

上海市松江区 2026-2025 学年第二学期八年级数学期中质量监测试卷

(满分: 100 分 完成时间: 90 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一个多边形的每一个外角都等于 40° , 那么这个多边形的内角和为()

- A. 1260° B. 1080° C. 1620° D. 360°

【答案】A

【解析】

【分析】先利用 $360^\circ \div 40^\circ$ 求出多边形的边数, 再根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 计算即可求解.

【详解】 $360^\circ \div 40^\circ = 9$,

$$\therefore (9-2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ.$$

故选 A.

【点睛】此题考查多边形内角与外角, 解题关键在于掌握运算公式.

2. $\square ABCD$ 中, $\angle A$ 的度数为 100° , 则 $\angle C =$ ()

- A. 60° B. 80° C. 100° D. 120°

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的对角相等的性质即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

$$\because \angle A = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 100^\circ.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质, 注意掌握平行四边形的对角相等的性质.

3. 在平面直角坐标系中, 若点 $A(a, -1)$ 与点 $B(3, b)$ 关于 x 轴对称, 则 ()

- A. $a = 3, b = -1$ B. $a = -3, b = 1$ C. $a = -3, b = -1$ D. $a = 3, b = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】在平面直角坐标系中, 关于 x 轴对称的点的横坐标相等, 纵坐标互为相反数.

【详解】解: $\because$ 点 $A(a, -1)$ 与点 $B(3, b)$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore a=3, b=-(-1)=1,$$

即 $a=3, b=1$.

4. 下列图形，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 平行四边形 B. 梯形 C. 菱形 D. 等边三角形

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【详解】解：A、平行四边形不是轴对称图形，因为找不到任何这样的一条直线，沿这条直线对折后它的两部分能够重合，不是轴对称图形，但是中心对称图形. 故错误；

B、不一定是轴对称图形，不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，旋转 180° 后它的两部分能够重合，不满足中心对称图形的定义. 故错误；

C、是轴对称图形，也是中心对称图形. 故正确；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，旋转 180° 后它的两部分能够重合，不满足中心对称图形的定义. 故错误.

故选 C.

5. 在平面直角坐标系中，A，B，C 三点坐标分别是 $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ ， $(3, 2)$ ，以 A，B，C 三点为顶点画平行四边形，则第四个顶点不可能在 () .

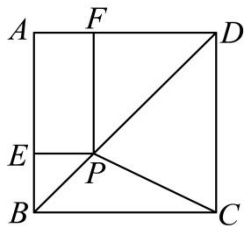
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【详解】A 点在原点上，B 点在横轴上，C 点在第一象限，根据平行四边形的性质：两组对边分别平行，可知第四个顶点可能在第一、二、四象限，不可能在第三象限，故选 C

6. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6， P 是对角线 BD 上的一点， $PF \perp AD$ 于点 F ， $PE \perp AB$ 于点 E ，连接 PC ，当 $PE:PF=1:2$ 时，则 PC 的长为 ()



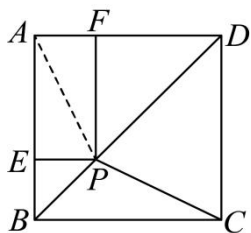
- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】连接 AP ，由正方形的性质可得 $AD = BC = 6$ ， $\angle ADB = \angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，证明四边形 $AEPF$ 是矩形，得出 $PE = AF$ ， $\angle PFD = 90^\circ$ ，从而可得 $\triangle PFD$ 是等腰直角三角形，即可得出 $PF = DF$ ，结合题意求出 $AF = 2$ ， $DF = 4$ ，从而可得 $PF = 4$ ， $PA = 2\sqrt{5}$ ，再证明 $\triangle ABP \cong \triangle CBP$ (SAS)，即可得出结果.

【详解】解：如图，连接 AP ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AD = BC = 6$ ， $\angle ADB = \angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，
 $\because PF \perp AD$ ， $PE \perp AB$ ，
 $\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，
 $\therefore PE = AF$ ， $\angle PFD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle PFD$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore PF = DF$ ，
 $\because PE : PF = 1 : 2$ ，
 $\therefore AF : DF = 1 : 2$ ，
 $\therefore AF = 2$ ， $DF = 4$ ，
 $\therefore PF = 4$ ，
 $\therefore PA = \sqrt{AF^2 + PF^2} = 2\sqrt{5}$ ，
 $\because AB = BC$ ， $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$ ， $BP = BP$ ，
 $\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP$ (SAS)，
 $\therefore PA = PC = 2\sqrt{5}$ 。

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 如果从多边形的一个顶点出发的对角线有 9 条，那么它的边数是_____。

【答案】 12

【解析】

【分析】本题主要考查了多边形的边数与对角线条数的关系，解题的关键是熟练掌握 n 边形从一个顶点出发的对角线最多可画的条数为 $n-3$ 。

根据 n 边形从一个顶点出发的对角线最多可画的条数为 $n-3$ ，求出多边形的边数即可。

【详解】解：∵ 多边形从一个顶点出发的对角线最多可画 9 条，

$$\therefore n-3=9,$$

$$\therefore \text{多边形的边数为: } 9+3=12.$$

故答案为：12.

8. 在平面直角坐标系中，已知点 $P(a+2, a-2)$ 在 y 轴上，那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据 y 轴上的点的坐标特点即可求解。

【详解】根据平面直角坐标系中 y 轴上点的特点，可知其横坐标为 0，因此可得 $a+2=0$ ，解得 $a=-2$ 。

故答案为：-2。

【点睛】此题主要考查点的坐标特点，解题的关键是熟知 y 轴上的点的坐标特点。

9. 已知 $A(-2,1)$ ，直线 AB 平行于 y 轴， $AB=5$ ，那么点 B 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(-2,6)$ 或 $(-2,-4)$

【解析】

【分析】根据 A 点坐标及直线 $AB \parallel y$ 轴可知点 A 和点 B 的横坐标相等，再由 $AB=5$ ，分类讨论求出 B 的纵坐标即可。

【详解】∵ $A(-2,1)$ ，直线 AB 平行于 y 轴， $AB=5$ ，

∴ 分类：①点 B 在点 A 的上方，则 $B(-2,1+5)$ ，即 $B(-2,6)$ ；

②点 B 在点 A 的下方，则 $B(-2,1-5)$ ，即 $B(-2,-4)$ 。

综上，点 B 的坐标 $(-2,6)$ 或 $(-2,-4)$ 。

10. 如果点 P 在第二象限内，点 P 到 x 轴的距离是 3，到 y 轴的距离是 4，那么点 P 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(-4,3)$

【解析】

【分析】本题考查坐标系中点的坐标特征，掌握好点的坐标与点到坐标轴的关系是关键.

根据第二象限内点的坐标特征，横坐标为负，纵坐标为正；点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值，点到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值，由此求解.

【详解】解：点 P 到 x 轴的距离是 3，因此纵坐标的绝对值为 3，即 $|y|=3$ ；

点 P 到 y 轴的距离是 4，因此横坐标的绝对值为 4，即 $|x|=4$.

由于点 P 在第二象限，横坐标为负，纵坐标为正，

故 $x=-4$ ， $y=3$ ，

即点 P 的坐标为 $(-4,3)$.

故答案为： $(-4,3)$.

11. *DeepSeek* 公司正在开发一款基于平面直角坐标系下的导航软件. 为测试软件的准确性，工程师在坐标系中设置了以下关键点： $A(1,6)$ 表示起点， $B(5,8)$ 表示终点. 如果软件需要在线段 AB 之间设置一个中转站，且中转站到点 A 和点 B 的距离相等，则中转站的坐标为_____.

【答案】 $(3,7)$

【解析】

【分析】本题主要考查了中点坐标公式，熟练掌握中点坐标公式，是解题的关键. 设中转站的坐标为 (x,y) ，根据中点坐标公式进行求解即可.

【详解】解：设中转站的坐标为 (x,y) ，

$\therefore$ 中转站到点 A 和点 B 的距离相等，

$\therefore$ 中转站为 AB 的中点，

$$\therefore x = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y = \frac{6+8}{2} = 7,$$

$\therefore$ 中转站的坐标为 $(3,7)$.

故答案为： $(3,7)$.

12. 若平行四边形的周长为 28，相邻两边的差为 4，则较短边的长为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质和二元一次方程组的应用，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

根据平行四边形周长求出相邻两边之和，再根据差列出方程组求解.

【详解】解：设较长边为 a ，较短边为 b ，

由平行四边形性质，相邻两边之和为周长的一半，

即 $a+b=14$ ，

又相邻两边差为 4，即 $a-b=4$ ，

得方程组 $\begin{cases} a+b=14 \\ a-b=4 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} a=9 \\ b=5 \end{cases}$ ，

故较短边长为 5，

故答案为：5.

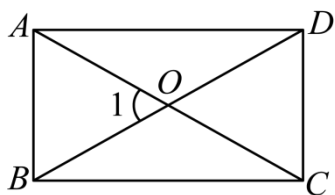
13. 矩形的两条对角线的夹角为 60° ，一条对角线长为 2，则矩形的面积为_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题主要考查了矩形对角线相等且互相平分的性质，等边三角形的判定，勾股定理在直角三角形中的运用，本题中根据勾股定理计算 BC 的长是解题的关键. 根据矩形的两条对角线的夹角为 60° ，可以判定 $\triangle AOB$ 为等边三角形，即可求得 $AB=AO$ ，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 AC ， AB ，根据勾股定理即可计算 BC 的长，进而计算矩形的周长即可解题.

【详解】解：如图，



矩形的两条对角线的夹角为： $\angle 1 = 60^\circ$ ，

$\because$ 矩形对角线相等且互相平分，

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

$\therefore AB = AO = \frac{1}{2} AC = 1$ ，

在直角 $\triangle ABC$ 中， $AC = 2$ ， $AB = 1$ ，

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$ ，

故矩形的面积为： $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

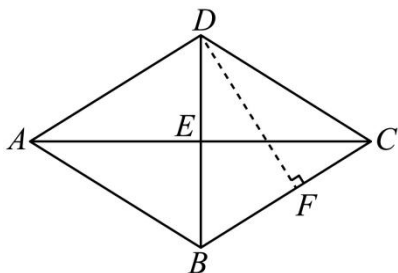
14. 若菱形的两条对角线长分别是 6cm 和 8cm, 则菱形一边上的高是_____cm.

【答案】 4.8

【解析】

【分析】 本题考查菱形中求线段长, 涉及菱形性质求面积、勾股定理、等面积法求线段长等知识, 熟记菱形性质是解决问题的关键. 根据题意, 作出图形, 先求出面积, 再利用菱形对角线相互垂直平分, 由勾股定理求出菱形边长后, 利用等面积法列式求解即可得到答案.

【详解】 解: 如图所示:



$\because$ 菱形的两条对角线长分别是 6cm 和 8cm, 不妨令 $AC = 8, BD = 6$,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 则在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $DE = \frac{1}{2} BD = 3, EC = \frac{1}{2} AC = 4$, 由勾股定理可得

$$DC = \sqrt{DE^2 + EC^2} = 5,$$

$\because DF \perp BC$,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = 24 = BC \cdot FD = 5FD, \text{ 解得 } FD = \frac{24}{5} = 4.8,$$

故答案为: 4.8.

15. 平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 4\sqrt{3}, BD = 4, AB$ 边上的高是 $2\sqrt{3}$, 则平行四边形 $ABCD$ 的周长是_____.

【答案】 $8 + 8\sqrt{3}$ 或 $16 + 8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 需分两种情况讨论, AB 边上高的垂足位置分垂足在 AB 边上和垂足在 AB 延长线上两种, 利用勾股定理求出 AB 的长, 再根据平行四边形周长公式计算即可.

【详解】 解: 设 AB 边上的高为 DE , $DE = 2\sqrt{3}$, $DE \perp AE$, E 为垂足.

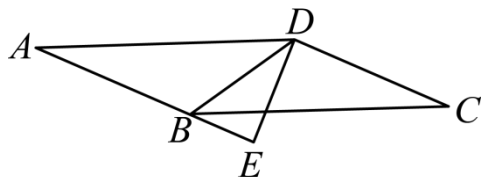
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理得:

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDE \text{ 中, } BE = \sqrt{DB^2 - DE^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2,$$

分两种情况讨论:

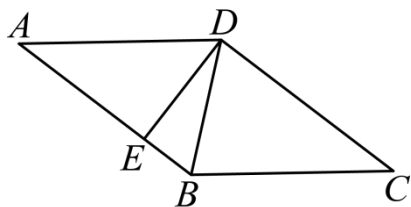
情况 1: 垂足 E 在 AB 的延长线上时, 如图



$$\text{此时 } AB = AE - BE = 6 - 2 = 4.$$

$$\text{平行四边形周长为 } 2(AD + AB) = 2(4\sqrt{3} + 4) = 8 + 8\sqrt{3}.$$

情况 2: 垂足 E 在 AB 边上时, 如图

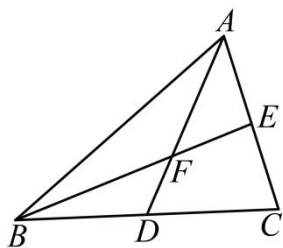


$$\text{此时 } AB = BE + AE = 2 + 6 = 8.$$

$$\text{平行四边形周长为 } 2(AD + AB) = 2(4\sqrt{3} + 8) = 16 + 8\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{平行四边形周长为 } 8 + 8\sqrt{3} \text{ 或 } 16 + 8\sqrt{3}.$$

16. 如图, ABC 的中线 AD 、 BE 相交于点 F . 若 $\triangle ABF$ 的面积为 3, 则四边形 $CEFD$ 的面积为_____.



【答案】3

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的面积, 熟记三角形的中线把三角形分成面积相等的两个三角形是解题的关键. 根据等底等高的三角形的面积相等可知三角形的中线把三角形分成面积相等的两个三角形, 然后表示

出 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 再表示出 $S_{\triangle ABF}$ 与 $S_{\text{四边形}CEFD}$, 即可得解.

【详解】 $\because AD、BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

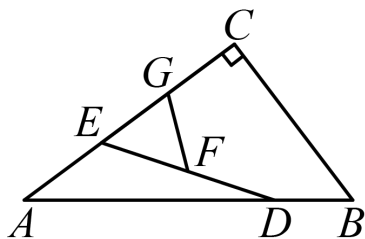
$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AEF}, \quad S_{\text{四边形}CEFD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AEF},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\text{四边形}CEFD} = 3,$$

故答案为 3.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 4$, $D、E$ 分别是边 $AB、AC$ 上的动点, $F、G$ 分别是 $ED、EC$ 的中点, 则 FG 的最小值是_____.

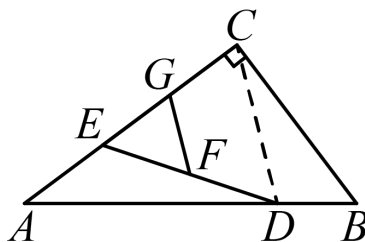


【答案】 $\frac{6}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形中位线定理, 勾股定理解三角形. 连接 CD , 根据三角形中位线的性质定理得出 $FG = \frac{1}{2}CD$, 由勾股定理求出 BC , 再根据三角形等面积法求出 CD , 即可得出结果.

【详解】 解: 连接 CD ,



$\therefore F、G$ 分别是 $ED、EC$ 的中点,

$\therefore FG$ 是 $\triangle FDC$ 的中位线,

$$\therefore FG = \frac{1}{2}CD,$$

当 CD 最小时, FG 最小,

当 $CD \perp AB$ 时, CD 最小,

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 4$,

$$\text{则 } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3,$$

当 $CD \perp AB$ 时,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} AB \times CD,$$

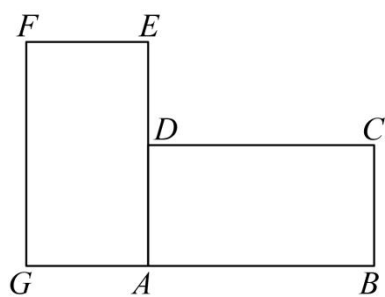
$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times CD,$$

$$\text{解得: } CD = \frac{12}{5},$$

$$\therefore FG \text{ 的最小值为 } \frac{6}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{6}{5}.$$

18. 已知有两个完全相同的矩形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 摆成如图的形状, 将矩形 $AEFG$ 绕点 A 转动 α 度 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 点 E 、 F 、 G 分别对应点 E' 、 F' 、 G' , 当点 E' 落在直线 CD 上时, 连接 BG' 交直线 AE' 于点 M , 若 $AB = 5$, $AD = 3$, 则 $AM =$ _____.

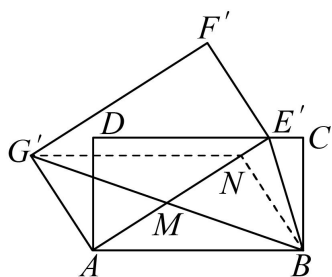


【答案】 2

【解析】

【分析】过点 B 作 $BN \perp AE'$, 垂足为 N , 连接 NG' , 先由矩形全等和勾股定理求 DE' , 再用面积法求 BN , 证 AG' 平行且等于 BN 得平行四边形 $ABNG'$, 利用对角线平分即可求出 AM .

【详解】解: 如图, 过点 B 作 $BN \perp AE'$, 垂足为 N , 连接 NG' ,



$$\therefore \angle BNA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 与 $AEFG$ 完全相同,

$$\therefore AB = CD = AE' = 5, \quad AD = BC = AG' = 3, \quad \angle D = \angle C = \angle G'AE' = 90^\circ,$$

$$\therefore DE' = \sqrt{AE'^2 - AD^2} = 4,$$

$$\therefore CE' = CD - DE' = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE'} = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle ADE'} - S_{\triangle BCE'} = 3 \times 5 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{15}{2},$$

$$S_{\triangle ABE'} = \frac{1}{2} AE' \cdot BN,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times BN = \frac{15}{2},$$

解得 $BN = 3$,

$$\therefore AG' = BN, \quad AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = 4,$$

$$\therefore \angle BNA = \angle G'AE' = 90^\circ,$$

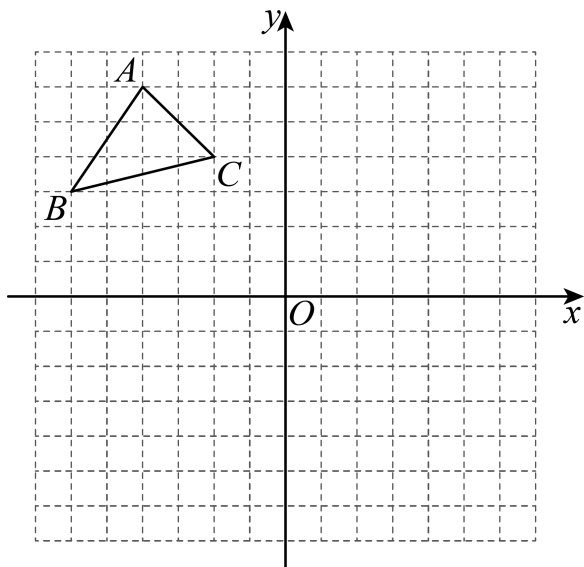
$$\therefore AG' \parallel BN,$$

$\therefore$ 四边形 $ABNG'$ 是平行四边形,

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AN = 2.$$

三、解答题: (本大题共 8 题, 第 19~24 题每题 8 分, 第 25 题 10 分, 满分 58 分)

19. 如图, 网格中每个小方格是边长为 1 个单位的小正方形, ABC 的位置如图所示.



(1) 写出点 A 、 B 、 C 的坐标: A _____, B _____, C _____;

(2) 平移 ABC , 使点 C 移动到点 $F(4, -1)$.

①画出平移后的 $\triangle DEF$, 其中点 D 与点 A 对应, 点 E 与点 B 对应 (不写画法, 写出结论);

②若点 $P(m, n)$ 在 ABC 内, 其平移后的对应点为 P' , 写出 P' 的坐标: P' _____. (用含 m , n 的代数式表示)

【答案】 (1) $A(-4, 6)$, $B(-6, 3)$, $C(-2, 4)$

(2) ①图见解析

② $P'(m+6, n-5)$.

【解析】

【分析】(1) 根据平面直角坐标系坐标的规则：横坐标左负右正、纵坐标下负上正，数格点可得 A 、 B 、 C 的坐标；

(2) ① 点 $C(-2, 4)$ 移动到点 $F(4, -1)$ 的坐标变化，得出平移规则为向右平移 6 个单位，向下平移 5 个单位，根据对应关系，给 A 、 B 坐标按平移规则计算得到 D 、 E 坐标，连接 D 、 E 、 F 即得到平移后的三角形；

② 所有点都遵循相同的平移规律，点 $P(m, n)$ 平移后横坐标加 6，纵坐标减 5，因此对应点 P' 坐标为 $(m+6, n-5)$.

【小问 1 详解】

解： $A(-4, 6)$ ， $B(-6, 3)$ ， $C(-2, 4)$ ；

【小问 2 详解】

解： ① 点 $C(-2, 4)$ 移动到点 $F(4, -1)$ ，

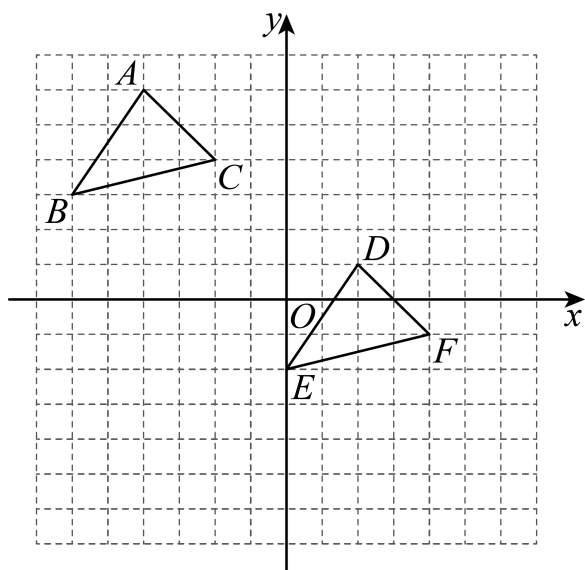
横坐标变化： $4 - (-2) = 6$ ， 得： 向右平移 6 个单位，

纵坐标变化： $-1 - 4 = -5$ ， 得： 向下平移 5 个单位，

$\therefore A(-4, 6)$ 平移后： $D(-4+6, 6-5) = (2, 1)$ ，

$B(-6, 3)$ 平移后： $E(-6+6, 3-5) = (0, -2)$ ，

平移后 $\triangle DEF$ 的三个顶点坐标为 $D(2, 1)$ ， $E(0, -2)$ ， $F(4, -1)$ ， 连接三点即可得到平移后的三角形；



② $\because$ 平移 ABC ，使点 C 移动到点 $F(4, -1)$ ，

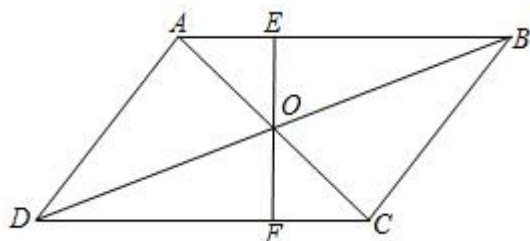
$\therefore$ 点 $P(m, n)$ 在 ABC 内, 向右平移 6 个单位, 向下平移 5 个单位,

$\therefore P'(m+6, n-5)$.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , 过点 O 任意作直线分别交 AB 、 CD 于点 E 、 F .

(1) 求证: $\triangle AEO \cong \triangle CFO$;

(2) 若 $CD = 6$, $AD = 5$, $OE = 2$, 求四边形 $AEFD$ 的周长.



【答案】(1) 见解析; (2) 15

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$, $OA = OC$, 求出 $\angle EAO = \angle FCO$, 根据 ASA 推出 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$;

(2) 由 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$, 可得 $EF = 2OE = 4$, $DF + AE = AB = 6$, 继而求出答案.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel DC$, $OA = OC$,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$,

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$ (ASA),

(2) 解: $\because \triangle OAE \cong \triangle OCF$,

$\therefore CF = AE$, $OE = OF$,

$\therefore DF + AE = CD = AB = 6$,

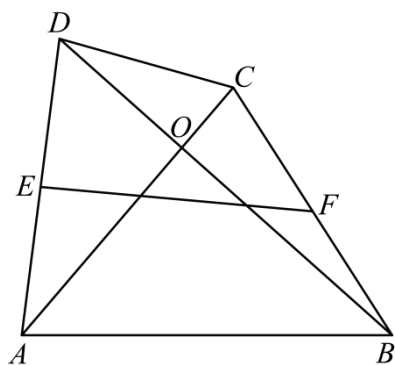
又 $\because EF = 2OE = 4$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 的周长 $= AD + DF + AE + EF = 6 + 4 + 5 = 15$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质, 注意掌握数形结合思想.

21. 如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , 且 $AC \perp BD$, $AC = 6$, $BD = 6\sqrt{2}$, E 、 F 分

别是 AD 、 BC 的中点，连接 EF 。



(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 求 EF 的长。

【答案】(1) $18\sqrt{2}$

(2) $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ACB}$ 求解即可；

(2) 取 AB 中点 P ，连接 PE ， PF ，根据三角形的中位线定义得出 $EP = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}$ ， $EP \parallel BD$ ， $PF = \frac{1}{2}AC = 3$ ， $PF \parallel AC$ ，根据平行线的性质并结合 $AC \perp BD$ 可得出 $PE \perp PF$ ，最后在 $\text{Rt}\triangle PEF$ 中，根据勾股定理求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because AC \perp BD, AC = 6, BD = 6\sqrt{2}$ ，

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ACB}$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot DO + \frac{1}{2}AC \cdot BO$$

$$= \frac{1}{2}AC(AO + BO)$$

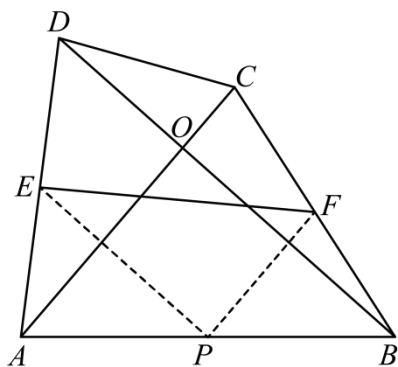
$$= \frac{1}{2}AC \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2}$$

$$= 18\sqrt{2}；$$

【小问 2 详解】

解：取 AB 中点 P ，连接 PE ， PF ，



$\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore EP = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}, \quad EP \parallel BD,$$

$\because AC \perp BD,$

$\therefore EP \perp AC,$

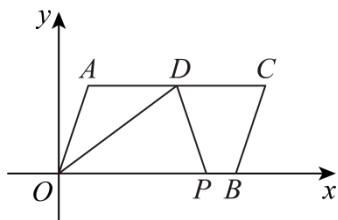
$\because F$ 是 BC 的中点, P 是 AB 的中点,

$$\therefore PF = \frac{1}{2}AC = 3, \quad PF \parallel AC,$$

$\therefore PE \perp PF,$

$$\therefore EF = \sqrt{EP^2 + FP^2} = 3\sqrt{3}.$$

22. 在平面直角坐标系中, 四边形 $AOBC$ 的四个顶点坐标分别是 $A(1,3)$, $O(0,0)$, $B(6,0)$, $C(7,3)$, D 为 AC 的中点, 点 P 在 x 轴正半轴上.



(1) 求证: 四边形 $AOBC$ 是平行四边形;

(2) 若 $\triangle OPD$ 为等腰三角形, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) 见解析 (2) $(5,0)$ 或 $(8,0)$ 或 $(\frac{25}{8},0)$

【解析】

【分析】 本题考查了点的坐标, 平行四边形的判定、等腰三角形的定义, 勾股定理等知识,

(1) 根据坐标可以得出 $AC \parallel OB$, $AC = OB$, 由此即可判定四边形 $AOBC$ 是平行四边形;

(2) 根据中点坐标公式求出点 D 的坐标, 设 $P(m,0)$ ($m > 0$), 分三种情况讨论: $OP = OD$; $OP = PD$;

$OD = PD$, 根据两点间距离公式构建关于 m 的方程求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because A(1,3), O(0,0), B(6,0), C(7,3),$

$$\therefore AC \parallel OB, AC = OB = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBC$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

解: 设 $P(m,0)(m>0),$

$\because A(1,3), C(7,3), D$ 为 AC 的中点,

$$\therefore D\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+3}{2}\right), \text{ 即 } D(4,3),$$

在 $\triangle OPD$ 中, $OD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

$$PD = \sqrt{(m-4)^2 + 3^2},$$

$$OP = m,$$

①当 $OP = OD$ 时, $m = 5,$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5,0);$

②当 $OP = PD$ 时, $m = \sqrt{(m-4)^2 + 3^2},$ 解得 $m = \frac{25}{8},$

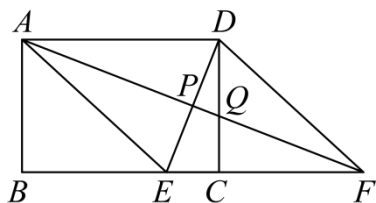
$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{25}{8}, 0\right);$

③当 $OD = PD$ 时, $5 = \sqrt{(m-4)^2 + 3^2},$ 解得 $m = 8$ 或 $m = 0$ (舍去),

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(8,0);$

综上, 点 P 的坐标为 $(5,0)$ 或 $(8,0)$ 或 $\left(\frac{25}{8}, 0\right).$

23. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC,$ 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 BC 的延长线上, 四边形 $AEFD$ 的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q , 且 $PD = PE, DE$ 平分 $\angle ADF.$



(1) 求证: 四边形 $AEFD$ 是菱形;

(2) 如果 $BC = EF$, $\angle EDC = \angle EFP$, 试判断四边形 $ABCD$ 的形状, 并说明理由.

【答案】(1) 详见解析 (2) 矩形; 详见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、菱形的判定与性质以及矩形的判定:

(1) 利用平行线的性质和角平分线的定义证明 $\triangle DEF$ 是等腰三角形, 得到 $DF = EF$, 通过 $\triangle ADP \cong \triangle FEP$ 得到 $AD = EF$, 结合 $AD \parallel EF$ 判定四边形 $AEFD$ 为平行四边形, 利用邻边相等即可判定;

(2) 先证明 $AD = BC$, 再证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 利用菱形对角线互相垂直和三角形内角和定理证明 $\angle BCD = 90^\circ$, 从而判定为矩形.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 BC 的延长线上,

$$\therefore AD \parallel EF$$

$$\therefore \angle ADP = \angle FED,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle FDE,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle FED,$$

$$\therefore DF = EF,$$

在 $\triangle ADP$ 与 $\triangle FEP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle ADP = \angle FEP \\ PD = PE \\ \angle APD = \angle FPE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle FEP (\text{ASA}),$$

$$\therefore AD = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

$$\because DF = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是菱形.

【小问 2 详解】

矩形.

解: $\because AD = EF$, $AD \parallel EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore EF = AD$,

$\therefore BC = EF$,

$\therefore AD = BC$,

$\therefore DF = EF, PD = PE$,

$\therefore FP \perp DE$,

$\therefore \angle EDC = \angle EFP, \angle CQF = \angle DQP$,

$\therefore \angle DPQ = \angle FCQ = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

24. 图 1、图 2 均为 4×5 的正方形网格, 每个小正方形的顶点称为格点, 点 A, B 均在格点上, 点 P 为线段 AB 上的一点. (仅用无刻度的直尺作图.)

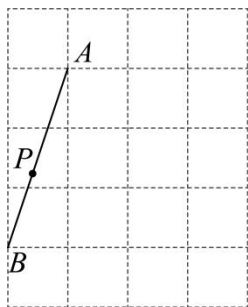


图1

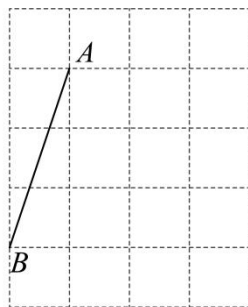


图2

- (1) 在图 1 中, 画出一个以 AB 为边的正方形 $ABCD$ (保留作图痕迹).
- (2) 在 (1) 的基础上, 在边 CD 上画点 Q , 使得 PQ 平分正方形 $ABCD$ 的面积 (保留作图痕迹).
- (3) 在图 2 中, 画出一个以 AB 为边的非正方形的菱形 $ABEF$ (保留作图痕迹), 连结此菱形各边中点所形成的四边形为_____.

【答案】 (1) 画图见解析

(2) 画图见解析 (3) 画图见解析, 矩形

【解析】

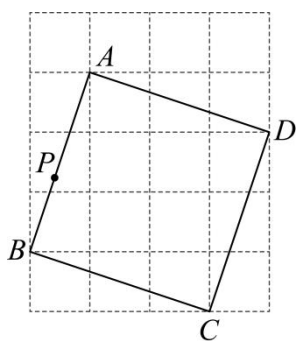
【分析】 此题考查了菱形和正方形的判定、矩形的性质、勾股定理与网格问题等知识, 熟练掌握特殊平行四边形的判定是解题的关键.

- (1) 根据勾股定理和网格的特点, 正方形的判定进行作图即可;
- (2) 根据正方形和矩形的中心对称性即可作图;

(3) 根据菱形的判定和勾股定理，三角形中位线定理、矩形的判定等知识作图和解答即可.

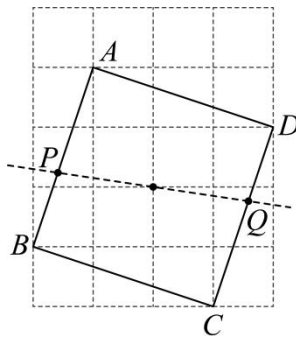
【小问 1 详解】

解：如图正方形 $ABCD$ 即为所求；



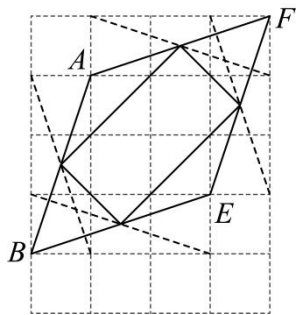
【小问 2 详解】

解：如图



【小问 3 详解】

解：如图，



连结此菱形各边中点所形成的四边形为矩形，

故答案为：矩形

25. 综合与实践

【问题情境】在书法课上，为了实现图1的书写效果，需要解决“将正方形书法纸折出均等的三列”的问题. 在学习了特殊平行四边形知识后，小华和小海以“正方形的折叠”为主题展开了探索.

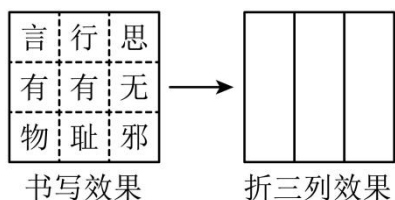


图1

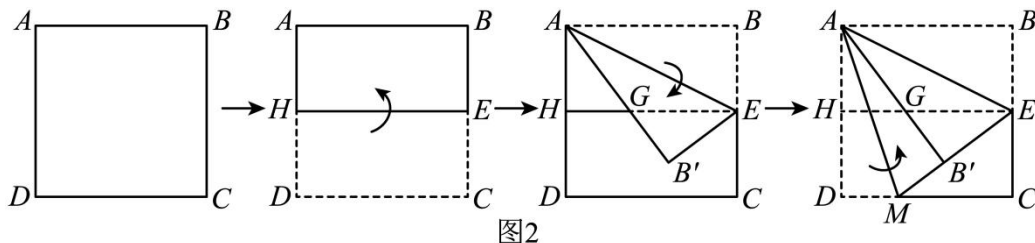
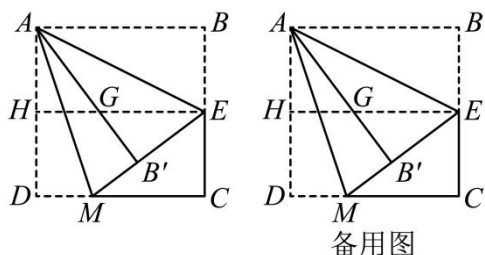


图2



【操作探索】

操作一：把正方形纸片 $ABCD$ 对折，使 DC 与 AB 重合，得到折痕 HE ，把纸片展平；

操作二：沿着 AE 再一次折叠纸片，使点 B 落在点 B' 处，得到折痕 AE , AB' 交 HE 于点 G ；

操作三：将 AD 沿过点 A 的直线折叠，使 AD 与 AB' 重合，得到折痕 AM 。

【猜想验证】

(1) 根据以上操作，小华发现点 E 、 B' 、 M 三点共线，且① $\angle MAE =$ _____°；②线段 ME 、 DM 、 BE 之间的数量关系为：_____。

(2) 小海说：“我发现线段 DM 与线段 DC 的比值是 $\frac{1}{3}$ ，即点 M 是线段 DC 的三等分点。”你认为小海的说法正确吗？请说明理由。

【问题探究】

(3) 在 (1) 和 (2) 的条件下，延长 AB' 交线段 DC 于点 N ，连接 AC 交 HE 于点 O ，你能发现线段 GO 与线段 DM 的比值吗？请直接写出答案。

【答案】 (1) 45° ； $ME = DM + BE$ ；

(2) 小海说法正确；理由见解析

(3) $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】(1) 利用正方形的直角与两次折叠的角平分性质，推导出 $\angle MAE = 45^\circ$ ；结合折叠的线段相等关系和三点共线，得到 $ME = DM + BE$ ；

(2) 设正方形边长，用勾股定理列方程求解，得出 DM 是 DC 的三分之一，验证了 M 是 DC 的三等分点；

(3) 先设正方形边长为 $2m$ ，利用折叠性质得出折痕 HE 为中位线、 $HO = m$ ；再通过 AAS 证明 $\triangle AHG \cong \triangle EB'G$ ，设 $HG = y$ ，在 $Rt\triangle EB'G$ 中用勾股定理列方程求出 $HG = \frac{3}{4}m$ ，进而得到 $GO = \frac{1}{4}m$ ；最后结合前序结论 $DM = \frac{2}{3}m$ ，计算出 GO 与 DM 的比值为 $\frac{3}{8}$ 。

【小问 1 详解】

解：① 由折叠性质：折叠后 $\angle DAM = \angle MAB'$ ， $\angle BAE = \angle B'AE$ ，正方形中 $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAM + \angle MAB' + \angle BAE + \angle B'AE = 90^\circ$ ，即 $2(\angle MAB' + \angle B'AE) = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MAE = 45^\circ$ ，

② 由折叠得： $DM = MB'$ ， $BE = EB'$ ，且题目给出 E 、 B' 、 M 三点共线，

$\therefore ME = MB' + EB' = DM + BE$ ，

即： $ME = DM + BE$ ；

【小问 2 详解】

解：设正方形 $ABCD$ 边长为 a ，则 $BE = EC = \frac{a}{2}$ ，

设 $DM = x$ ，则 $MC = a - x$ ，

由 (1) 得 $ME = DM + BE = x + \frac{a}{2}$ ，

在 $Rt\triangle MEC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

由勾股定理： $ME^2 = MC^2 + EC^2$ ，

代入得： $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ，

展开化简： $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{a^2}{4}$ ，

整理得 $3ax = a^2$ ，

解得 $x = \frac{a}{3}$ ，即 $DM = \frac{1}{3}DC$ ，

$\therefore M$ 是 DC 三等分点，小海说法正确；

【小问 3 详解】

