

2025-2026 学年八年级数学下学期期中考试

提升卷·全解全析版

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 新教材沪教版八年级下册第 23~24 章。

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = 55^\circ$, $\angle C$ 的度数是 ()。

- A. 55° B. 110° C. 125° D. 135°

【答案】A

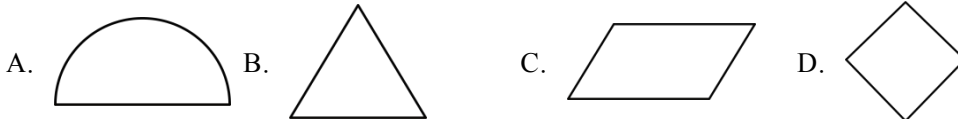
【分析】本题考查了平行四边形的性质; 熟记平行四边形的对角相等是解决问题的关键。由平行四边形的对角相等即可得出结果。

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle C = \angle A = 55^\circ$;

故选: A

2. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【分析】本题考查轴对称图形和中心对称图形的识别, 理解轴对称图形: 如果一个平面图形沿着一条直线折叠后, 直线两旁的部分能够互相重合, 那么这个图形叫做轴对称图形; 中心对称图形: 把一个图形绕着某一点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形叫做中心对称图形。据此逐项判断即可。

【详解】解: A 中图形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

B 中图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C 中图形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D 中图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意，

故选：D.

3. 矩形和菱形都是特殊的平行四边形，下列性质中矩形具有而菱形不一定具有的性质是（ ）

- A. 对边相等 B. 邻边相等 C. 对角线互相平分 D. 对角线相等

【答案】D

【分析】本题考查了矩形和菱形的性质差异，根据矩形和菱形作为特殊平行四边形的特性，逐一分析各选项是否矩形具有而菱形不一定具有.

【详解】A、对边相等：矩形和菱形均为平行四边形，对边均相等，故 A 不符合题意.

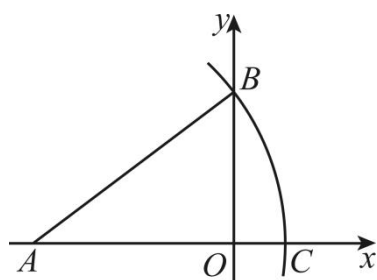
B、邻边相等：菱形的四条边均相等，邻边必相等；而矩形邻边仅当为正方形时才相等，故 B 是菱形的特性，不符合题意.

C、对角线互相平分：矩形和菱形的对角线均互相平分，属于平行四边形共有性质，故 C 不符合题意.

D、对角线相等：矩形的对角线相等，而菱形的对角线不相等（除非为正方形），因此 D 是矩形特有而菱形不一定具有的性质.

故选：D

4. 如图，在平面直角坐标系中， $A(-4,0)$ ， $C(1,0)$ ，以点 A 为圆心，AC 长为半径画弧，交 y 轴正半轴于点 B，则点 B 的坐标为（ ）



- A. $(0,3)$ B. $(3,0)$ C. $(2,0)$ D. $(0,2)$

【答案】A

【分析】本题主要考查了坐标与图形，勾股定理. 根据题意求出 $AB = AC = 5$ ，再由勾股定理可得 OB 的长，即可求解.

【详解】解：由作图方法得： $AC = AB$ ，

$$\therefore A(-4,0), C(1,0),$$

$$\therefore AC = 1 - (-4) = 5,$$

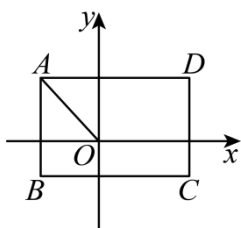
$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (0,3).$$

故选：A

5. 如图，长方形 $ABCD$ 中，已知点 $A(-3,4)$ ， $C(5,-2)$ ，下列说法正确的是（ ）



A. 点 A 与点 B 的横坐标相同

B. 点 A 与点 B 的纵坐标相同

C. $AB = 8$

D. $OA = 5$

【答案】D

【分析】先推导出 AD 不一定平行于 x 轴，则点 B ， D 的坐标无法确定， AB 的值无法确定，根据勾股定理求出 $OA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ ，即可解答。

【详解】解：在长方形 $ABCD$ 中， $A(-3,4)$ ， $C(5,-2)$ ，

当 $AD \parallel x$ 轴时， $B(-3,-2)$ ， $D(5,4)$ ，

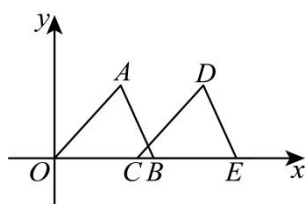
由题意可知， AD 不一定平行于 x 轴，则点 B ， D 的坐标无法确定

$\therefore$ 点 A 与点 B 的横坐标、纵坐标不一定相同， AB 的值无法确定，

故 A，B，C 错误；

由 $A(-3,4)$ 得 $OA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 。

6. 如图，三角形 OAB 一边落在 x 轴上，将三角形 OAB 向右平移得到三角形 CDE ，已知 A 、 B 的坐标分别为 $(2, \sqrt{5})$ 、 $(3,0)$ ，若点 D 的坐标为 $(5, \sqrt{5})$ ，则点 E 的坐标为（ ）



A. (4,0)

B. (5,0)

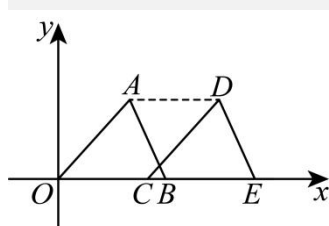
C. (6,0)

D. (7,0)

【答案】 C

【分析】连接 AD ，先根据平移性质可得到 $OC = AD = BE = 5 - 2 = 3$ ， $OB = CE$ ，再通过 B 点坐标得到 OB ，进而可得到 B, C 两点重合，进而求出 OE 的长度，即可解题.

【详解】解：连接 AD ，



$\because A$ 的坐标为 $(2, \sqrt{5})$ ，点 D 的坐标为 $(5, \sqrt{5})$ ，

$\therefore AD = 3$ ，

$\therefore$ 将三角形 OAB 向右平移得到三角形 CDE ，

$\therefore OC = AD = BE = 3$ ， $OB = CE$ ，

$\therefore B$ 的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore OB = 3$ ，

$\therefore$ 点 B ，点 C 重合，

$\therefore OE = 2OC = 6$ ，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(6, 0)$ 。

二、填空题（本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分）

7. 在菱形 $ABCD$ 中，若 $\angle B + \angle D = 160^\circ$ ，则 $\angle C = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。

【答案】 100

【分析】根据菱形的性质可得 $\angle D = \angle B = 80^\circ$ ， $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ，即可求解.

【详解】解：在菱形 $ABCD$ 中， $\angle D = \angle B$ ，

$\therefore \angle B + \angle D = 160^\circ$ ，

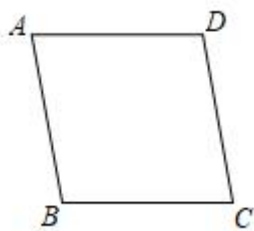
$$\therefore \angle D = \angle B = 80^\circ.$$

在菱形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

故答案是: 100.



【点睛】 本题主要考查了菱形的性质, 熟练掌握菱形的性质定理是解题的关键.

8. 若正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长为 4, 则该正方形的面积为_____.

【答案】 8

【分析】 根据正方形的面积等于对角线乘积的一半列式计算即可得解.

【详解】 解: $\because$ 正方形的一条对角线的长为 4,

$$\therefore \text{这个正方形的面积} = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8.$$

故答案为: 8.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 熟练掌握正方形的面积的两种求法是解题的关键.

9. 已知 $M(m, 5)$ 和 $N(6, n)$ 关于 y 轴对称, 则 $m + n$ 的值为_____.

【答案】 -1

【分析】 根据关于 y 轴对称的点的横坐标互为相反数, 纵坐标相等求得 m 、 n 值即可

【详解】

解: $\because M(m, 5)$ 和 $N(6, n)$ 关于 y 轴对称,

$$\therefore m = -6, \quad n = 5,$$

$$\therefore m + n = -6 + 5 = -1,$$

故答案为: -1.

【点睛】

本题考查坐标与图形变化-轴对称, 熟练掌握关于坐标轴对称的点的坐标特征是解答的关键.

10. 若点 $P(2-m, 7-2m)$ 在第二象限, 则整数 m 的值为_____.

【答案】3

【分析】根据第二象限的点的横坐标小于0, 纵坐标大于0列出不等式组, 然后求解即可.

【详解】解: 由题意得:
$$\begin{cases} 2-m < 0 \text{ ①} \\ 7-2m > 0 \text{ ②} \end{cases},$$

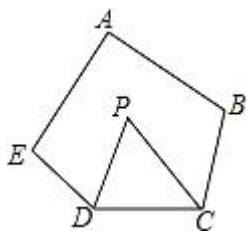
由①得: $m > 2$,

由②得: $m < 3.5$,

$\therefore 2 < m < 3.5$,

$\therefore$ 整数 m 的值为3.

11. 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle EDC$ 与 $\angle BCD$ 的平分线交于点 P , $\angle A + \angle B + \angle E = 280^\circ$, 则 $\angle P$ 的度数是_____.



【答案】 50°

【分析】先根据五边形内角和求得 $\angle EDC + \angle BCD$, 再根据角平分线求得 $\angle PDC + \angle PCD$, 最后根据三角形内角和求得 $\angle P$ 的度数.

【详解】解: $\because$ 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle A + \angle B + \angle E = 280^\circ$,

$\therefore \angle EDC + \angle BCD = (5-2) \cdot 180^\circ - 280^\circ = 260^\circ$,

又 $\because DP$ 、 CP 分别平分 $\angle EDC$ 、 $\angle BCD$,

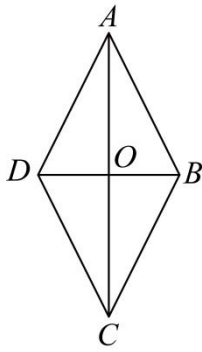
$\therefore \angle PDC + \angle PCD = 130^\circ$,

$\therefore \triangle CDP$ 中, $\angle P = 180^\circ - (\angle PDC + \angle PCD) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

故答案为: 50° .

【点睛】本题考查了多边形的内角和以及角平分线, 解题的关键是掌握多边形的内角和定理以及角平分线的定义, 解题时注意: 多边形内角和 $= (n-2) \cdot 180^\circ$.

12. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 已知 $AB = 13$, $AO = 12$, 则菱形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 120

【分析】 本题考查了菱形的性质，掌握菱形的面积等于对角线乘积的一半是解题关键。利用勾股定理求出 BO ，可得 DB 的长，再根据菱形的面积等于对角线乘积的一半，即可求解。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AO=12$

$\therefore AC=2AO=24$ ， $AC \perp BD$ ， $DB=2OB$ ，

$\because AB=13$ ，

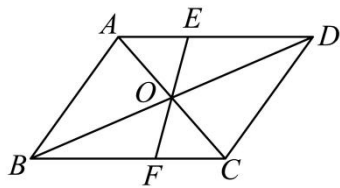
$\therefore BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=5$ ，

$\therefore DB=10$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC \times DB = \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ 。

故答案为： 120

13. 如图， EF 过平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点 O ， 交 AD 于点 E ， 交 BC 于点 F ， 若平行四边形 $ABCD$ 的周长为 18， 且四边形 $EFCD$ 的周长为 12， 则 EF 的长是_____。



【答案】 3

【分析】 本题考查平行四边形的性质，三角形全等的判定，周长的转化计算，通过证明三角形全等实现边的等量代换是解题关键。

利用平行四边形性质结合 ASA 证 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ ， 得 $AE=CF$ ， 再结合平行四边形周长求出 $AD+CD$ ， 然后将四边形 $EFCD$ 周长转化为 $AD+CD+EF$ ， 进而解得 EF 。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AO=CO$ ，

$$\therefore \angle EAO = \angle FCO,$$

$\therefore$ 在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ AO = CO \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = CF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 18,

$$\therefore 2AD + 2CD = 18, \text{ 即 } AD + CD = 9,$$

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 的周长为 $ED + CD + CF + EF = AD + CD + EF = 12,$

$$\therefore EF = 12 - 9 = 3.$$

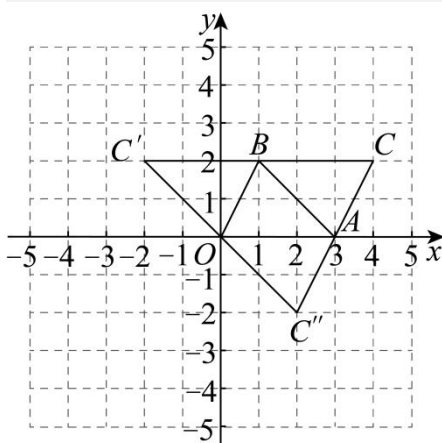
故答案为: 3.

14. 在平面直角坐标系中. 已知平行四边形的三个顶点坐标分别是 $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(1,2)$, 则平行四边形第四个顶点 C 的坐标_____.

【答案】 $(4,2)$ 或 $(-2,2)$ 或 $(2,-2)$

【分析】 本题主要考查平行四边形的性质与判定及平面直角坐标系点的坐标, 平移的性质, 熟练掌握平行四边形的性质与判定及平面直角坐标系点的坐标是解题的关键.

【详解】 解: 如图, 设 C 点的坐标为 (x,y) ,



$\therefore$ 以 A,O,B,C 为顶点的四边形是平行四边形,

①当 $BC = AO$ 时,

$$\therefore O(0,0), \quad A(3,0), \quad B(1,2),$$

$$\therefore AO = 3,$$

$$\therefore BC = 3,$$

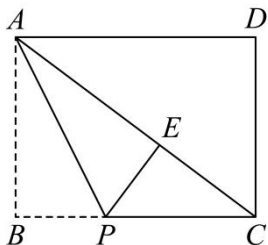
$$\therefore C \text{ 点坐标为 } C(4, 2) \text{ 或 } C(-2, 2).$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } BO = AC \text{ 时, } O(0, 0), A(3, 0), B(1, 2),$$

$$\therefore \text{由平移的性质可得 } C \text{ 点坐标为 } C(2, -2);$$

$$\text{故答案为: } (4, 2) \text{ 或 } (-2, 2) \text{ 或 } (2, -2).$$

15. 如图所示, P 为长方形纸片 $ABCD$ 的 BC 边上一点, 连接 AP , 将 $\triangle ABP$ 沿 AP 翻折, 使得点 B 的对应点 E 落在对角线 AC 上. 若 $AB = 3, BC = 4$, 则 BP 的长为_____.



$$\text{【答案】 } \frac{3}{2}$$

【分析】 本题考查了翻折的性质, 勾股定理, 熟练掌握以上知识点是解答本题的关键.

根据勾股定理求出 $AC = 5$, 设 $BP = x$, 由折叠性质可知 $AE = AB, BP = PE, \angle AEP = \angle B$, 所以 $\angle PEC = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle PEC$ 中, $PE = BP = x, EC = AC - AE = 5 - 3 = 2$, $PC = BC - BP = 4 - x$, 由勾股定理得 $PC^2 = PE^2 + CE^2$, 即 $(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$, 解出 x , 即可求解.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = 3, BC = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\text{设 } BP = x,$$

$$\text{由折叠性质可知 } AE = AB, BP = PE, \angle AEP = \angle B,$$

$$\therefore \angle PEC = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PEC \text{ 中, } PE = BP = x, EC = AC - AE = 5 - 3 = 2, PC = BC - BP = 4 - x,$$

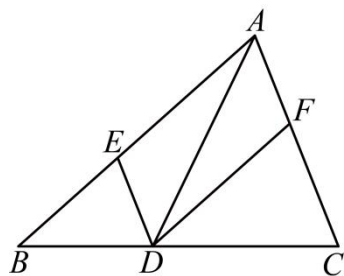
$$\therefore PC^2 = PE^2 + CE^2,$$

即 $(4-x)^2 = x^2 + 2^2$,

解得: $x = \frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 、 CA 上, 且 $DE \parallel CA$, $DF \parallel AB$. 则下列说法中正确的有_____.



①四边形 $AEDF$ 是平行四边形;

②如果 $\angle BAC = 90^\circ$, 那么四边形 $AEDF$ 是矩形;

③如果 $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$, 则 AD 的最小值为 $\frac{5}{2}$

④如果 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 那么四边形 $AEDF$ 是菱形.

【答案】 ①②④

【分析】 本题考查了平行四边形、矩形和菱形的判定, 勾股定理, 角平分线的性质等知识, 根据平行四边形的判定可判断①, 根据矩形的判定可判断②, 由题意可知当 $AD \perp BC$ 时, AD 最小, 由勾股定理求出 $BC = 5$, 再根据三角形面积公式求出 AD , 可判断③, 由 $DF \parallel AB$, 得到 $\angle EAD = \angle FDA$, 由 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 得到 $\angle EAD = \angle FAD$, 从而得到 $\angle FAD = \angle FDA$, 得出 $AF = DF$, 再根据菱形的判定可判断④, 掌握相关知识是解题的关键.

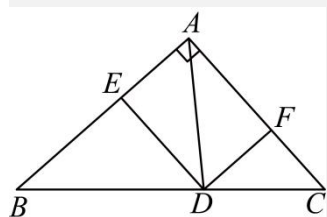
【详解】 解: $\because DE \parallel CA$, $DF \parallel AB$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形, 故①符合题意;

又 $\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是矩形, 故②符合题意;

如图:



$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是矩形,

当 $AD \perp BC$ 时, AD 最小,

$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = 4, AC = 3$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$\because AD \perp BC, \angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AD, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times AD,$$

$$\therefore AD = \frac{12}{5},$$

$\therefore AD$ 的最小值为 $\frac{12}{5}$, 故③不符合题意;

$\because DF \parallel AB$,

$\therefore \angle EAD = \angle FDA$,

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle EAD = \angle FAD$,

$\therefore \angle FAD = \angle FDA$,

$\therefore AF = DF$,

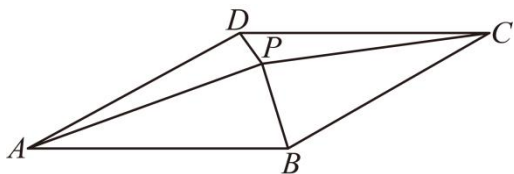
又 $\because$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形, 故④符合题意;

综上, 符合题意的有①②④,

故答案为: ①②④.

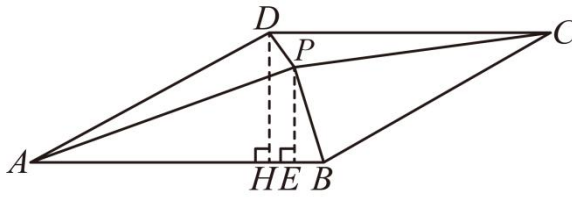
17. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 8, \angle DAB = 30^\circ$, 点 P 为菱形内的一点, 且 $\triangle PAB$ 的面积为 12. 当 $PD = 1$ 时, PC 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{65}$

【分析】 本题考查了菱形的性质, 直角三角形的性质, 三角形的面积公式, 由直角三角形的性质可求 $DH = 4$, 由三角形的面积公式可求 $PE = 3$, 可得点 P 在 DH 上, 由勾股定理可求解.

【详解】解：如图，过点 P 作 $PE \perp AB$ 于 E ， $DH \perp AB$ 于 H ，



$\because AB = 8$, $\angle DAB = 30^\circ$, $DH \perp AB$,

$\therefore DH = 4$,

$\because \triangle PAB$ 的面积为 12, $PE \perp AB$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot PE = 12$,

$\therefore PE = 3$,

$\therefore PD = 1$,

$\therefore DP + PE = 4$,

$\therefore$ 点 P 在 DH 上,

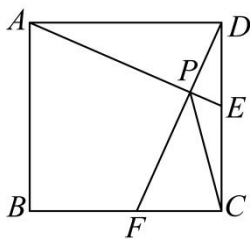
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD = 8$,

$\therefore PC = \sqrt{DC^2 + DP^2} = \sqrt{65}$,

故答案为: $\sqrt{65}$.

18. 如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别是边 DC ， CB 上的动点，且始终满足 $DE = CF$ ， AE ， DF 交于点 P 。连接 CP ，则线段 CP 的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{5} - 1$

【分析】 本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理，直角三角形的性质，由正方形的性质得到 $AD = DC$ ， $\angle ADE = \angle DCF = 90^\circ$ 。证明 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$ ，得到 $\angle DAE = \angle CDF$ 。则可证明 $\angle DAE + \angle ADF = 90^\circ$ ，进而可得 $\angle APD = 90^\circ$ 。取 AD 的中点 O ，连接 OP ，则 $OP = \frac{1}{2} AD = 1$ ，根据 $CP \geq OC - OP$ ，可得当 C ， P ， O 三点共线时，线段 CP 的值最小，最小值为 $OC - OP$ 的值，利用勾股定理求出 OC 的长即可得到答案。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD = DC, \quad \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ.$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases} AD = DC \\ \angle ADE = \angle DCF, \\ DE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDF.$$

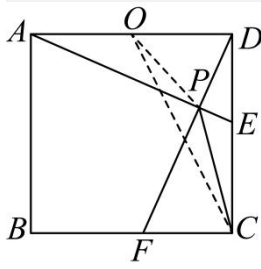
$$\because \angle CDF + \angle ADF = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = 180^\circ - (\angle DAE + \angle ADF) = 90^\circ.$$

如图，取 AD 的中点 O ，连接 OP ，则 $OP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

$$\because CP \geq OC - OP,$$



$\therefore$ 当 C, P, O 三点共线时，线段 CP 的值最小，最小值为 $OC - OP$ 的值.

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中，由勾股定理，得 $OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore CP = OC - OP = \sqrt{5} - 1,$$

$\therefore$ 线段 CP 的最小值为 $\sqrt{5} - 1$.

故答案为： $\sqrt{5} - 1$

三、解答题（本题共 7 小题，共 64 分）

19.（本题 6 分）如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2,2)$ ， $B(-3,1)$ ，

$C(3,-2)$ ，网格中每个小正方形的边长都是 1 个单位长度.

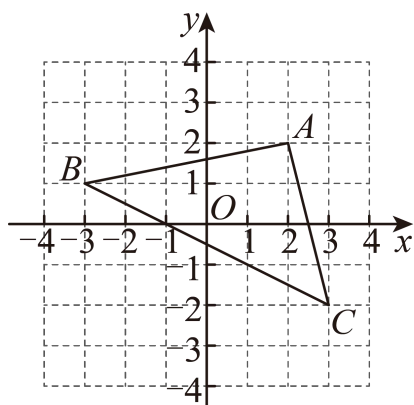


图1

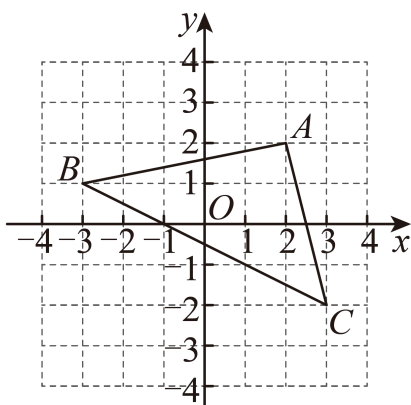


图2

(1)在图 1 中画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A'B'C'$. (点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A' 、 B' 、 C')

(2)在 (1) 的条件下, 直接写出 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

(3)在图 2 中的 x 轴上画出一一点 P , 使得 $PA+PB$ 的值最小. (要求: 用无刻度直尺画图, 保留画图痕迹, 不写画法)

【答案】(1)见解析

(2) $\frac{21}{2}$

(3)见解析

【分析】 本题考查了作轴对称图形, 割补法求面积, 掌握轴对称的性质是解题关键.

(1) 根据轴对称的性质作图即可;

(2) 利用割补法求面积即可;

(3) 作点 B 关于 x 轴的对称点 B' , 连接 AB' 与 x 轴的交点即为点 P .

【详解】 (1) 解: 如图, $\triangle A'B'C'$ 即为所求作.

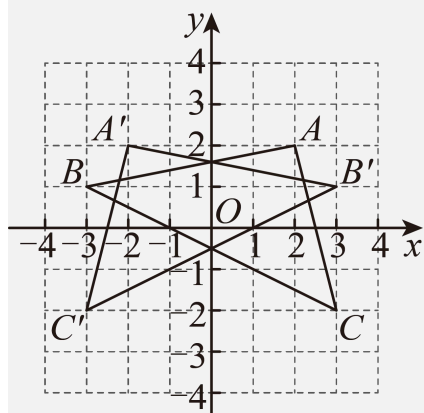


图1

(2) 解: $\triangle A'B'C'$ 的面积 $= 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 5 - \frac{1}{2} \times 3 \times 6 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = \frac{21}{2}$.

$$(2) \frac{13}{3}$$

$\therefore$ 四边形 $CNEM$ 是菱形;

(2) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore BC = AD = 4, \angle B = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $CNEM$ 是菱形,

$$\therefore CM = EM,$$

假设 $CM = EM = x$, 则 $BM = AB - AE - EM = 8 - 2 - x = 6 - x$,

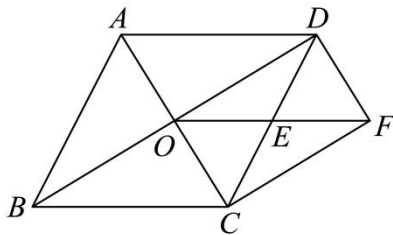
由勾股定理得 $BM^2 + BC^2 = CM^2$,

$$\text{即 } (6-x)^2 + 16 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{13}{3},$$

$$\therefore EM = \frac{13}{3}.$$

21. (本题 8 分) 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , CD 的中点为 E , 连接 OE 并延长至点 F , 使得 $EF = OE$, 连接 CF , DF .



(1) 求证: 四边形 $OCFD$ 是矩形;

(2) 若 $EF = 5$, $BD = 16$, 求菱形 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) 见解析

(2) 96

【分析】此题重点考查菱形的性质、矩形的判定与性质、勾股定理等知识, 求得 $CD = OF = 10$ 及 $OA = OC = 6$ 是解题的关键.

(1) 由 $DE = CE$, $EF = OE$, 证明四边形 $OCFD$ 是平行四边形, 根据菱形的性质证明 $\angle COD = 90^\circ$, 则四边形 $OCFD$ 是矩形;

(2) 由菱形的性质得 $OD = OB = \frac{1}{2}BD = 8$, 由矩形的性质得 $CD = OF = 10$, 则

$$OA = OC = \sqrt{CD^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6, \text{ 所以 } AC = 12, \text{ 则}$$

$$S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96.$$

【详解】(1) 证明: $\because CD$ 的中点为 E ,

$$\therefore DE = CE,$$

$$\because EF = OE,$$

$\therefore$ 四边形 $OCFD$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle COD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OCFD$ 是矩形.

$$(2) \text{ 解: } \because EF = OE = 5, \quad BD = 16,$$

$$\therefore OF = 2EF = 10, \quad OD = OB = \frac{1}{2}BD = 8,$$

$$\therefore CD = OF = 10,$$

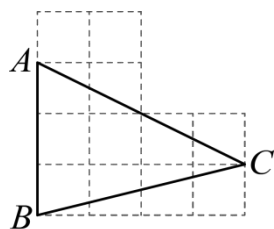
$$\therefore OA = OC = \sqrt{CD^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore AC = 2OA = 12,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96,$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 96.

22. (本题 8 分) 如图是由 12 个小正方形组成的组合图形, 每个小正方形的顶点叫做格点. 图中 A , B , C 都是格点. 仅用无刻度的直尺在给定网格中画图, 并回答问题.



(1) 分别画出 ABC 的高 BE , 中线 AF ;

(2) 画出 ABC 的重心 G ;

(3) 若点 $A(0,3)$, $C(4,1)$, 直接写出这个由 12 个小正方形组成的组合图形的重心的坐标.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

$$(3) \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

【分析】 本题主要考查三角形的高、中线、重心等知识, 熟练掌握相关知识是解答本题的关键.

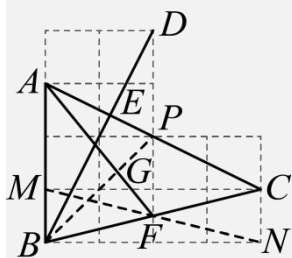
(1) 取格点 D 、 M 、 N , 连接 BD 交 AC 于点 E , 则 BE 是 ABC 的高; 连接 MN 交 BC 于点

F ，连接 AF ，则 AF 是 ABC 的中线；

(2) 取格点 P ，连接 BP 交 AF 于点 G ，则点 G 是 ABC 的重心；

(3) 分别求出上面 4 个小正方形组成图形的重心坐标，下面 8 个小正方形组成的长方形的重心坐标，从而可求出 12 个小正方形组成的组合图形的重心的坐标。

【详解】(1) 解：如图， ABC 的高 BE ，中线 AF 即为所求作，



(2) 解：如图，点 G 为 ABC 的重心；

(3) 解：上面 4 个小正方形组成图形的重心坐标为 $(1,3)$ ，面积为 4；

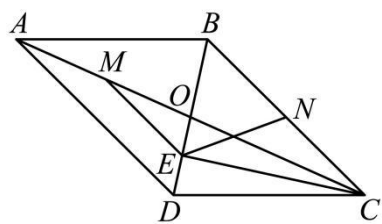
下面 8 个小正方形组成的长方形的重心坐标为 $(2,1)$ ，面积为 8；

所以，这 12 个小正方形组成的组合图形的重心横坐标为 $\frac{4}{12} \times 1 + \frac{8}{12} \times 2 = \frac{5}{3}$ ；纵坐标为

$$\frac{4}{12} \times 3 + \frac{8}{12} \times 1 = \frac{5}{3},$$

因此，重心坐标为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 。

23. (本题 10 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AC = 2AB$ ，点 E 在线段 OD 上，且 $OE = DE$ 。连接 CE 。



(1) 求证： $CE \perp BD$ ；

(2) 若 M ， N 分别是 OA ， BC 的中点，且 $AB = 20$ ，连接 EM ， EN 。

① 求证： $EM = EN$ ；

② 当 $EM \perp EN$ 时，求 $\square ABCD$ 的面积。

【答案】(1) 见解析

(2) ① 见解析； ② 480

【分析】(1) 根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 得出 $AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$AO = CO = \frac{1}{2}AC$. 结合 $AC = 2AB$, 得出 $CO = CD$, 证明 $\triangle COD$ 是等腰三角形, 结合

$OE = DE$, 即可证明 $CE \perp BD$;

(2) ①根据直角三角形斜边中线等于斜边一半得出 $EN = \frac{1}{2}BC$. 证明 EM 是 $\triangle AOD$ 的中位线, 得出 $EM = \frac{1}{2}AD$, 即可证明 $EN = EM$.

②根据 $AD \parallel BC$, EM 是 $\triangle AOD$ 的中位线, 得出 $EM \parallel BC$, 结合 $EM \perp EN$, 得出 $EN \perp BC$, 根据垂直平分线的性质得出 $BE = CE$. 设 $OE = DE = x$, 则 $BO = DO = 2DE = 2x$,

$BD = OB + OD = 4x$, 得出 $BE = CE = 3x$. 在 $Rt\triangle CED$ 中, 根据勾股定理列方程求出 x 再根据 $S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle BDC}$ 求解即可.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AO = CO = \frac{1}{2}AC$.

$\because AC = 2AB$,

$\therefore CO = CD$,

$\therefore \triangle COD$ 是等腰三角形.

又 $\because OE = DE$,

$\therefore CE \perp BD$;

(2) ①证明: $\because CE \perp DO$,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$.

$\because N$ 为 BC 的中点,

$\therefore EN = \frac{1}{2}BC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$.

$\because E, M$ 分别是 OD, OA 的中点,

$\therefore EM$ 是 $\triangle AOD$ 的中位线,

$\therefore EM = \frac{1}{2}AD$,

$\therefore EN = EM$.

②解: $\because EM$ 是 $\triangle AOD$ 的中位线,

$$\therefore EM \parallel AD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore EM \parallel BC.$$

$$\therefore EM \perp EN,$$

$$\therefore EN \perp BC.$$

$\therefore N$ 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = CE.$$

设 $OE = DE = x$, 则 $BO = DO = 2DE = 2x$, $BD = OB + OD = 4x$.

$$\therefore BE = CE = OE + OB = 3x.$$

在 $Rt\triangle CED$ 中, $CD = AB = 20$,

$$\therefore DE^2 + CE^2 = CD^2,$$

$$\text{即 } x^2 + (3x)^2 = 20^2,$$

解得: $x = 2\sqrt{10}$ (负值已舍去),

$$\therefore BD = 8\sqrt{10}, \quad CE = 6\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle BDC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} = 480.$$

24. (本题 10 分) 综合探究综合与实践课上, 智慧星小组三位同学对含 60° 角的菱形进行了探究

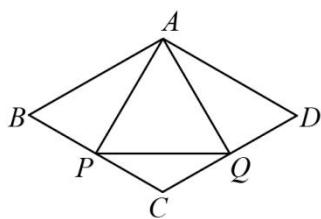


图1

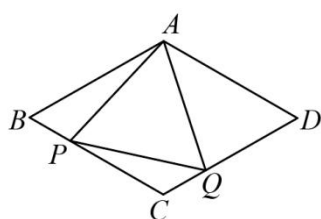


图2

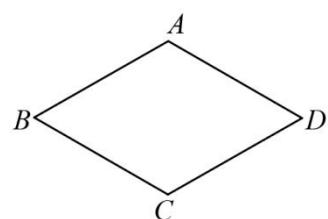


图3

【背景】在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, 作 $\angle PAQ = \angle B$, AP , AQ 分别交边 BC , CD 于点 P , Q .

(1) 【感知】如图 1, 若点 P 是边 BC 的中点, 小智经过探索发现了线段 AP 与 AQ 之间的数量关系, 请你直接写出这个关系为_____;

(2) 【探究】如图 2, 当点 P 为 BC 上任意一点时, 请说明 (1) 中的结论是否仍然成立, 并写出理由;

(3) 【应用】若菱形纸片 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 8$ ，在 BC 边上取一点 P ，连接 AP ，在菱形内部作 $\angle PAQ = 60^\circ$ ， AQ 交 CD 于点 Q ，当 $AP = 3\sqrt{6}$ 时，请直接写出线段 DQ 的长.

【答案】(1) $AP = AQ$

(2) 成立，证明见解析

(3) QD 的长度为 $4 + \sqrt{6}$ 或 $4 - \sqrt{6}$

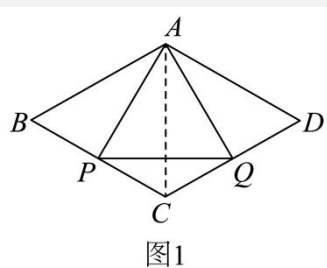
【分析】本题是四边形综合题，考查了菱形的性质，等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理等知识，运用了分类讨论的思想. 解题的关键是添加适当的辅助线构造全等三角形.

(1) 数量关系： $AP = AQ$. 连接 AC ，利用菱形的性质和等边三角形的三线合一性质证明 $\triangle ABP \cong \triangle ADQ$ 即可；

(2) 利用菱形的性质和等边三角形的性质证明 $\triangle PAC \cong \triangle QAD$ 即可；

(3) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 于点 E ，利用菱形的性质和等边三角形的性质可得 $BE = 4$ ，利用勾股定理求出 AE ， PE ，分当点 P 在点 E 的左侧和点 P 在点 E 的右侧两种情况，可得出最后的结果.

【详解】(1) 解：连接 AC ，如下图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 120^\circ$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，

$\because AC$ 为菱形的角平分线，

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 60^\circ$ ，

故 $\triangle BAC$ 与 $\triangle DAC$ 为等边三角形，

即 $BA = AC = AD$ ，

$\because$ 点 P 为 BC 中点，

故 AP 平分 $\angle BAC$ ，

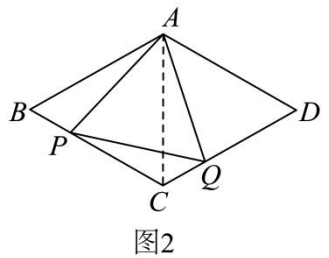
$\therefore \angle BAP = \angle PAC = \angle CAQ = \angle QAD = 30^\circ$ ，

$\because \angle BAP = \angle QAD, AB = AD, \angle B = \angle D,$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ADQ (\text{ASA}),$

$\therefore AP = AQ.$

(2) 解: 连接 AC , 如下图所示:



由 (1) 中, 同理可得 $\triangle BAC$ 与 $\triangle DAC$ 为等边三角形,

$\therefore AC = AD, \angle PCA = \angle D,$

$\because \angle PCQ = \angle CAD = 60^\circ,$

$\therefore \angle PAC + \angle CAQ = \angle CAQ + \angle QAD = 60^\circ,$

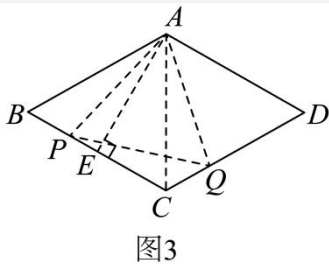
$\therefore \angle PAC = \angle QAD,$

又 $\because AC = AD, \angle PCA = \angle D,$

$\therefore \triangle PAC \cong \triangle QAD (\text{ASA}),$

$\therefore AP = AQ.$

(3) 解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 于点 E , 按题意补充线段, 连接 AC , 当点 P 在点 E 左侧时, 如下图所示:



由 (1) (2) 得 $PC = DQ, E$ 为 BC 中点,

$\therefore BE = 4,$

由勾股定理得 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 4\sqrt{3},$

$\because AP = 3\sqrt{6},$

$\therefore PE = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{6},$

故 $PC = CE + PE = 4 + \sqrt{6}$,

$\therefore QD = 4 + \sqrt{6}$;

当点 P 在点 E 右侧时, 如下图所示:

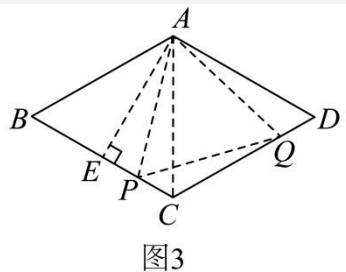


图3

同理可得 $PE = \sqrt{6}$,

故 $PC = CE - PE = 4 - \sqrt{6}$,

$\therefore QD = 4 - \sqrt{6}$;

综上, QD 的长度为 $4 + \sqrt{6}$ 或 $4 - \sqrt{6}$.

25. (本题 12 分) 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在边 BC , CD 上, 连接 AE , AF , EF . 若 $\angle EAF = 45^\circ$, 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° , 点 D 与点 B 重合, 得到 $\triangle ABG$.

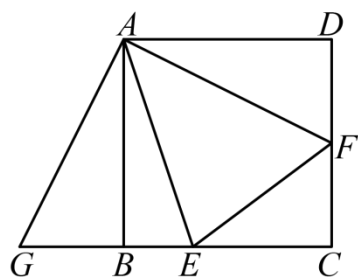


图1

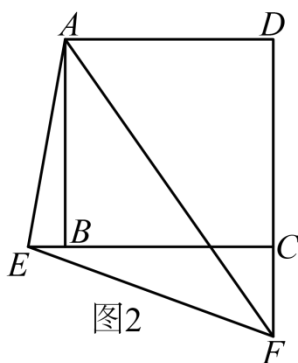


图2

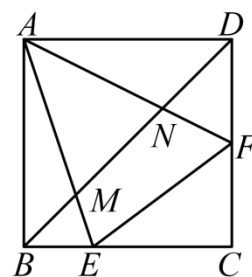


图3

(1) 求证: $\triangle AEF \cong \triangle AEG$;

(2) 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, 若点 E 在射线 CB 上, 点 F 在射线 DC 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 试探究线段 BE , EF , DF 之间的数量关系, 请作出结论并予以证明.

(3) 如图 3, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $4\sqrt{2}$, E , F 分别在 BC , CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 连接 BD 分别交 AE , AF 于点 M , N . 若点 M 恰好为线段 BD 的四等分点, 且 $BM < DM$, 求线段 MN 的长.

【答案】(1) 见解析

(2) $BE + EF = DF$, 证明见解析

$$(3) MN = \frac{10}{3}$$

【分析】(1) 证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $GB = DF$, 从而可求得 $\angle EAG$; 再证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$ (SAS) 即可;

(2) 将 AF 绕点 A 顺时针旋转 90° 到 AG , 连接 BG , 证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $GB = DF$, $\angle ABG = \angle ADF = 90^\circ$, 证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $EF = GE = GB - BE = DF - BE$;

(3) 将 $\triangle ADN$ 绕点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABG$, 证明 $\triangle GAM \cong \triangle NAM$ (SAS), 得 $GM = MN$, 再证 $\angle GBM = 90^\circ$, 然后由勾股定理得出 $DN^2 + BM^2 = MN^2$, 即可解决问题.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD = AB, \quad \angle BAD = \angle ABC = \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABG = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABG$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADF = \angle ABG = 90^\circ, \\ DF = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = AG, \quad \angle DAF = \angle BAG,$$

$$\because \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG + \angle BAE = 45^\circ = \angle GAE = \angle EAF,$$

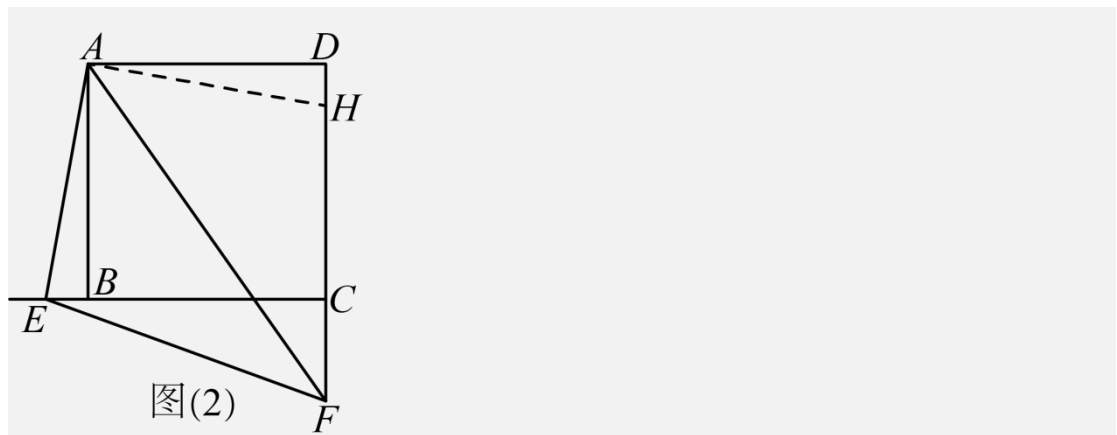
在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle FAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG \text{ (SAS)}.$$

$$(2) \text{ 解: } BE + EF = DF.$$

证明如下: 如图 (2), 在 DC 上截取 $DH = BE$, 连接 AH .



在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADH$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle D = 90^\circ, \\ BE = DH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = AH, \quad \angle BAE = \angle DAH,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle BAH = \angle BAH + \angle DAH = 90^\circ$$

即 $\angle EAH = \angle BAD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FAH = 45^\circ,$$

在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle HAF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AH \\ \angle EAF = \angle HAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

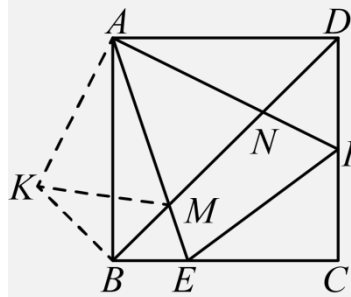
$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle HAF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = HF,$$

$$\therefore DH + HF = DF,$$

$$\therefore BE + EF = DF;$$

(3) 解: 如图 (3), 将 $\triangle ADN$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABK$, 连接 KM .



图(3)

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD = 4\sqrt{2}, \quad \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle ABD = \angle ADB = 45^\circ,$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 8,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{4} BD = 2,$$

$$\therefore DM = BD - BM = 6,$$

由旋转可得,

$$\angle KAN = 90^\circ, \quad AK = AN, \quad BK = DN, \quad \angle ABK = \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle KBM = \angle ABK + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle KAN = 90^\circ, \quad \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle KAM = \angle MAN = 45^\circ.$$

$$\therefore AM = AM.$$

$$\therefore \triangle AMK \cong \triangle AMN \text{ (SAS)},$$

$$\therefore KM = MN.$$

设 $MK = MN = x$, 则 $BK = 6 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle BMK$ 中, $BK^2 + BM^2 = MK^2$

$$\therefore (6 - x)^2 + 2^2 = x^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore MN = \frac{10}{3}.$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质综合, 旋转的性质, 勾股定理等知识, 解题关键是掌握上述知识点并能运用求解.