

2025-2026 学年八年级数学下学期期中模拟卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: : 沪教版八年级下册 四边形&平面直角坐标系。

第一部分 (填空题 共 54 分)

一、选择题(本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分. 每小题列出的四个备选项中只有一个符合题目要求)

1. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, 添加以下条件不能证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

- A. $AB = CD$ B. $BC \parallel AD$ C. $\angle A = \angle C$ D. $\angle A + \angle D = 180^\circ$

【答案】D

【分析】由平行四边形的判定定理逐项验证即可.

【详解】解: 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

A、当 $AB = CD$ 时, 由“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”, 可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不符合题意;

B、当 $BC \parallel AD$ 时, 由“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”, 可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不符合题意;

C、 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$,

又 $\because \angle A = \angle C$,

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$,

则表明 $AD \parallel BC$,

由“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”, 可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不符合题意;

D、当 $AB \parallel CD$ 时, 必有 $\angle A + \angle D = 180^\circ$, 这是已知条件推导得到的必然结论, 该条件没有提供新的有效信息, 无法推出另一组对边平行或 $AB = CD$, 即不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 符合题意.

2. 下列命题中, 不正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
 B. 对角线相等的平行四边形是矩形;
 C. 对角线相等的矩形是正方形
 D. 对角线相等的菱形是正方形.

【答案】C

【分析】本题考查矩形的判定，菱形的判定，正方形的判定，掌握知识点是解题的关键.

根据特殊四边形的判定方法逐一分析选项的正误.

【详解】解：A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 平行四边形的对角线互相平分，若对角线还互相垂直，则符合菱形的判定定理，故 A 正确.

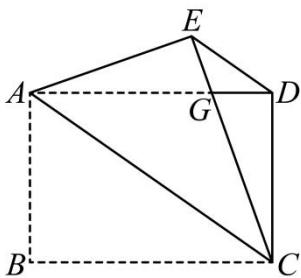
B. 对角线相等的平行四边形是矩形. 平行四边形的对角线相等时，四个角均为直角，符合矩形的定义，故 B 正确.

C. 对角线相等的矩形是正方形. 矩形的对角线本身相等，但正方形还需满足邻边相等或对角线垂直. 仅对角线相等无法直接判定为正方形，故 C 错误.

D. 对角线相等的菱形是正方形. 菱形的对角线互相垂直，若再满足相等，则符合正方形的对角线特性（相等且垂直），故 D 正确.

故选 C.

3. 把一张矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为点 E ，边 EC 交边 AD 于点 G . 连接 ED （如图所示）. 当 $BC = \sqrt{2}AB$ 时，下列结论中，不正确的是（ ）



- A. $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ B. $ED \parallel AC$
 C. $AG = 4GD$ D. $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$

【答案】C

【分析】本题考查矩形性质及翻折问题，全等三角形的判定与性质，勾股定理，解题的关键是根据折叠得到 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$. 先由折叠的性质及矩形的性质可得 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ (AAS)，从而判断出选项 A；由全等的性质可得 $AG = CG, EG = DG$ ，由等腰三角形的性质可得 $\angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE$ ，再由平行线的判

定即可判断选项 B；设 $AB = CD = t, GD = x$ ，则 $AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x$ ，Rt $\triangle CDG$ 中， $CD^2 + DG^2 = CG^2$ ，

列出方程求解，即可判断出选项 C；由折叠性质可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC}$ ，再由 $AG = 3GD$ ，可得 $CG = 3GE$ ，再判断选项 D。

【详解】解：∵ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，

$$\therefore AB = CD = AE, \angle B = \angle AEC = \angle CDG = 90^\circ,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CDG \\ \angle AGE = \angle CGD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

故 A 正确，不符合题意；

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG (\text{AAS}),$$

$$\therefore AG = CG, EG = DG,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle EGD,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA = \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore ED \parallel AC,$$

故 B 正确，不符合题意；

$$\text{设 } AB = CD = t, GD = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDG \text{ 中, } CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

$$\therefore t^2 + x^2 = (\sqrt{2}t - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore GD = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t = \frac{3\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

故 C 不正确，符合题意；

∵ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC},$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

$$\therefore CG = 3GE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$$

故 D 正确，不符合题意，

故选：C

4. 已知点 $P(m-1, n+1)$ ，若将点 P 先向下平移 4 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度，得到点 $P'(2, -1)$ ，则 m, n 的值分别为 ()

A. 6, 2

B. 0, 2

C. 6, -6

D. 0, -6

【答案】B

【分析】本题考查坐标与平移，根据点的平移规则，向下平移时 y 坐标减少，向右平移时 x 坐标增加，由点 $P(m-1, n+1)$ 和平移后的点 $P'(2, -1)$ ，列方程求解.

【详解】解：将点 $P(m-1, n+1)$ 先向下平移 4 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度，得到点

$$P'(m-1+3, n+1-4),$$

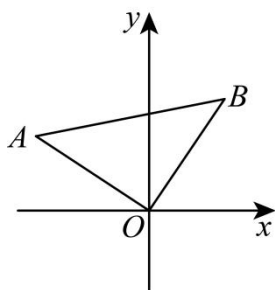
$\therefore$ 将点 P 先向下平移 4 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度，得到点 $P'(2, -1)$ ，

$$\therefore m-1+3=2, n+1-4=-1,$$

解得 $m=0, n=2$ ，

故选：B.

5. 如图，已知 $AO=BO$ ， $\angle AOB=90^\circ$ ，点 B 的坐标是 $(2, 3)$ ，则点 A 的坐标为 ()



A. $(-2, 3)$

B. $(2, -3)$

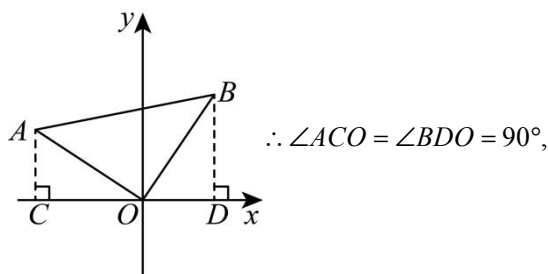
C. $(-3, 2)$

D. $(3, -2)$

【答案】C

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质，坐标与图形性质，解题关键是通过添加辅助线，利用一线三等角证全等三角形求解. 作 $AC \perp x$ 轴于点 C ， $BD \perp x$ 轴于点 D ，通过证明 $\triangle AOC \cong \triangle OBD$ 求解.

【详解】解：作 $AC \perp x$ 轴于点 C ， $BD \perp x$ 轴于点 D ，如图



$$\therefore \angle AOC + \angle CAO = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle BOD,$$

在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle OBD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACO = \angle ODB \\ \angle CAO = \angle BOD, \\ AO = BO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle OBD (\text{AAS}).$$

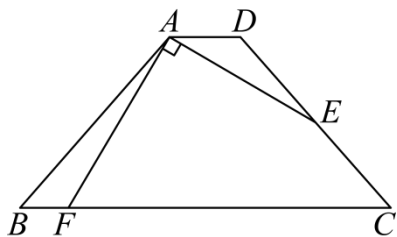
又 $\because B$ 的坐标是 $(2, 3)$,

$$\therefore AC = OD = 2, OC = BD = 3,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 2)$.

故选 C.

6. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, 点 E 为 CD 中点, 联结 AE , 作 $AF \perp AE$ 交 BC 于点 F . 如果 $AD = \sqrt{2}$, $AE = 2\sqrt{3}$, 且 $\angle DAE = 30^\circ$, 那么 BF 的长为. ()



A. $4 - \sqrt{2}$

B. $6 - \sqrt{2}$

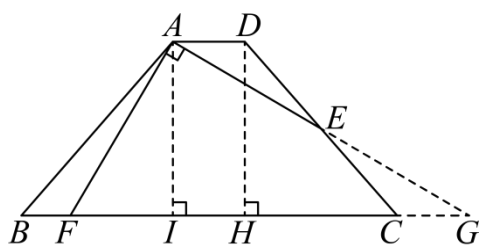
C. $2\sqrt{3} - 2$

D. $4 - 2\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定，勾股定理，矩形的性质与判定，含 30° 度角的直角三角形的性质，过点 A 作 $AI \perp BC$ 于 I ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，延长 AE ， BC 交于 G ，可证明 $\triangle ADE \cong \triangle GCE$ 得到 $GE = AE = 2\sqrt{3}$ ， $\angle G = \angle DAE = 30^\circ$ ， $CG = AD = \sqrt{2}$ ，则 $AG = 4\sqrt{3}$ ，据此可求出 $AF = 4$ ，进而得到 $FG = 8$ ；求出 $AI = \frac{1}{2}AG = 2\sqrt{3}$ ，得到 $IG = \sqrt{AG^2 - AI^2} = 6$ ，则 $FI = 2$ ；证明四边形 $ADHI$ 是矩形，得到 $AD = HI = \sqrt{2}$ ， $AI = DH$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ABI \cong \text{Rt}\triangle DCH$ (HL)，可得 $HC = BI = 6 - 2\sqrt{2}$ ，则可求出 $BF = 4 - 2\sqrt{2}$ 。

【详解】 解：如图所示，过点 A 作 $AI \perp BC$ 于 I ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，延长 AE ， BC 交于 G



$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle EGC$ ， $\angle EDA = \angle ECG$ ，

$\because$ 点 E 为 CD 中点，

$\therefore DE = CE$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle GCE$ (AAS)

$\therefore GE = AE = 2\sqrt{3}$ ， $\angle G = \angle DAE = 30^\circ$ ， $CG = AD = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AG = 4\sqrt{3}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中， $\angle FAG = 90^\circ$ ， $\angle AGF = 30^\circ$ ，

$\therefore FG = 2AF$ ，

$\therefore AG = \sqrt{FG^2 - AF^2} = \sqrt{3}AF = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore AF = 4$ ，

$\therefore FG = 8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AIG$ 中， $\angle AIG = 90^\circ$ ， $\angle AGI = 30^\circ$ ，

$\therefore AI = \frac{1}{2}AG = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore IG = \sqrt{AG^2 - AI^2} = 6$ ，

$\therefore FI = 2$ ；

$\because AD \parallel BC$ ， $AI \perp BC$ ，

$$\therefore AI \perp AD,$$

$$\text{又} \because DH \perp BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADHI$ 是矩形,

$$\therefore AD = HI = \sqrt{2}, AI = DH,$$

$$\text{又} \because AB = CD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABI \cong \text{Rt}\triangle DCH (\text{HL})$$

$$\therefore HC = BI = GI - IH - CG = 6 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore BF = 6 - 2\sqrt{2} - 2 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

故选: D.

第二部分 (非选择题 共 88 分)

二、填空题(本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 如果从多边形的一个顶点出发的对角线有 4 条, 那么这个多边形的内角和为_____.

【答案】 900° / 900 度

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式, 多边形的对角线的公式, 求出多边形的边数是解题的关键.

根据从多边形的一个顶点可以作对角线的条数公式 $(n-3)$ 求出边数, 然后根据多边形的内角和公式

$(n-2) \cdot 180^\circ$ 列式进行计算即可得解.

【详解】 设多边形边数为 n ,

$\therefore$ 多边形从一个顶点出发可引出 4 条对角线,

$$\therefore n-3=4,$$

解得: $n=7$,

$$\therefore \text{内角和} = (7-2) \times 180^\circ = 900^\circ.$$

故答案为: 900.

8. 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 120^\circ$, 则 $\angle B =$ _____ 度.

【答案】 120

【分析】 根据平行四边形的性质可知, 平行四边形的对角相等, 邻角互补, 再根据已知即可求解.

【详解】 解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$,

$$\text{又} \because \angle A + \angle C = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 120^\circ \div 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 120^\circ.$$

故答案为：120.

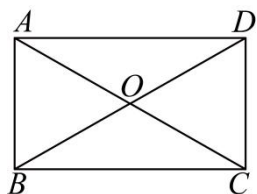
【点睛】在应用平行四边形的性质解题时，要根据具体问题，有选择的使用，避免混淆性质，以致错用性质.

9. 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $AD = \sqrt{3}$ ，那么 BD 的长是_____.

【答案】2

【分析】首先根据矩形的性质得到 $OA = OC = OB = OD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，然后求出 $\angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$ ，得到 $AC = 2CD$ ，然后根据勾股定理求出 $CD = 1$ ，进而求解即可.

【详解】如图所示，



$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，

$$\therefore OA = OC = OB = OD, \quad \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 30^\circ$$

$$\therefore AC = 2CD,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2, \quad \text{即} (\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$$

$$\therefore CD = 1$$

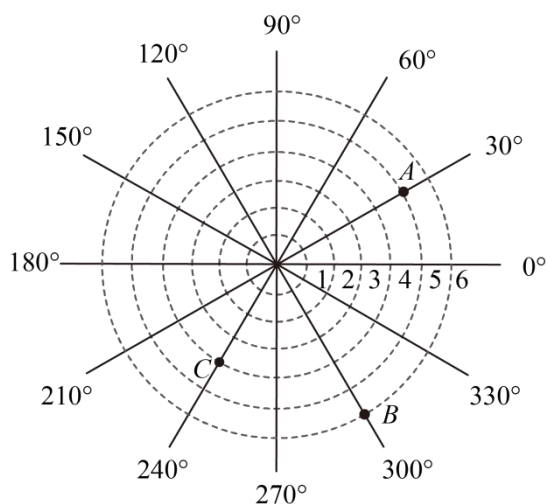
$$\therefore AC = 2$$

$$\therefore BD = AC = 2.$$

故答案为：2.

【点睛】此题考查了矩形的性质，等边对等角，勾股定理，含 30° 角直角三角形的性质，解题的关键是掌握以上知识点.

10. 如图，雷达探测器探测到三艘船 A ， B ， C ，按照目标表示方法的规定， B 的位置分别表示为 $A(5, 30^\circ)$ ， $B(6, 300^\circ)$ ，船 C 的位置应表示为_____.



【答案】 $(4, 240^\circ)$

【分析】 本题主要考查了用有序数对表示位置，根据题意可知有序数对种第一个数表示从内到外的圈数，第二个数表示对应线上的角度，据此可得答案

【详解】 解：由题意得，船 C 的位置应表示为 $(4, 240^\circ)$ ，

故答案为： $(4, 240^\circ)$

11. 若点 $A(a, 3)$ 在 y 轴上，则点 $B(a-1, a+2)$ 在第_____象限.

【答案】 二

【分析】 先根据 y 轴上点的坐标特征求出 a 的值，再代入得到点 B 的坐标，最后根据各象限点的坐标特征判断点 B 所在象限.

【详解】 解： $\because y$ 轴上所有点的横坐标为 0 ，点 $A(a, 3)$ 在 y 轴上，

$\therefore a = 0$ ，

将 $a = 0$ 代入点 B 的坐标得 $a - 1 = -1$ ， $a + 2 = 2$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1, 2)$ ，

$\because$ 第二象限内点的横坐标小于 0 ，纵坐标大于 0 ，

$\therefore$ 点 B 在第二象限.

12. 已知 ABC 三个顶点的坐标为 $A(1, 2)$ ， $B(4, 3)$ ， $C(3, -4)$ ，则三角形的形状为_____.

【答案】 直角三角形

【分析】 先计算出三角形三边的平方，再利用勾股定理逆定理判断三角形形状即可.

【详解】 解： $\because A(1, 2)$ ， $B(4, 3)$ ， $C(3, -4)$ ，

$$\therefore AB^2 = (1-4)^2 + (2-3)^2 = 9+1=10,$$

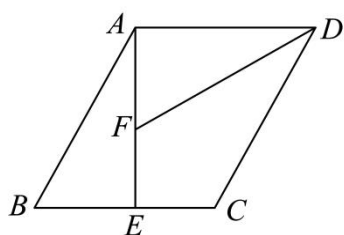
$$AC^2 = (1-3)^2 + (2+4)^2 = 4+36=40,$$

$$BC^2 = (4-3)^2 + (3+4)^2 = 1+49=50,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 10 + 40 = 50 = BC^2,$$

$\therefore ABC$ 是直角三角形.

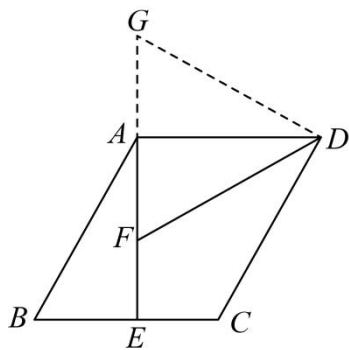
13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$ 于点 E , DF 平分 $\angle ADC$ 交 AE 于点 F , 若 $AD = AE$, $AF = 5\sqrt{3}$, $BE = 3\sqrt{3}$, 则 CD 的长为_____.



【答案】 $8\sqrt{3}$

【分析】 此题考查了全等三角形的判定与性质, 平行四边形的性质, 等腰三角形的判定与性质. 延长 FA 到点 G 使得 $AG = BE$, 可得 $\triangle ADG \cong \triangle EAB$, 再利用平行四边形的性质得到 $\angle GFD = \angle GDF$, 即可求解.

【详解】 解: 延长 FA 到点 G 使得 $AG = BE$, 如图:



由题意可得: $\angle GAD = \angle AEB = 90^\circ$,

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = BE \\ \angle GAD = \angle AEB = 90^\circ, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle EAB$ (SAS),

$\therefore \angle BAE = \angle GDA$, $GD = AB$,

在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle ADC$, $AE \perp BC$, $CD = AB$,

$$\therefore \angle BAE + \angle B = \angle GDA + \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle AFD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF = 90^\circ - \angle CDF, \quad \angle AFD = 90^\circ - \angle ADF,$$

$\therefore DF$ 平分 $\angle ADC$,

$$\therefore \angle ADF = \angle CDF,$$

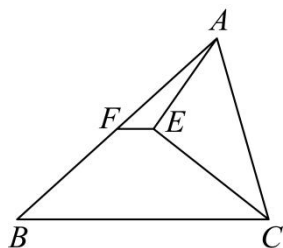
$$\therefore \angle AFD = \angle GDF,$$

$$\therefore GD = GF = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = AB = GD = 8\sqrt{3}.$$

故答案为: $8\sqrt{3}$.

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACE = \angle ECB$, $AE \perp EC$, F 是边 AB 的中点, $AE = 3$, $EC = 4$, $BC = 7$, 那么 FE 的长是_____.

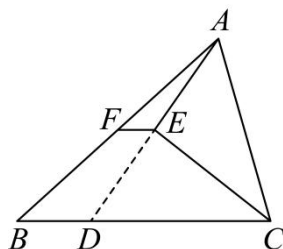


【答案】1

【分析】本题考查三角形中位线定理, 勾股定理以及全等三角形的判定和性质, 解题的关键是通过延长 AE 构造全等三角形, 得出线段关系, 再利用中位线定理求解.

延长 AE 交 BC 于点 D , 先证 $\triangle AEC \cong \triangle DEC$, 得到 $AC = CD$ 的长度, 利用勾股定理求得 AC 的长度, 再结合 E 为 AD 中点, F 是 AB 中点, 利用中位线定理求 FE .

【详解】延长 AE 交 BC 于点 D ,



$$\therefore \angle AEC = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp EC,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle ECB \\ EC = EC \\ \angle AEC = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore AC = CD, \quad AE = DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = 3$, $EC = 4$,

$$\therefore AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD + CD$$

$$\therefore BD = BC - CD = 7 - 5 = 2$$

$$\because AE = DE,$$

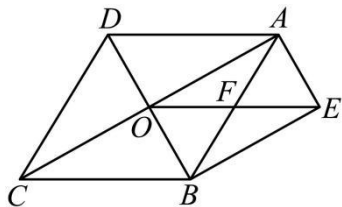
$\therefore E$ 为 AD 的中点,

又 $\because F$ 是边 AB 的中点,

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

故答案为: 1.

15. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $BE \parallel AC$, $AE \parallel BD$, OE 与 AB 交于点 F . 若 $OE = 5$, $AC = 8$, 则菱形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】24

【分析】根据菱形的对角线性质可得 $OA = \frac{1}{2}AC$ 、 $AC \perp BD$, 易证得四边形 $AOBE$ 是矩形, 进而得到 $AB = OE$, 再利用勾股定理求出 OB 的长, 进而得到 BD 的长, 从而计算菱形 $ABCD$ 的面积.

【详解】解: $\because$ 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O ,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \quad AC \perp BD,$$

$$\because BE \parallel AC, \quad AE \parallel BD,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBE$ 是平行四边形,

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBE$ 是矩形,

$$\therefore AB = OE = 5,$$

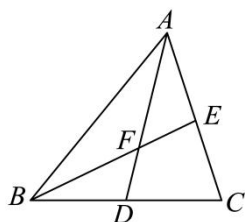
$$\text{在 Rt}\triangle OAB \text{ 中, } OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BD = 2OB = 2 \times 3 = 6,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

故答案为: 24.

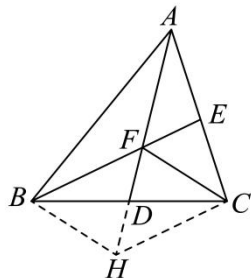
16. 如图, F 是 $\triangle ABC$ 的重心, 连接 AF 并延长交 BC 于点 D , 连接 BF 并延长交 AC 于点 E . 若 $\triangle ABF$ 的面积是 8cm^2 , 则四边形 $CDFE$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.



【答案】8

【分析】本题考查了三角形的重心, 三角形的面积, 理解三角形的重心的定义, 等底 (或同底) 同高 (或等高) 的两个三角形的面积相等, 同高 (或等高) 的两个三角形的面积之比等于对应底边的比是解决问题的关键, 熟练掌握平行四边形的判定和性质, 三角形中位线定义是解决问题的关键. 延长 AD 到 H , 使 $DH = DF$, 连接 BH , CH , 延长 BF 交 AC 于点 E , 则 $FH = 2DF$, 证明四边形 $FBHC$ 是平行四边形得 $BE \parallel CH$, $CH = BF$, 进而得 EF 是 $\triangle ACH$ 的中位线, 则 $CH = BF = 2EF$, $AF = FH = 2DF$, 根据三角形的面积公式得 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DBF}} = \frac{AF}{DF}$, 由此得 $S_{\triangle DBF} = 4$, 进而得 $S_{\triangle DCF} = S_{\triangle DBF} = 4$, 则 $S_{\triangle FBC} = 8$, 再根据 $\frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{BF}{EF}$ 得 $S_{\triangle FCE} = 4$, 据此即可得出四边形 $CDFE$ 的面积.

【详解】解: 如图, 延长 AD 到 H , 使 $DH = DF$, 连接 BH , CH , 延长 BF 交 AC 于点 E ,



$$\therefore FH = DH + DF = 2DF,$$

$\therefore F$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore BD = CD, \quad AE = CE,$$

$$\therefore DH = DF,$$

∴ 四边形 $FBHC$ 是平行四边形,

∴ $BE \parallel CH$, $CH = BF$,

又 ∵ $AE = CE$,

∴ EF 是 $\triangle ACH$ 的中位线,

∴ $EF = \frac{1}{2}CH$, $AF = FH = 2DF$,

∴ $CH = BF = 2EF$,

∴ $\triangle ABF$ 的边 AF 上的高与 $\triangle DBF$ 的边 DF 上的高相同,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DBF}} = \frac{AF}{DF},$$

∵ $\triangle ABF$ 的面积是 8cm^2 ,

$$\therefore \frac{8}{S_{\triangle DBF}} = \frac{2DF}{DF},$$

$$\therefore S_{\triangle DBF} = 4\text{cm}^2,$$

∵ $BD = CD$, $\triangle DCF$ 的边 DF 上的高与 $\triangle DBF$ 的边 DF 上的高相同,

$$\therefore S_{\triangle DCF} = S_{\triangle DBF} = 4\text{cm}^2,$$

$$\therefore S_{\triangle FBC} = S_{\triangle DCF} + S_{\triangle DBF} = 8\text{cm}^2,$$

又 ∵ $\triangle FBC$ 的边 BF 上的高与 $\triangle FCE$ 的边 EF 上的高相同,

$$\therefore \frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{BF}{EF},$$

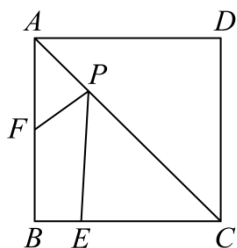
$$\therefore \frac{8}{S_{\triangle FCE}} = \frac{2EF}{EF},$$

$$\therefore S_{\triangle FCE} = 4\text{cm}^2,$$

∴ 四边形 $CDFE$ 的面积为: $S_{\triangle DCF} + S_{\triangle FCE} = 4 + 4 = 8(\text{cm}^2)$.

故答案为: 8.

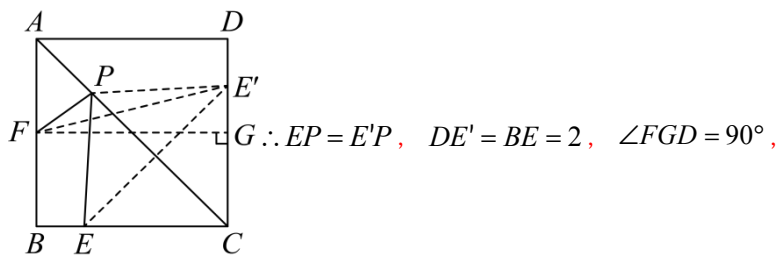
17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8, E 为 BC 上的一点, $BE = 2$, F 为 AB 上的一点, $AF = 4$, P 为 AC 上一个动点, 则 $PF + PE$ 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{17}$

【分析】 根据“将军饮马”模型，作点 E 关于直线 AC 的对称点 E' ，连接 $E'F$ ，则 $PF + PE$ 的最小值为 $E'F$ 的长，再过点 F 作 $FG \perp CD$ 于点 G ，证出四边形 $AFGD$ 为矩形，进一步得出 FG 和 GE' 的长，最后利用勾股定理求解即可。

【详解】 解：如图，作点 E 关于直线 AC 的对称点 E' ，连接 $E'F$ ， PE' ，过点 F 作 $FG \perp CD$ 于点 G ，



$$\therefore PF + PE = PF + E'P \geq E'F.$$

在正方形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle BCD = \angle B = \angle D = 90^\circ$ ， $AD = 8$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFGD$ 为矩形，

$$\therefore DG = AF = 4, \quad GF = AD = 8,$$

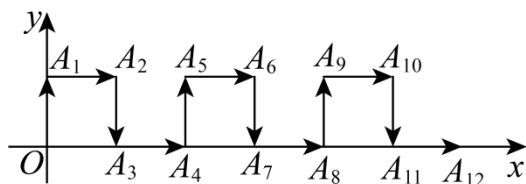
$$\therefore GE' = GD - DE' = 4 - 2 = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle E'FG$ 中，

$$\therefore E'F = \sqrt{FG^2 + GE'^2} = 2\sqrt{17},$$

即 $PF + PE$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$ 。

18. 在平面直角坐标系中，一只青蛙从原点 O 出发，按向上、向右、向下、向右的方向依次跳动，每次跳动 2 个单位长度，其行走路线如图所示，则点 A_{2025} 的坐标为_____。



【答案】 $(2024, 2)$

【分析】 本题考查了规律型问题在点的坐标问题中的应用，利用移动规律得出坐标变化规律是解题的关键。

根据图象先计算出 A_4 和 A_8 的坐标，进而得出点 A_{4n} 的坐标为 $(4n, 0)$ ，再用 $2024 \div 4 = 506$ ，可得出点 A_{2025} 的坐标，即可求解。

【详解】解：由图可知 A_4, A_8 都在 x 轴上，

$\therefore$ 青蛙每次移动 2 个单位，

$$\therefore OA_4 = 4, OA_8 = 8,$$

$$\therefore A_4(4, 0), A_8(8, 0),$$

$$\therefore \text{点 } A_{4n} \text{ 的坐标为 } (4n, 0),$$

$$\text{则 } 2024 \div 4 = 506,$$

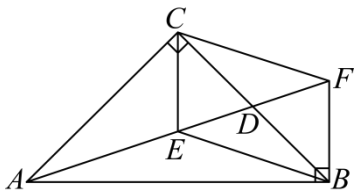
$$\therefore A_{2024} \text{ 点的坐标是 } (2024, 0).$$

$$\therefore \text{点 } A_{2024} \text{ 向上移动 2 个单位长度得到点 } A_{2025},$$

$$\therefore \text{点 } A_{2025} \text{ 的坐标是 } (2024, 2)$$

三、解答题(本大题共有 6 题，第 19~21 题每题 6 分，第 22~24 题每题 8 分，第 25 题 10 分，满分 52 分)

19. (本题 6 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， D 为 BC 边的中点，过点 B 作 $BF \perp AB$ 交 AD 的延长线于点 F ， CE 平分 $\angle ACB$ 交 AD 于点 E ，连接 BE, CF 。



(1) 求证：四边形 $CEBF$ 是平行四边形；

(2) 若 $AF = 4$ ，求 CF 的长。

【详解】(1) 证明： $\because \angle ACB = 90^\circ, AC = BC$,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ.$$

$$\because BF \perp AB,$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 45^\circ.$$

$$\because CE \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle CBF. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because D \text{ 为 } BC \text{ 边的中点},$$

$$\therefore CD = BD.$$

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,
$$\begin{cases} \angle DCE = \angle DBF, \\ CD = BD, \\ \angle CDE = \angle BDF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BDF$ (ASA),

$\therefore DE = DF$,

$\therefore$ 四边形 $CEBF$ 是平行四边形.3 分

(2) 解: $\because CE$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ACE = \angle BCE$,

$\because CE = CE$, $AC = BC$,

$\triangle ACE \cong \triangle BCE$ (SAS),

$\therefore AE = BE$,

$\therefore \angle EAB = \angle EBA$.

$\because \angle EAB + \angle AFB = 90^\circ$,

$\angle EBA + \angle EBF = 90^\circ$,

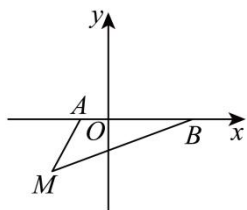
$\therefore \angle AFB = \angle EBF$,

$\therefore BE = EF = AE = \frac{1}{2}AF = 2$.

$\therefore$ 四边形 $CEBF$ 是平行四边形,

$\therefore CF = BE = 2$6 分

20. (本题 6 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $M(-2,-2)$.



(1) 求出 $\triangle ABM$ 的面积.

(2) 在 y 轴上有一点 P , 使得 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABM$ 的面积相等, 请求出点 P 的坐标.

【答案】 (1) 4 (2) $(0, -2)$ 或 $(0, 2)$

【分析】 (1) 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N , 根据 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot MN$ 列式求解即可;

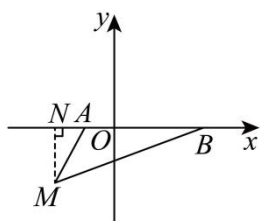
(2) 设点 P 的坐标为 $(0, p)$, 则 $OP = |p|$, 根据三角形的面积公式可得 $\frac{1}{2} \times 4|p| = 4$, 解方程即可得到答案.

【详解】(1) 解: 如图所示, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N ,

$$\therefore A(-1,0), B(3,0), M(-2,-2),$$

$$\therefore AB = 3 - (-1) = 4, MN = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



(2) 解: 设点 P 的坐标为 $(0,p)$, 则 $OP = |p|$,

$\therefore \triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABM$ 的面积相等,

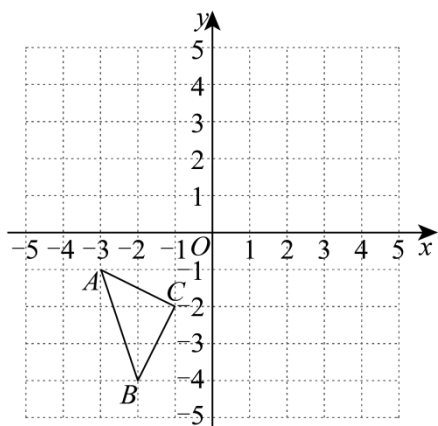
$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OP = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 |p| = 4,$$

$$\therefore p = \pm 2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,-2)$ 或 $(0,2)$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

21. (本题 6 分) 如图, 在直角坐标系中, 已知 ABC 的三个顶点坐标分别是 $A(-3,-1), B(-2,-4), C(-1,-2)$.



(1) 将 ABC 向右平移 1 个单位, 再向上平移 4 个单位, 得到 $A_1B_1C_1$, 请画出 $\triangle A_1B_1C_1$, 并直接写出点 A_1 的坐标为_____;

(2) 画出 ABC 关于原点对称的 $\triangle A_2B_2C_2$, 并直接写出点 B_2 的坐标为_____.

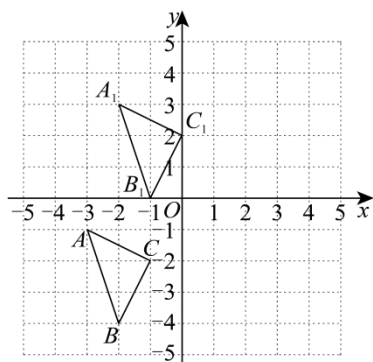
【答案】(1) 图见解析, $(-2,3)$

(2)图见解析, $(2,4)$

【分析】(1) 将 $A(-3,-1), B(-2,-4), C(-1,-2)$ 分别向右平移 1 个单位, 再向上平移 4 个单位, 再顺次连接即可得到 $\triangle A_1B_1C_1$;

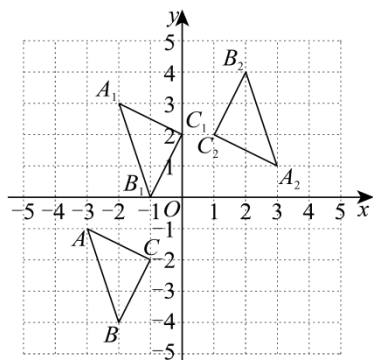
(2) 找出 $A(-3,-1), B(-2,-4), C(-1,-2)$ 关于原点的对称点, 顺次连接即可, 关于原点对称的两个点的横纵坐标均互为相反数, 由此可得点 B_2 的坐标.

【详解】(1) 解: 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求, 点 A_1 的坐标为 $(-2,3)$;



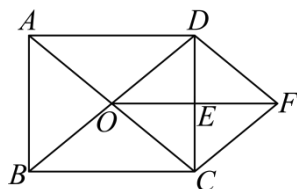
3 分

(2) 解: 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求, 点 B_2 的坐标为 $(2,4)$.



6 分

22. (本题 8 分) 如图所示, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 为 CD 的中点, 连接 OE 并延长至点 F , 使得 $EF = OE$, 连接 CF , DF .



(1) 求证: 四边形 $OCFD$ 是菱形;

(2) 若菱形 $OCFD$ 的周长为 36, 平行线 OD 与 CF 之间的距离为 8, 求矩形 $ABCD$ 的周长.

【答案】(1) 见解析

(2) $12\sqrt{17}$

【分析】(1) 通过 $CE = DE$ ， $OE = FE$ ，证明四边形 $OCFD$ 是平行四边形，再利用四边形 $ABCD$ 是矩形，得出 $OC = OD$ ，即可求证；

(2) 证明 $\triangle OED$ 是直角三角形，得出 $OE^2 + ED^2 = OD^2 = 81$ 。再利用 $S_{\text{菱形}OCFD} = OD \cdot h = 72$ ，得出

$(OE + ED)^2 = OE^2 + ED^2 + 2OE \cdot ED = OD^2 + S_{\text{菱形}OCFD} = 153$ ，求出 $OE + ED = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ ，再利用中位线的性质得 $OE = \frac{1}{2}AD$ 即可求出 $AD + DC = 2(OE + ED) = 6\sqrt{17}$ ，即可求解。

【详解】(1) 证明： $\because$ 点 E 是 CD 的中点，

$\therefore CE = DE$ 。

又 $\because OE = FE$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCFD$ 是平行四边形。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD$ ， $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD$ ，

$\therefore OC = OD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $OCFD$ 是菱形； 4 分

(2) 解： $\because$ 四边形 $OCFD$ 是菱形，且周长为 36，

$\therefore OC = CF = FD = DO = 9$ ， $OF \perp CD$ ，

$\therefore \angle OED = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle OED$ 是直角三角形，

$\therefore OE^2 + ED^2 = OD^2 = 81$ 。

设平行线 OD 与 CF 之间的距离为 h ，则 $h = 8$ ，

$\therefore S_{\text{菱形}OCFD} = OD \cdot h = 9 \times 8 = 72$ ，

$\therefore (OE + ED)^2 = OE^2 + ED^2 + 2OE \cdot ED = OD^2 + S_{\text{菱形}OCFD} = 153$ ，

$\because OE + ED > 0$ ，

$\therefore OE + ED = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ ，

$\because OC = OA$ ， $CE = DE$ ，

$\therefore OE = \frac{1}{2}AD$ 。

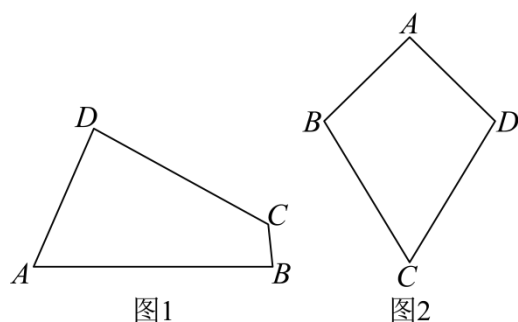
$$\text{又} \because DE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore AD + DC = 2(OE + ED) = 6\sqrt{17},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(AD + DC) = 12\sqrt{17}$8 分

23. (本题 8 分) 我们给出定义: 有一组对角相等而另一组对角不相等的凸四边形叫做“等对角四边形”.



(1) 已知: 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是“等对角四边形”, $\angle A \neq \angle C$, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, 求 $\angle C$, $\angle D$ 的度数.

(2) 在探究“等对角四边形”性质时:

① 小红画了一个“等对角四边形” $ABCD$ (如图 2), 其中 $\angle ABC = \angle ADC$, $AB = AD$, 此时她发现 $CB = CD$ 成立. 请你证明此结论.

② 由此小红猜想: “对于任意‘等对角四边形’, 当一组邻边相等时, 另一组邻边也相等”.

你认为她的猜想正确吗? 若正确, 请证明; 若不正确, 请举出反例.

(3) 已知: 在“等对角四边形” $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 7$, $AD = 5$. 求对角线 AC 的长.

【答案】 (1) 130° , 80°

(2) ① 证明见解析; ② 不正确, 反例见解析

(3) $2\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{97}$

【分析】 (1) 根据定义和四边形内角和定理求解即可.

(2) ① 连接 BD , 根据定义以及等腰三角形的判定和性质求证即可.

② 当相等角的两边相等时, 结论不正确.

(3) 分 $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ 和 $\angle BCD = \angle DAB = 60^\circ$ 两种情况讨论即可.

【详解】 (1) $\because$ 等对角四边形 $ABCD$ 中, $\angle A \neq \angle C$, $\angle B = 80^\circ$,

$$\therefore \angle D = \angle B = 80^\circ.$$

$$\because \angle A = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 360^\circ - \angle A - \angle B - \angle D = 360^\circ - 75^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 125^\circ.1 \text{ 分}$$

(2) ①如图, 连接 BD ,

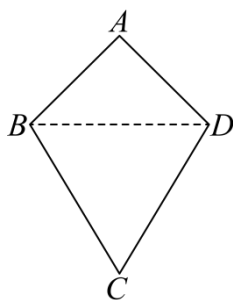
$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB.$$

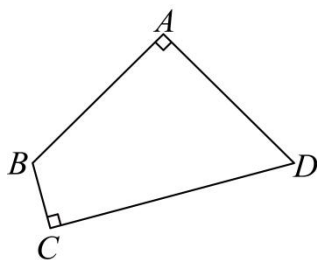
$$\because \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB.$$

$$\therefore CB = CD. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



②不正确, 反例如图, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = AD$, 但 $CB \neq CD$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



(3) ①如图, 当 $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ 时, 延长 AD, BC 交于点 E ,

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle DAB = 60^\circ, AB = 7,$$

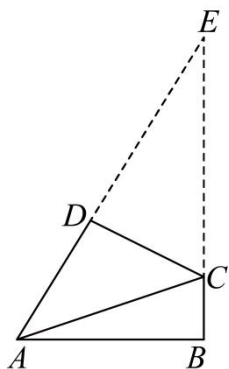
$$\therefore \angle E = 30^\circ, AE = 2AB = 14,$$

$$\therefore DE = AE - AD = 14 - 5 = 9,$$

$$\because \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$



②如图，当 $\angle BCD = \angle DAB = 60^\circ$ 时，过 D 点作 $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F ，

$\because DE \perp AB$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AD = 5$ ，

$$\therefore AE = \frac{5}{2}, DE = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BE = AB - AE = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

$\because$ 四边形 $BFDE$ 是矩形，

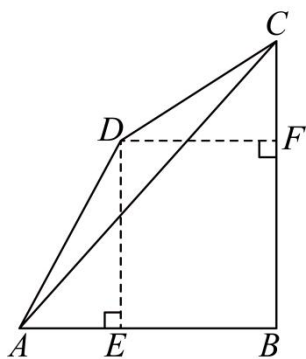
$$\therefore DF = BE = \frac{9}{2}, BF = DE = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$\because \angle BCD = 60^\circ$ ，

$$\therefore CF = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

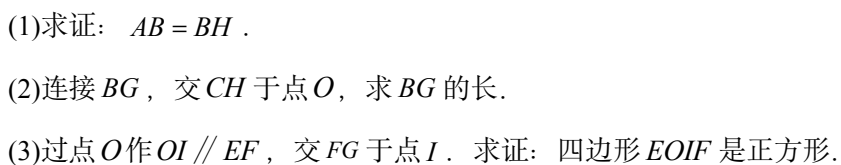
$$\therefore BC = CF + BF = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{97},$$



综上， AC 的长为 $2\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{97}$ 8 分

24. (本题 8 分) 如图，将矩形 $ABCD$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转，得到矩形 $FECG$ ，点 B 与点 E 对应，点 E 恰好落在边 AD 上， $BH \perp CE$ 于点 H ，其中 $AB = 3$ ， $BC = 5$ 。



(2) 连接 BG ，交 CH 于点 O ，求 BG 的长.

(3) 过点 O 作 $OI \parallel EF$, 交 FG 于点 I . 求证: 四边形 $EOIF$ 是正方形.

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AB = CD,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCH \text{ .}$$

$$\because \angle D = 90^\circ, \quad BH \perp CE,$$

$$\therefore \angle D = \angle BHC.$$

由旋转, 得 $CE = CB$.

在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle CHB$ 中,

$$\begin{cases} \angle DEC = \angle BCH \\ \angle D = \angle BHC \\ CE = CB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EDC \cong \triangle CHB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CD = BH .$$

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore AB = BH$ 2 分

(2) 解: 在 $\triangle HBO$ 和 $\triangle CGO$ 中,

$$\begin{cases} \angle OHB = \angle OCG \\ \angle HOB = \angle COG, \\ BH = GC \end{cases}$$

$$\therefore {}_{\Delta} HBO \cong_{\Delta} CGO(AAS).$$

$$\therefore OH = OC, \quad OB = OG.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, 由勾股定理, 得 $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$$\therefore OH = OC,$$

$$\therefore OH = OC = \frac{1}{2}CH = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle OHB$ 中, 由勾股定理, 得 $BO = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$

$$\therefore BG = 2BO = 2\sqrt{13}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(3) 证明: $\because$ 四边形 $FECG$ 是矩形, $OI \parallel EF,$

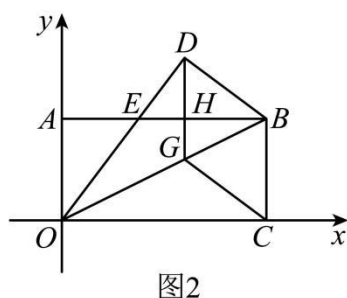
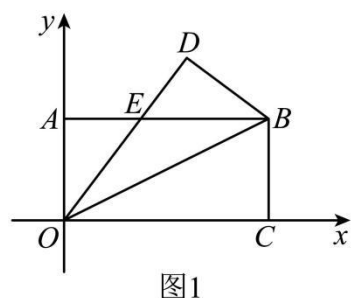
$\therefore$ 四边形 $EOIF$ 是矩形.

$$\therefore EO = EC - CO = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore EO = EF = 3,$$

$\therefore$ 四边形 $EOIF$ 是正方形. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

25. (本题 10 分) 如图 1, 将矩形 $OABC$ 放在直角坐标系中, O 为原点, 点 C 在 x 轴上, 点 A 在 y 轴上, $OA = 4,$
 $OC = 8$. 把矩形 $OABC$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E .



(1) 求点 E 坐标.

(2) 如图 2, 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 OB 于点 G , 交 AB 于点 H , 连接 CG , 试判断四边形 $BCGD$ 的形状, 并说明理由.

(3) 在 (2) 的条件下, 点 M 是坐标轴上一点, 直线 OB 上是否存在一点 N , 使以 O 、 D 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出点 N 坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) (3,4)

(2) 四边形 $BCGD$ 是菱形, 理由见解析

(3) $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{64}{5}, \frac{32}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{64}{5}, -\frac{32}{5}\right)$

【分析】 (1) 证明 $EO = EB$, 设 $AE = x$, 则 $OE = BE = 8 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, 利用勾股定理构建方程求解即可;

(2) 四边形 $BCGD$ 是菱形, 根据邻边相等的平行四边形是菱形证明即可;

(3) 有 5 种情形, 画出图形分别求解即可.

【详解】(1) 解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形, $OA=4$, $OC=8$,

$\therefore AB=OC=8$, $BC=AO=4$, $AB \parallel OC$, $\angle ABC = \angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABO = \angle BOC$,

$\therefore$ 把矩形 $OABC$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E ,

$\therefore \angle BOC = \angle BOD$,

$\therefore \angle EOB = \angle EBO$,

$\therefore EO = EB$,

设 $AE = x$, 则 $EO = EB = AB - AE = 8 - x$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, $\angle OAE = 90^\circ$,

$\therefore OA^2 + AE^2 = OE^2$,

$\therefore 4^2 + x^2 = (8 - x)^2$,

解得: $x = 3$,

$\therefore E(3, 4)$;2 分

(2) 四边形 $BCGD$ 是菱形. 理由如下:

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore \angle DGB = \angle CBG$,

$\therefore$ 把矩形 $OABC$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E ,

$\therefore \angle DBG = \angle CBG$, $BD = BC$, $\angle ODB = \angle OCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DGB = \angle DBG$,

$\therefore DG = DB = CB$,

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCGD$ 是平行四边形,

$\therefore BD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCGD$ 是菱形.5 分

(3) ①当点 N_1 与 G 重合, 点 M_1 与 A 重合, 四边形 DM_1ON_1 是平行四边形,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中, $\angle EDB = 90^\circ$, $EB = AB - AE = 8 - 3 = 5$, $DB = BC = OA = 4$,

$\therefore DE = \sqrt{EB^2 - DB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore DG \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DHB = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle EDB} = \frac{1}{2}EB \cdot DH = \frac{1}{2}ED \cdot BD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times DH = \frac{1}{2} \times 3 \times 4,$$

$$\therefore DH = \frac{12}{5},$$

$$\therefore GH = DG - DH = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5},$$

则点 D 到 x 轴的距离为: $\frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$, 点 G 到 x 轴的距离为: $4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$,

$$\therefore EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AH = AE + EH = 3 + \frac{9}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore D\left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right), N_1\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

②当四边形 ODN_1M 是平行四边形时, 此时点 N_1 与 G 重合, $DN_1 \parallel OM$ 且 $DN_1 = OM$, 则 $N_1\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$..7 分

③当四边形 ODN_2M_2 是平行四边形时, 此时点 M_2 与 C 重合, $DO \parallel N_2M_2$ 且 $DO = N_2M_2$,

即线段 OD 向右平移 8 个单位得到线段 N_2M_2 , 则点 M_2 是点 O 的对应点, 点 N_2 是点 D 的对应点,

$$\therefore O(0,0), D\left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right), M_2(8,0),$$

$$\therefore N_2\left(\frac{24}{5} + 8, \frac{32}{5}\right) \text{ 即 } N_2\left(\frac{64}{5}, \frac{32}{5}\right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

④当四边形 ODM_1N_3 是平行四边形时, 此时点 M_1 与 A 重合, $DM_1 \parallel ON_3$ 且 $DM_1 = ON_3$,

即线段 DM_1 向左平移 $\frac{24}{5}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{32}{5}$ 得到线段 ON_3 , 则点 O 是点 D 的对应点, 点 N_3 是点 M_1 的对应点,

$$\therefore O(0,0), D\left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right), M_1(0,4),$$

$$\therefore N_3\left(0 - \frac{24}{5}, 4 - \frac{32}{5}\right) \text{ 即 } N_3\left(-\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

⑤当四边形 ODM_4N_4 是平行四边形时, $DM_4 \parallel ON_4$ 且 $DM_4 = ON_4$,

$$\therefore AB \parallel x \text{ 轴}, AD \parallel OG,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABOM_4 \text{ 是平行四边形},$$

