 BE 之间的数量关系是_____; 直线 DG 与 BE 的夹角度数为_____;

【深入探究】

(2) 如图3, 若四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 都为菱形, 且 $AB = 2AE$, $\angle DAB = \angle GAE = 60^\circ$, 猜想 DG 与 BE 的数量关系与直线 DG 与 BE 的夹角度数, 并说明理由;

【迁移探究】

(3) 如图3, 在 (2) 的条件下, $AB = 2$, 在菱形 $AEFG$ 绕点 A 旋转过程中, 直接写出线段 CE 的最小值.

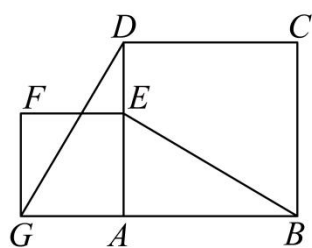


图 1

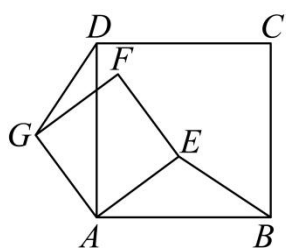


图 2

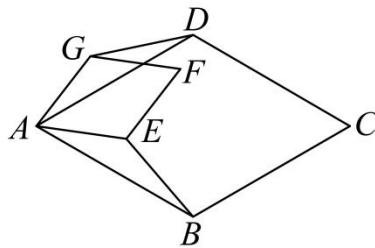


图 3

【答案】 (1) $DG = BE$, 90° ; (2) $DG = BE$; 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ; 理由见解析; (3)

线段 CE 的最小值为 $2\sqrt{3} - 1$.

【解析】

【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形, 得 $AG = AE$, $AD = AB$, $\angle GAE = \angle DAB = 90^\circ$, 证明 $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS), 得出 $DG = BE$, $\angle ADG = \angle ABE$, 延长 BE 交 GD 于点 M , 交 AD 于点 N , 根据全等三角形的性质和角度和差即可求解;

(2) 由四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是菱形, 得 $AG = AE$, $AD = AB$, $\angle GAE = \angle DAB = 60^\circ$, 证明 $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS), 得出 $DG = BE$, $\angle ADG = \angle ABE$, 延长 BE 交 GD 于点 H , 交 AD 于点 T , 根据全等三角形的性质和角度和差即可求解;

(3) 如图 4, 由于菱形 $AEFG$ 绕点 A 旋转, 所以点 E 的运动轨迹, 是以点 A 为圆心, 半径为 $AE = 1$ 的圆, 连接圆心点 A 与圆外一点 C , 当点 E 在 AC 上时, 线段 CE 取得最小值, 连接 BD , 交 AC 于点 O , 根据菱形的性质得到 $\angle OAB = 30^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, $AC = 2AO$, 根据勾股定理得到 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3}$, 求得 $AC = 2OA = 2\sqrt{3}$, 于是得到结论.

【详解】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形,

$$\therefore AG = AE, AD = AB, \angle GAE = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle EAB,$$

在 $\triangle GAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAD = \angle EAB, \\ AD = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB (SAS),$$

$$\therefore DG = BE, \angle ADG = \angle ABE,$$

如图 2, 延长 BE 交 GD 于点 M , 交 AD 于点 N ,

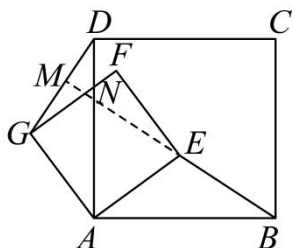


图2

$$\therefore \angle DNM = \angle ANB, \angle ABN + \angle ANB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DNM + \angle ADG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{直线 } DG \text{ 与 } BE \text{ 的夹角度数为 } 90^\circ,$$

故答案为: $DG = BE$, 90° ;

(2) $DG = BE$; 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ; 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是菱形,

$$\therefore AG = AE, \quad AD = AB, \quad \angle GAE = \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle EAB,$$

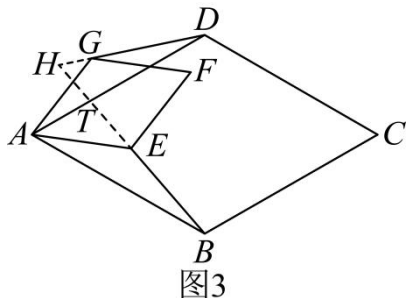
$\therefore$ 在 $\triangle GAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAD = \angle EAB, \\ AD = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB (SAS),$$

$$\therefore DG = BE, \quad \angle ADG = \angle ABE,$$

如图 3, 延长 BE 交 DG 的延长线于点 H , 交 AD 于点 T ,



$$\because \angle DTH = \angle ATB, \quad \angle H + \angle DTH + \angle ADG = 180^\circ, \quad \angle DAB + \angle ATB + \angle ABE = 180^\circ$$

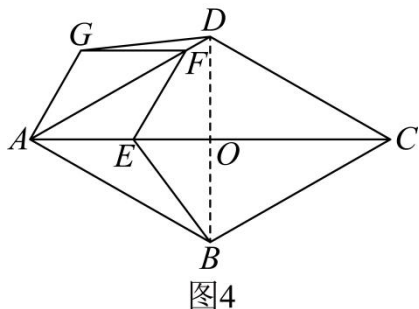
$$\therefore \angle H = \angle DAB = 60^\circ,$$

$\therefore$ 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ;

(3) 如图 4, $\because CE \geq AC - AE$

$\therefore$ 当点 E 在 AC 上时, 线段 CE 取得最小值,

连接 BD , 交 AC 于点 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ, \quad \angle AOB = 90^\circ, \quad AC = 2AO,$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 2\sqrt{3} - 1,$$

即线段 CE 的最小值为 $2\sqrt{3} - 1$.

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，菱形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理的应用，掌握知识点的应用是解题的关键.

24. 我们给出定义：有一组对角相等而另一组对角不相等的凸四边形叫做“等对角四边形”.

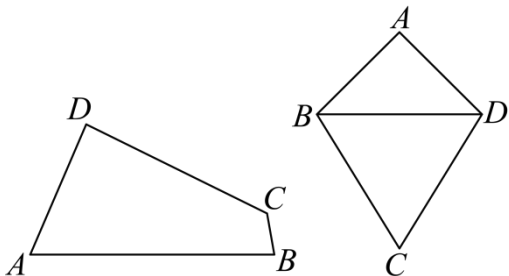


图1

图2

(1) 已知：如图 1，四边形 $ABCD$ 是“等对角四边形”， $\angle A \neq \angle C$ ， $\angle A = 75^\circ$ ， $\angle B = 80^\circ$ ，求 $\angle C$ ， $\angle D$ 的度数.

(2) 在探究“等对角四边形”性质时，小红画了一个“等对角四边形” $ABCD$ (如图 2)，其中 $\angle ABC = \angle ADC$ ， $AB = AD$ ，此时她发现 $CB = CD$ 成立. 请你证明此结论.

(3) 已知：在“等对角四边形” $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 7$ ， $AD = 5$. 求对角线 AC 的长.

【答案】(1) $\angle C = 125^\circ$ ； $\angle D = 80^\circ$

(2) 证明见解析 (3) $\sqrt{97}$ 或 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据“等对角四边形”的定义，由 $\angle A \neq \angle C$ 推出相等的对角只能是 $\angle B$ 和 $\angle D$ ，先得出 $\angle D = \angle B = 80^\circ$ ，再利用四边形内角和为 360° ，减去 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的度数，即可求出 $\angle C$ 的度数；

(2) 由 $AB = AD$ 根据等边对等角得 $\angle ABD = \angle ADB$ ，结合已知 $\angle ABC = \angle ADC$ ，通过等式性质两边同时减去相等的角，推出 $\angle CBD = \angle CDB$ ，最后根据等角对等边即可证明 $CB = CD$ ；

(3) 根据“等对角四边形”的定义分两种情况讨论，第一种是 $\angle DAB = \angle DCB = 60^\circ$ ，第二种是

$\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ，两种情况均通过过点 D 作 AB 和 BC 的垂线，构造直角三角形和矩形，利用 30° 直角三角形的性质求出相关线段长度，再结合勾股定理分别计算出两种情况下对角线 AC 的长，最后综合即可得出结果.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是“等对角四边形”， $\angle A \neq \angle C$ ， $\angle B = 80^\circ$ ，

$$\therefore \angle D = \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 360^\circ - \angle A - \angle B - \angle D = 125^\circ;$$

【小问 2 详解】

证明： $\because AB = AD$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\because \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle ADC - \angle ADB, \text{ 即 } \angle CBD = \angle CDB,$$

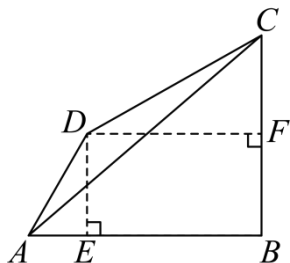
$$\therefore CB = CD;$$

【小问 3 详解】

解：分两种情况讨论：

①如图，当 $\angle DAB = \angle DCB = 60^\circ$ 时，

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，作 $DF \perp BC$ 于点 F ，



$$\therefore \angle AED = \angle BED = \angle BFD = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle DAB = 30^\circ, \angle CDF = 90^\circ - \angle DCB = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \frac{5}{2}, CF = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, BE = AB - AE = \frac{9}{2},$$

$$\because \angle BED = \angle BFD = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是矩形，

$$\therefore DF = BE = \frac{9}{2}, \quad BF = DE = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

设 $CF = x$, 则 $CD = 2x$,

在 $Rt\triangle CDF$ 中, $CD^2 = CF^2 + DF^2$,

$$\therefore (2x)^2 = x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

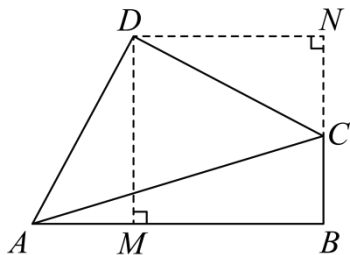
$$\text{解得 } x = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } CF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore BC = BF + CF = 4\sqrt{3},$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{97}$;

②如图, 当 $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ 时, $\angle BCD = 360^\circ - \angle ADC - \angle BAD - \angle ABC = 120^\circ$,

过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , 作 $DN \perp BC$ 于点 N ,



$$\therefore \angle AMD = \angle BMD = \angle BND = 90^\circ, \quad \angle DCN = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ - \angle DAB = 30^\circ, \quad \angle CDN = 90^\circ - \angle DCN = 30^\circ,$$

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AD = \frac{5}{2}, \quad CN = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore BM = AB - AM = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \angle BMD = \angle BND = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DMBN$ 是矩形,

$$\therefore DN = BM = \frac{9}{2},$$

设 $CN = a$, 则 $CD = 2a$,

在 $Rt\triangle CDN$ 中, $CD^2 = CN^2 + DN^2$,

$$\therefore (2a)^2 = a^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

解得 $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore CD = 2a = 3\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2\sqrt{13}$;

综上, 对角线 AC 的长为 $\sqrt{97}$ 或 $2\sqrt{13}$.

【点睛】 本题的核心是紧扣“等对角四边形”的定义, 关键是准确识别相等的对角组合, 易错点是第三问极易遗漏其中一种相等对角的情况导致漏解, 两种情况均通过作双高构造直角三角形和矩形, 结合 30° 直角三角形性质与勾股定理完成计算.