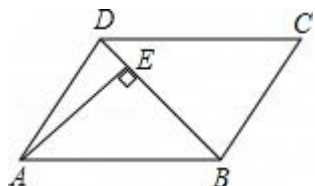


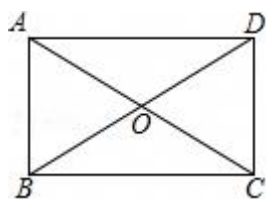
2025-2026 学年上海市宝山实验学校八年级（下）期中数学试卷

一、选择题（ $3 \times 6 = 18$ ）

- 1.（3分）如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形是（ ）
A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形
- 2.（3分）点 P 的坐标为 (a, b) ，若 $a > 0$ ， $b < 0$ （ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 3.（3分）将点 $M(-3, 2)$ 先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度后到达点 N （ ）
A. $(-3, -2)$ B. $(0, -2)$ C. $(0, 2)$ D. $(-6, -2)$
- 4.（3分）如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $DB = DC$ ， $AE \perp BD$ 于 E ，则 $\angle DAE$ 等于（ ）



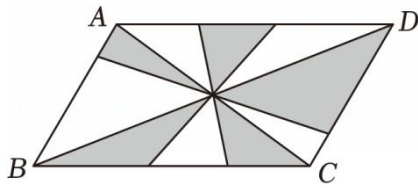
- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°
- 5.（3分）顺次连接对角线相等的四边形的各边中点，所得图形一定是（ ）
A. 平行四边形 B. 矩形
C. 菱形 D. 正方形
- 6.（3分）如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ， $BO = DO$ ，那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是（ ）



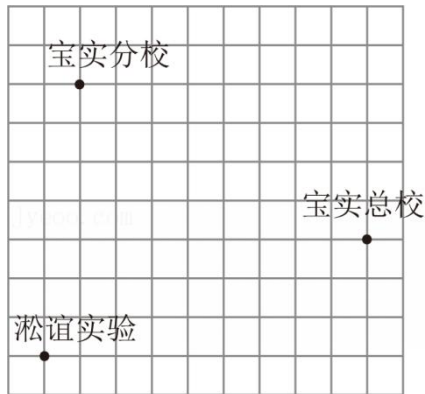
- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $AO = OC$ C. $AB \parallel CD$ D. $AB = CD$

二、填空题（ $3 \times 12 = 36$ ）

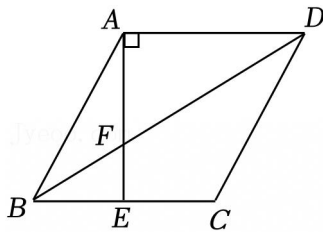
- 7.（3分）六边形的外角和的度数是 _____ 。
- 8.（3分）若点 $P(m+3, 2m)$ 在 x 轴上，则 $m =$ _____ 。
- 9.（3分）在平面直角坐标系内有两点 $E(\sqrt{3}, -2)$ 、 $F(2\sqrt{3}, 2)$ ，则线段 $EF =$ _____ 。
- 10.（3分）在 $\square ABCD$ 中， $AB = 5\text{cm}$ ， $BC = 6\text{cm}$ _____ cm 。
- 11.（3分）如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的面积是 24，图中分割线均经过对角线 AC 、 BD 的交点 _____ 。



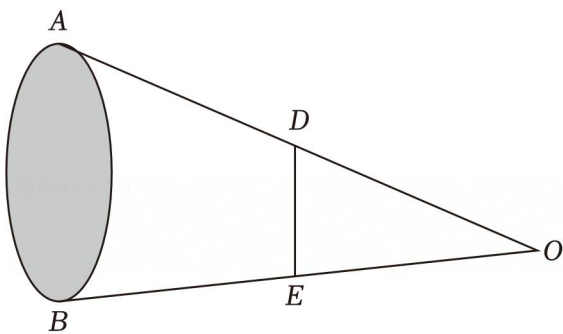
12. (3分) 如图，地图上标注了宝实分校附近学校的位置，若标记宝实分校的坐标为 $(-3, 4)$ $(5, 0)$ ，
 淞谊实验学校的位置恰好在格点上，则其坐标为_____。



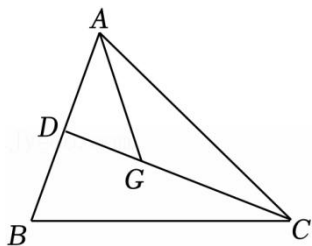
13. (3分) 如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 16， BC 的垂直平分线 EF 经过点 A _____。



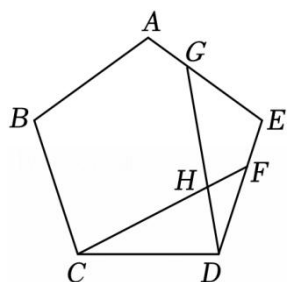
14. (3分) 如图，是一座塔的俯视图，现要测量塔基两侧 A 、 B 之间的距离，于是在塔前广场上选一点 O ，
 找到 OA 和 OB 之间的中点 D 、 E ，则塔基两侧 A 、 B 之间的距离为_____ 米。



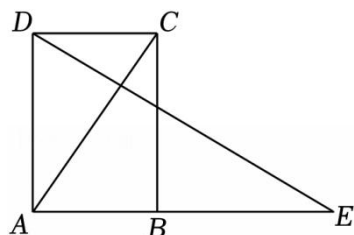
15. (3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 为重心，若 CD 平分 $\angle ACB$ ， $AC = 13$ ，则 CG 的长为_____。



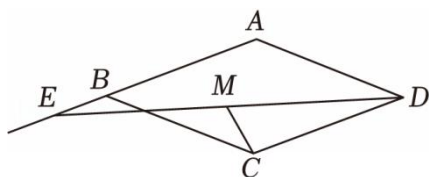
16. (3分) 如图, 在每个内角都相等且每条边都相等的五边形 $ABCDE$ 中, 点 F 、 G 在边 DE 、 AE 上, 则 $\angle CHG =$ _____ 度.



17. (3分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $\angle DAC = 40^\circ$, 使 $BE = AC$, 那么 $\angle E =$ _____ .



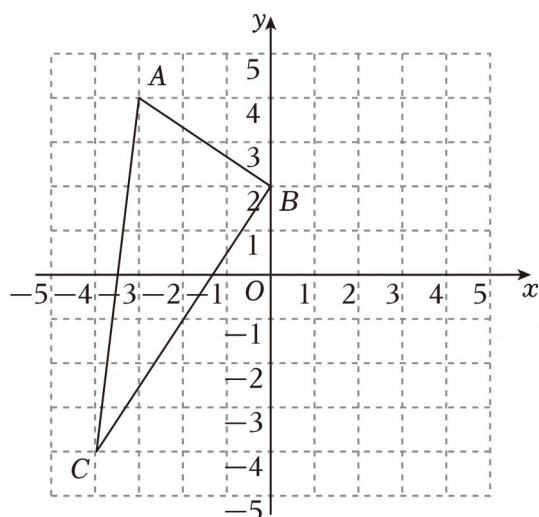
18. (3分) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AD = 4$, 点 E 在射线 AB 上运动, 点 M 是线段 DE 的中点, 点 _____ .



三、解答题 (6+6+6+8+8+12 = 46)

19. (6分) 如果一个多边形的内角和是四边形内角和的 5 倍, 那么这个多边形的边数是多少?
20. (6分) 在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中, 建立如图平面直角坐标系, 原点 O 及 $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上.

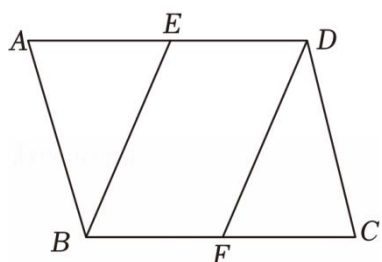
- (1) 直接写出 A 、 B 、 C 的坐标;
- (2) 请画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形;
- (3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



21. (6分) 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 、 F 是边 AD 和 BC 的中点, 连接 BE 、 DF .

(1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

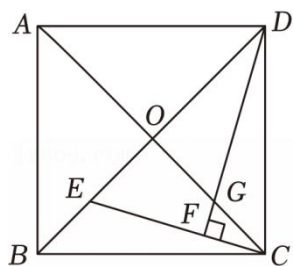
(2) 连接 BD , 若 BD 平分 $\angle EBF$, 求证: 四边形 $BFDE$ 是菱形.



22. (8分) 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 在 OB 上有一点 E , 交 OC 于点 G .

(1) 求证: $\triangle DOG \cong \triangle COE$;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的面积为18, $OE = 2BE$, 求 DG 的长.



23. (8分) 【问题提出】我们已经会用尺规作图画出已知线段的中点, 那么如何用尺规作图画出已知线段 MN 的三等分点呢?

【知识回顾】

利用三角形重心定理, 可以尺规作图画出任意一个三角形的中线的一个三等分点. 如图2, 在 $\triangle ABC$ 中,

则线段_____ = $\frac{1}{3}AD$.

【问题解决】

(1) 方法一：如图 3，作法如下.

①过线段 MN 的端点 N 画一条直线 l ，以 N 为圆心，任意长为半径画弧交直线 l 于点 A 、 B ;

②以点 B 、 M 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BM$ 的长为半径画弧，交点的连线交 BM 于点 C ;

③连接 AC 交 MN 于点 G ，点 G 即线段 MN 的一个三等分点.

...

请根据上述作法在图 3 中作出点 G ，并继续用尺规作图画出线段 MN 的另一个三等分点 H ，不用说明作图过程

(2) 方法二：如图 4，作法如下.

①以线段 MN 为一边作 $\triangle AMN$ ，以 M 、 N 为圆心，以线段 AN 、 AM 的长为半径作弧，连接 BM 、 BN ;

②作线段 BM 和 BN 的中点 C 、 D ，连接 AC 、 AD 分别交 MN 于点 H 和 G ;

所以， H 、 G 即 MN 的三等分点.

请根据上述的作法，证明： $MH = HG = NG$.



图1

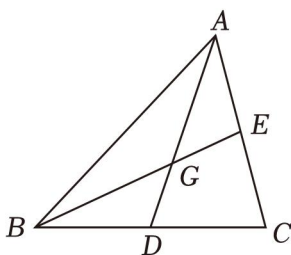


图2

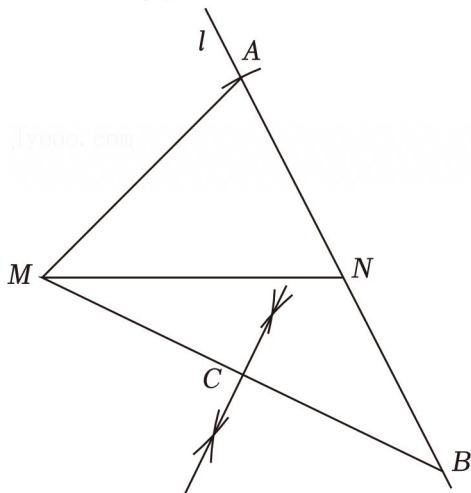


图3

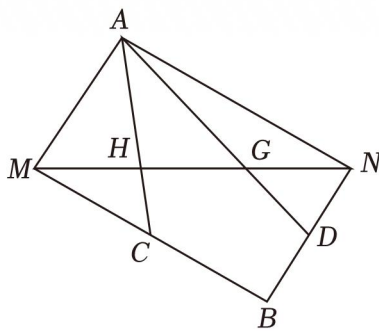


图4

24. (12 分) 在四边形 $ABCD$ 中，边 AB 绕点 B 按顺时针方向旋转，点 A 与点 M 重合，联结 AM 、 CM 、 DM ，延长 AM 交边 CD 于点 N .

(1) 如图 1, 当四边形 $ABCD$ 是菱形时,

①若 $\angle ABC = 70^\circ$, 则 $\angle CMN =$ _____ $^\circ$ (直接写出度数);

②若 $\angle ABC = \alpha$, 用含 α 的式子表示 $\angle CMN$, 并说明理由;

(2) 如图 2, 当四边形 $ABCD$ 是正方形时, $AB = 5$. 作 $DP \parallel CM$ 交 AM 的延长线于点 P . 当 $\triangle DMP$ 是直角三角形时

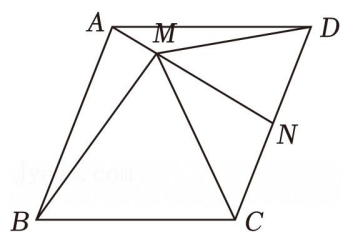


图1

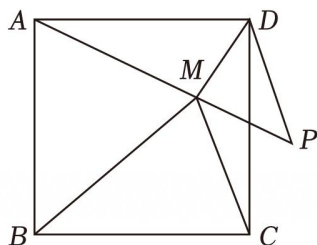
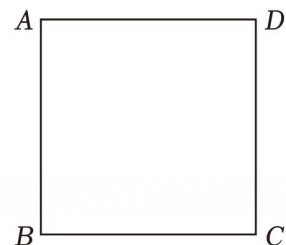


图2



备用图

2025-2026 学年上海市宝山实验学校八年级（下）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（ $3 \times 6 = 18$ ）

1.（3分）如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形是（ ）

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

【分析】根据多边形的内角和与外角和相等，列方程求解．

【解答】解：设这个多边形是 n 边形，

由题意得： $180(n - 2) = 360$ ，

解得： $n = 4$ ，

故选：B．

2.（3分）点 P 的坐标为 (a, b) ，若 $a > 0$ ， $b < 0$ （ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据第四象限内点的横坐标大于零，纵坐标小于零，可得答案．

【解答】解： $\because a > 0$ ， $b < 0$ ，

$\therefore$ 点 $P(a, b)$ 在第四象限，

故选：D．

3.（3分）将点 $M(-3, 2)$ 先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度后到达点 N （ ）

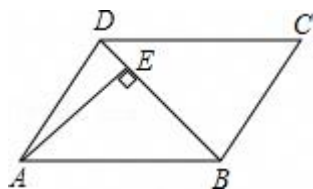
- A. $(-3, -2)$ B. $(0, -2)$ C. $(0, 2)$ D. $(-6, -2)$

【分析】根据将点向左平移 3 个单位，即横坐标减去 3，再根据将点向下平移 4 个单位，即纵坐标减去 4，可得答案．

【解答】解：将点 $M(-3, 2)$ 先向左平移 3 个单位长度，那么点 N 的坐标为 $(-3 - 3, 2 - 4)$ ，即 $(-6, -2)$ ．

故选：D．

4.（3分）如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $DB = DC$ ， $AE \perp BD$ 于 E ，则 $\angle DAE$ 等于（ ）



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

【分析】要求 $\angle DAE$ ，就要先求出 $\angle ADE$ ，要求出 $\angle ADE$ ，就要先求出 $\angle DBC$ ．利用 $DB = DC$ ， $C = 70^\circ$ 即可求出．

【解答】解：∵ $DB = DC$ ， $\angle C = 70^\circ$

$$\therefore \angle DBC = \angle C = 70^\circ,$$

又∵ $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle DBC = 70^\circ$$

$$\therefore AE \perp BD$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ \text{ 那么 } \angle DAE = 90^\circ - \angle ADE = 20^\circ$$

故选：A.

5. (3分) 顺次连接对角线相等的四边形的各边中点，所得图形一定是 ()

A. 平行四边形

B. 矩形

C. 菱形

D. 正方形

【分析】因为四边形的两条对角线相等，根据三角形的中位线定理，可得所得的四边形的四边相等，则所得的四边形是菱形.

【解答】解：如图， $AC = BD$ ， E 、 F 、 G 、 H 为 AB 、 BC 、 CD 、 AD 的中点，

则 EH 、 FG 分别是 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABC$ 的中位线，

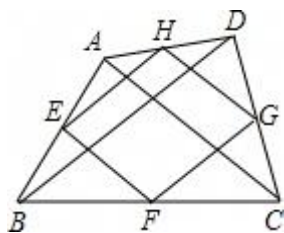
根据三角形的中位线的性质知， $EH = FG = \frac{1}{2}BD$ ， $EF = HG = \frac{1}{2}AC$ ，

$$\therefore AC = BD,$$

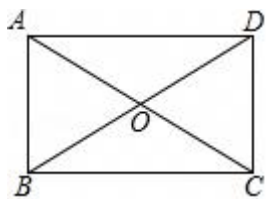
$$\therefore EH = FG = FG = EF,$$

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故选：C.



6. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ， $BO = DO$ ，那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是 ()



A. $\angle ABC = 90^\circ$

B. $AO = OC$

C. $AB \parallel CD$

D. $AB = CD$

【分析】根据矩形的判定定理：有一个角是直角的平行四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形分别进行分析即可．

【解答】解：A、 $\because \angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore OA = OB = OD,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AO = OB = OD = OC,$$

即对角线平分且相等，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，正确；

B、 $\because \angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore OA = OB = OD,$$

$$\because AO = OC,$$

$$\therefore AO = OB = OD = OC,$$

即对角线平分且相等，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，正确；

C、 $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because BO = DO,$$

$$\therefore OA = OB = OD,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle ADO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ODC,$$

$$\because \angle AOB = \angle DOC,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore \square ABCD$ 是矩形，正确；

D、 $\because \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = CD$ ，

无法得出 $\triangle ABO \cong \triangle DCO$ ，

故无法得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

进而无法得出四边形 $ABCD$ 是矩形，错误；

故选：D.

二、填空题 ($3 \times 12 = 36$)

7. (3分) 六边形的外角和的度数是 360° .

【分析】根据多边形外角和定理可得答案.

【解答】解：凸多边形的外角和为 360° ,

故答案为： 360° .

8. (3分) 若点 $P(m+3, 2m)$ 在 x 轴上, 则 $m = 0$.

【分析】根据 x 轴上的点的纵坐标为 0 可得： $2m = 0$, 然后进行计算即可解答.

【解答】解： $\because$ 点 $P(m+3, 2m)$ 在 x 轴上,

$$\therefore 2m = 0,$$

解得： $m = 0$,

故答案为： 4.

9. (3分) 在平面直角坐标系内有两点 $E(\sqrt{3}, -2)$ 、 $F(2\sqrt{3}, 2)$, 则线段 $EF = \sqrt{19}$.

【分析】根据勾股定理列式计算即可.

【解答】解：由勾股定理得： $EF = \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{19}$,

故答案为： $\sqrt{19}$.

10. (3分) 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 5cm$, $BC = 6cm$ 22 cm .

【分析】根据平行四边形 $ABCD$ 的周长 $= 2(AB + BC)$ 求解.

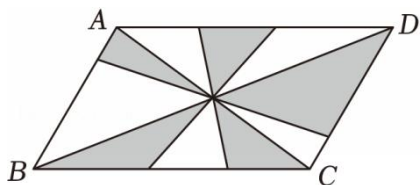
【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 都是平行四边形,

$$\therefore AB = CD = 5cm, BC = AD = 6cm,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长} = 2(AB + BC) = 2 \times (5 + 6) = 22 (cm).$$

故答案为： 22.

11. (3分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 的面积是 24, 图中分割线均经过对角线 AC 、 BD 的交点 12 .

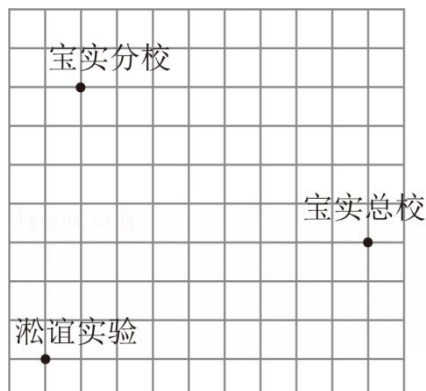


【分析】根据对称性观察可知阴影部分的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 的面积的一半.

【解答】解：平行四边形是中心对称图形, 阴影部分的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 的面积的一半 $= \frac{1}{2} \times 24 = 12$.

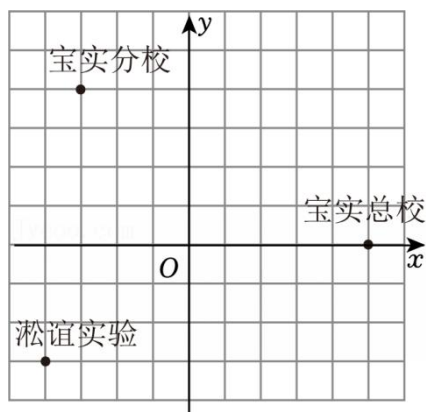
故答案为： 12.

12. (3分) 如图，地图上标注了宝实分校附近学校的位置，若标记宝实分校的坐标为 $(-3, 4)$ $(5, 0)$ ，
 淞谊实验学校的位置恰好在格点上，则其坐标为 $(-4, -3)$.



【分析】根据题意找到坐标原点并建立直角坐标系判断即可 .

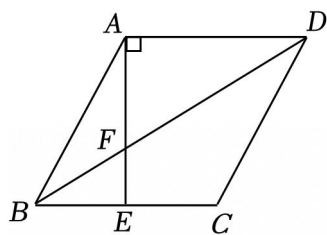
【解答】解：建立适当的平面直角坐标系如图所示：



淞谊实验学校的坐标为 $(-4, -3)$.

故答案为： $(-5, -3)$.

13. (3分) 如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 16， BC 的垂直平分线 EF 经过点 A $4\sqrt{3}$.



【分析】首先连接 AC ，由 BC 的垂直平分线 EF 经过点 A ，根据线段垂直平分线的性质，可得 AC 的长，由菱形的性质，可求得 $AC = AB = 4\text{cm}$ ，然后由勾股定理，求得 OB 的长，继而求得答案 .

【解答】解：连接 AC 交 BD 于 O ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 16，

$\therefore AB = 4$ ， $AC \perp BD$ ，

$\because BC$ 的垂直平分线 EF 经过点 A ,

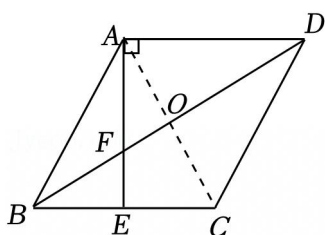
$$\therefore AC = AB = 4,$$

$$\therefore OA = \frac{6}{2}AC = 2,$$

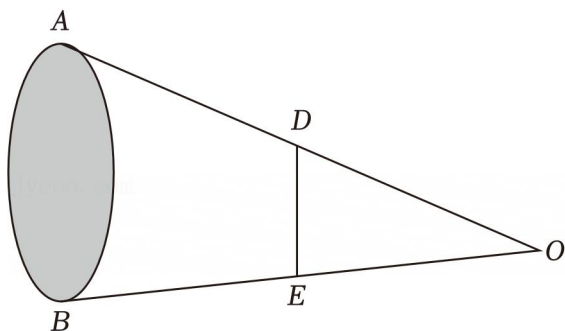
$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2OB = 4\sqrt{3}.$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.



14. (3 分) 如图, 是一座塔的俯视图, 现要测量塔基两侧 A 、 B 之间的距离, 于是在塔前广场上选一点 O , 找到 OA 和 OB 之间的中点 D 、 E , 则塔基两侧 A 、 B 之间的距离为 12 米.



【分析】 根据三角形的中位线定理解答即可.

【解答】 解: $\because$ 点 D 、 E 分别是 OA 和 OB 的中点,

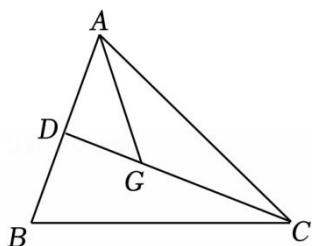
$\therefore DE$ 是 $\triangle ABO$ 的中位线,

$$\therefore AB = 2DE = 2 \times 2 = 12 \text{ (米)},$$

即 A 、 B 之间的距离为 12 米.

故答案为: 12.

15. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 为重心, 若 CD 平分 $\angle ACB$, $AC = 13$, 则 CG 的长为 8 .



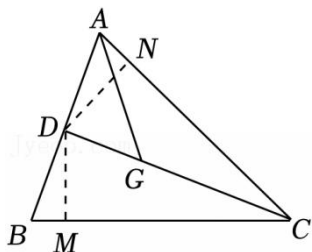
【分析】 根据三角形重心的性质进行计算即可.

【解答】解：∵点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

∴点 D 为 AB 中点，

即 $AD = BD$ 。

过点 D 分别作 BC 和 AC 的垂线，垂足分别为 M 和 N ，



又∵ CD 平分 $\angle ACB$ ，

∴ $DM = DN$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 和 $\text{Rt}\triangle BDM$ 中，

$$\begin{cases} AD = BD \\ DM = DN \end{cases},$$

∴ $\text{Rt}\triangle ADN \cong \text{Rt}\triangle BDM$ (HL)，

∴ $\angle NAD = \angle MBD$ ，

∴ $AC = BC$ ，

∴ $CD \perp AB$ 。

∵ $AC = 13$ ， $AB = 10$ ，

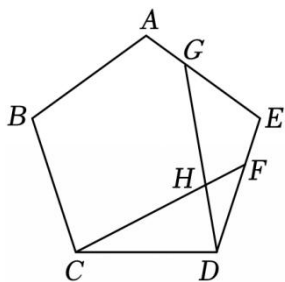
∴ $AD = 5$ ，

∴ $CD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ，

∴ $CG = \frac{2}{3}CD = 8$ 。

故答案为：8。

16. (3分) 如图，在每个内角都相等且每条边都相等的五边形 $ABCDE$ 中，点 F 、 G 在边 DE 、 AE 上，则 $\angle CHG =$ 108 度。



【分析】由五边形 $ABCDE$ 的各边都相等，各内角也都相等知 $CD = DE$ ， $\angle CDF = \angle DEG$ ，再结合 EF

$= AG$ ，利用“SAS”即可证明 $\triangle CDF \cong \triangle DEG$ ；再由 $\triangle CDF \cong \triangle DEG$ 知 $\angle FCD = \angle EDG$ ，据此得 $\angle CHG$
 $= \angle FCD + \angle HDC = \angle FCD + \angle HDC = \angle CDE$ ，从而得出答案．

【解答】证明： $\because$ 五边形 $ABCDE$ 的各边都相等，各内角也都相等，

$$\therefore CD = DE, \angle CDF = \angle DEG,$$

$$\therefore AG = EF,$$

$$\therefore GE = DF$$

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle DEG$ 中，

$$\begin{cases} CD = DE \\ \angle CDF = \angle EDG, \\ DF = GE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle DEG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle FCD = \angle EDG,$$

$$\therefore \angle GHC = \angle FCD + \angle HDC$$

$$= \angle FDC + \angle HDC$$

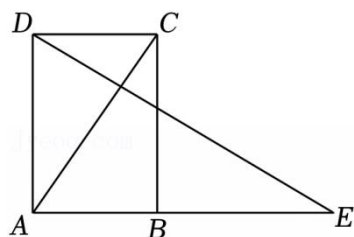
$$= \angle CDE$$

$$= \frac{3 \times 180^\circ}{5}$$

$$= 108^\circ.$$

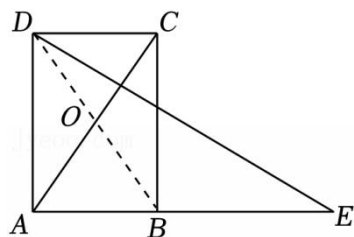
故答案为：108．

17. (3分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $\angle DAC = 40^\circ$ ，使 $BE = AC$ ，那么 $\angle E = \underline{25^\circ}$ ．



【分析】连接 BD ，由矩形的性质推出 $AC = BD$ ， $OA = OB$ ，得到 $\angle BAC = \angle ABD$ ，推出 $BE = BD$ ，因此 $\angle BDE = \angle E$ ，由三角形外角的性质得到 $\angle ABD = \angle E + \angle BDE$ ，再根据矩形即可之答案．

【解答】解：连接 BD ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AC = BD, \quad OB = \frac{1}{2}, \quad OA = \frac{7}{2},$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABD,$$

$$\therefore BE = AC,$$

$$\therefore BE = BD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle E,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle E + \angle BDE,$$

$$\therefore \angle DAC = 40^\circ .$$

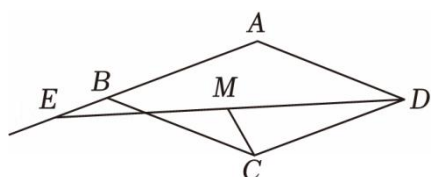
$$\therefore \angle BAC = 50^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = 50^\circ ,$$

$$\therefore \angle E = 25^\circ ,$$

故答案为: 25° .

18. (3 分) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AD = 4$, 点 E 在射线 AB 上运动, 点 M 是线段 DE 的中点 $\sqrt{2}$.



【分析】 确定动点 M 的轨迹, 点 E 在射线 AB 上运动, 点 M 是线段 DE 的中点, 根据三角形中位线性质, 取 AD 的中点 N , 连接 MN , 可得 MN 平行于 AB , 因此所有 M 点的轨迹是一条平行于 AB 的直线. 计算点到直线的最小距离即可.

【解答】 解: 菱形 $ABCD$ 中, 边长 $AD = 4$,

∴ AB 与 CD 平行,

AB 和 CD 两条平行线之间的距离为菱形的高,

$$\text{即 } 4 \times \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}.$$

D 点到 AB 的距离等于菱形的高 $2\sqrt{2}$,

E 在 AB 上, E 到 AB 的距离为 0,

因此中点 M 的轨迹直线到 AB 的垂直距离为 $\frac{2\sqrt{2} + 0}{2} = \sqrt{2}$.

该轨迹直线位于 AB 和 CD 之间,

因此点 C (在 CD 上) 到这条轨迹直线的垂直距离就是 CM 的最小值,

计算得 $2\sqrt{2} - \sqrt{6} = \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

三、解答题 (6+6+6+8+8+12 = 46)

19. (6分) 如果一个多边形的内角和是四边形内角和的5倍, 那么这个多边形的边数是多少?

【分析】根据多边形的内角和是四边形的内角和的5倍, 列出方程求解即可.

【解答】解: 设多边形的边数是 n , 内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$,

$\because$ 四边形的内角和是 360° , 根据多边形的内角和是四边形的内角和的5倍,

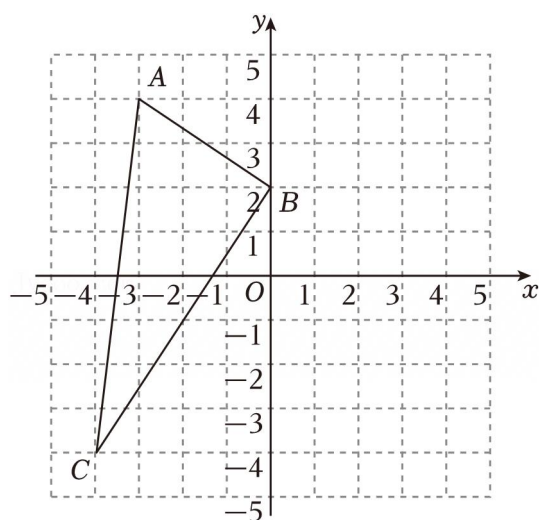
$\therefore (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 5$, 解得: $n = 12$.

20. (6分) 在由边长为1个单位长度的小正方形组成的网格中, 建立如图平面直角坐标系, 原点 O 及 $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上.

(1) 直接写出 A 、 B 、 C 的坐标;

(2) 请画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形;

(3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



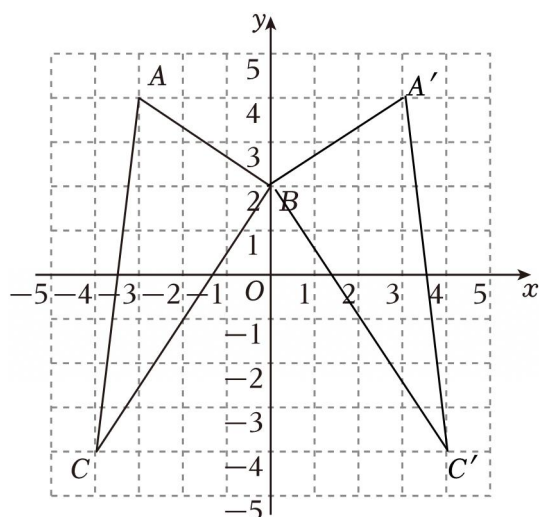
【分析】(1) 根据点的位置写出坐标;

(2) 利用轴对称变换的性质分别作出 A , C 的对应点 A' , C' 即可;

(3) 把三角形的面积看成矩形的面积减去周围的三个三角形面积即可.

【解答】解: (1) $A(-3, 4)$, $B(0, 2)$, $C(-3, -4)$;

(2) 如图, $\triangle A'BC'$ 即为所求;

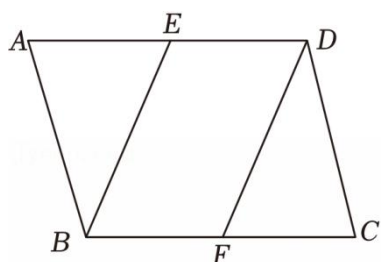


(3) $\triangle ABC$ 的面积 $= 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 13$.

21. (6分) 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 、 F 是边 AD 和 BC 的中点, 连接 BE 、 DF .

(1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

(2) 连接 BD , 若 BD 平分 $\angle EBF$, 求证: 四边形 $BFDE$ 是菱形.



【分析】 (1) 根据平行四边形的判定和性质定理即可得到结论;

(2) 如图, 根据平行线的性质得到 $\angle EDB = \angle FBD$, 根据角平分线的定义得到 $\angle EBD = \angle FBD$, 求得 $\angle EDB = \angle EBD$, 得到 $BE = DE$, 根据菱形的判定定理得到四边形 $BFDE$ 是菱形.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

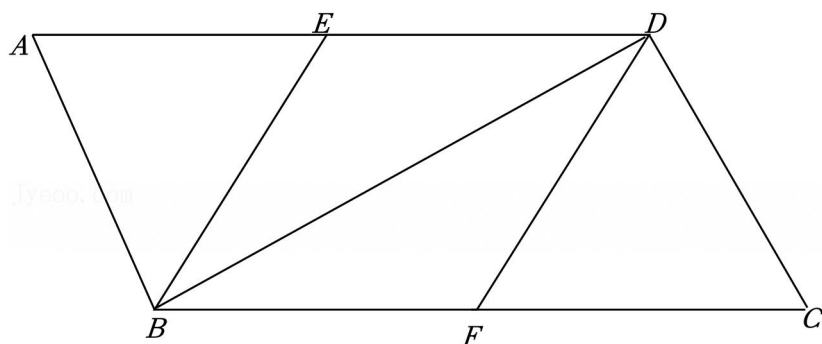
$\because$ 点 E 、 F 是边 AD 和 BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DE = BF,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形;

(2) 如图,



$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle EDB = \angle FBD,$

$\because BD$ 平分 $\angle EBF,$

$\therefore \angle EBD = \angle FBD,$

$\therefore \angle EDB = \angle EBD,$

$\therefore BE = DE,$

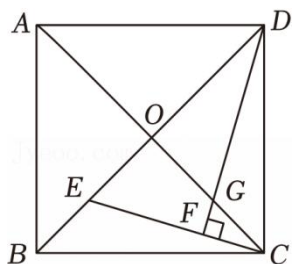
$\because$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是菱形.

22. (8分) 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 在 OB 上有一点 E , 交 OC 于点 G .

(1) 求证: $\triangle DOG \cong \triangle COE$;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的面积为 18, $OE = 2BE$, 求 DG 的长.



【分析】(1) 根据正方形的性质得到 $AC \perp BD$, $AC = BD$, $OD = \frac{1}{2}BD$, $OC = \frac{1}{2}AC$, 求得 $\angle DOG = \angle EOC = 90^\circ$, $OD = OC$, 得到 $\angle OGD = \angle OEC$, 根据全等三角形的判定定理得到结论;

(2) 根据正方形的性质得到 $AB = AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 求得 $BD = \sqrt{2}AB = 6$, 得到 $OD = OB = \frac{1}{2}BD = 3$, 根据勾股定理即可得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$, $AC = BD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \angle DOG = \angle EOC = 90^\circ$, $OD = OC$,

$$\because DF \perp CE,$$

$$\therefore \angle DFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODG + \angle DGO = \angle FDE + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OGD = \angle OEC,$$

在 $\triangle DOG$ 与 $\triangle COE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DOG = \angle COE \\ \angle OEC = \angle DGO, \\ OD = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DOG \cong \triangle COE \text{ (AAS)};$$

(2) 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 18,

$$\therefore AB = AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{2}AB = 6,$$

$$\therefore OD = OB = \frac{1}{2}BD = 3,$$

$$\because OE = 7BE,$$

$$\therefore OE = 2,$$

$$\because \triangle DOG \cong \triangle COE,$$

$$\therefore OG = OE = 2,$$

$$\therefore DG = \sqrt{OD^2 + OG^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

23. (8 分) 【问题提出】我们已经会用尺规作图画出已知线段的中点, 那么如何用尺规作图画出已知线段 MN 的三等分点呢?

【知识回顾】

利用三角形重心定理, 可以尺规作图画出任意一个三角形的中线的一个三等分点. 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{则线段 } \underline{DG} = \frac{1}{3}AD.$$

【问题解决】

(1) 方法一: 如图 3, 作法如下.

①过线段 MN 的端点 N 画一条直线 l , 以 N 为圆心, 任意长为半径画弧交直线 l 于点 A 、 B ;

②以点 B 、 M 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BM$ 的长为半径画弧, 交点的连线交 BM 于点 C ;

③连接 AC 交 MN 于点 G , 点 G 即线段 MN 的一个三等分点.

...

【解答】【知识回顾】解：连接 ED ，

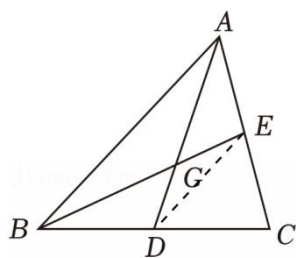


图2

$\because$ 中线 AD 与 BE 相交于点 G ,

$\therefore D, E$ 分别是边 BC ,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \triangle ACG \sim \triangle DEG$,

$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$,

$\therefore DG = \frac{1}{3}AD$,

故答案为: DG ;

(1) 如图所示, 点 H ;

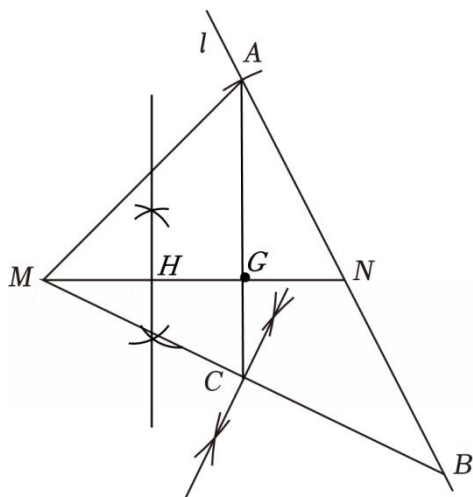


图3

(2) 证明: 由作图知, $AM = BN$,

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是平行四边形,

$\therefore AN \parallel BM, AM \parallel BN$,

$\because$ 点 C, D 分别是线段 BM 和 BN 的中点,

$$\therefore CM = \frac{7}{2}BM = \frac{1}{3}AN \frac{1}{2}BN = \frac{6}{2},$$

$$\therefore AN \parallel BM,$$

$$\therefore \triangle AHN \sim \triangle CHM,$$

$$\therefore \frac{AN}{CM} = \frac{HN}{HM},$$

$$\therefore \frac{HN}{HM} = 2,$$

$$\therefore MH = \frac{4}{3}MN,$$

$$\text{同理 } NG = \frac{1}{3}MN,$$

$$\therefore MH = NG = HG = \frac{1}{3}MN.$$

24. (12分) 在四边形 $ABCD$ 中, 边 AB 绕点 B 按顺时针方向旋转, 点 A 与点 M 重合, 联结 AM 、 CM 、 DM , 延长 AM 交边 CD 于点 N .

(1) 如图 1, 当四边形 $ABCD$ 是菱形时,

①若 $\angle ABC = 70^\circ$, 则 $\angle CMN = \underline{35}^\circ$ (直接写出度数);

②若 $\angle ABC = \alpha$, 用含 α 的式子表示 $\angle CMN$, 并说明理由;

(2) 如图 2, 当四边形 $ABCD$ 是正方形时, $AB = 5$. 作 $DP \parallel CM$ 交 AM 的延长线于点 P . 当 $\triangle DMP$ 是直角三角形时

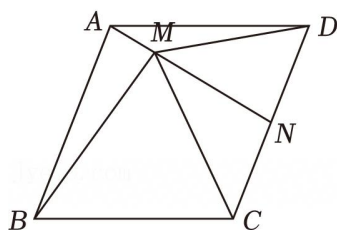


图1

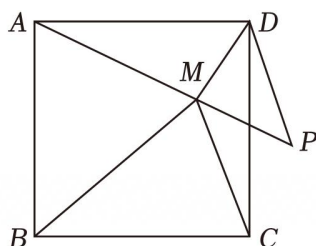
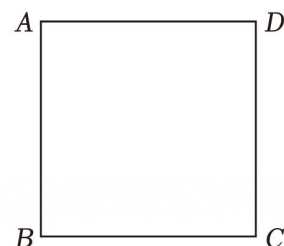


图2



备用图

【分析】(1) ①由旋转得 $AB = BM$, 菱形中 $AB = BC$, 因此 $BM = BC$, 代入 $\angle ABC = 70^\circ$, 直接套用后续推导的通用结论, 得到结果为 35;

②设旋转角为 θ , 分别计算两个等腰三角形 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BMC$ 的底角利用平角 180° 减去两个底角, 消去参数 θ , 得到 $\angle CMN$ 仅和 α 相关的表达式;

(2) 分类讨论思路: 先代入正方形的 $\alpha = 90^\circ$, 得到 $\angle CMN = 45^\circ$ 由平行线性质得到 $\angle P = 45^\circ$ 排除不可能为直角的 $\angle P$, 分两种直角情况建立坐标系, 结合圆的轨迹条件求解点 M 坐标, 最终计算得到 DP 的两个合法长度.

【解答】解：（1）①∵菱形 $ABCD$ ， AB 绕 B 顺时针旋转至 BM ，

故 $BA = BM = BC$ ，

∴ $\triangle ABM$ 、 $\triangle BMC$ 均为等腰三角形，

设 $\angle ABM = \theta$ ，则 $\angle MBC = 70^\circ - \theta$ ，

$$\angle BMA = \frac{180^\circ - \theta}{2}, \quad \angle BMC = \frac{180^\circ - (70^\circ - \theta)}{2} = \frac{110^\circ + \theta}{2},$$

$$\angle AMC = \angle BMA + \angle BMC = \frac{180 - \theta + 110 + \theta}{2} = 145^\circ,$$

$$\angle CMN = 180^\circ - \angle AMC = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ,$$

故答案为： 35° ；

②用含 α 的式子表示 $\angle CMN$ ：由旋转性质得 $AB = BM$ ，菱形中 $AB = BC$ ，

因此 $BM = BC$ 。

$$\text{设旋转角 } \angle ABM = \theta: \text{ 计算等腰 } \triangle ABM \text{ 的底角: } \angle BMA = \frac{180^\circ - \theta}{2},$$

计算 $\angle MBC$ 的度数： $\angle MBC = \alpha - \theta$ ，

$$\text{计算等腰 } \triangle BMC \text{ 的底角: } \angle BMC = \frac{180^\circ - (\alpha - \theta)}{2},$$

$$\text{由平角性质: } \angle CMN = 180^\circ - \angle BMA - \angle BMC = 180^\circ - \frac{180^\circ - \theta}{2} - \frac{180^\circ - \alpha + \theta}{2} = \frac{\alpha}{2};$$

$$(2) \text{ 正方形中 } AB = BC = 5, \angle ABC = 90^\circ \quad \angle CMN = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

由 $DP \parallel CM$ ，得 $\angle P = \angle CMN = 45^\circ$ ，

已知点 M 在 A 、 P 之间，分两种情况讨论。

情况 6： $\angle DMP = 90^\circ$ ，此时 $\angle MDP = \angle P = 45^\circ$ ， $DP = \sqrt{2} DM$ ，

建立平面直角坐标系：设 $B(0, 6)$ ， $A(5, 0)$ ， $C(5, 5)$ ，

由 $BM = 5$ 且 $\angle AMD = 90^\circ$ ，

解得 $M(4, 6)$ ，

$$\text{计算得 } DM = \sqrt{(5-4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{因此 } DP = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

情况 2： $\angle MDP = 90^\circ$ ，

此时 $\angle DMP = \angle P = 45^\circ$ ， $DM = DP$ ，且 $\angle AMD = 135^\circ$ ，

$$\text{解得 } M(3, 6) \quad DM = \sqrt{(5-3)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{因此 } DP = \sqrt{5},$$

综上, DP 的长为 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt{10}$.