

# 华曜初中 2025 学年第二学期初二年级期中考试

## 数学试卷

满分：150 分，时间：100 分钟

### 一、单选题

1. 下列函数中，一定是二次函数的是 ( )

A.  $y = \frac{3}{4}x + m^2$  (其中  $m$  是常数)

B.  $y = ax^2 + bx + c$  (其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是常数)

C.  $y = (2x - 1)x$

D.  $y = (x + 4)^2 - x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的判断，根据形如  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )，这样的函数叫做二次函数，进行判断即可。

【详解】解：A、是一次函数，不符合题意；

B、当  $a = 0$  时，不是二次函数，不符合题意；

C、 $y = (2x - 1)x = 2x^2 - x$ ，是二次函数，符合题意；

D、 $y = (x + 4)^2 - x^2 = 8x + 16$ ，不含二次项，不是二次函数，不符合题意。

故选 C。

2. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ，下列结论正确的是 ( )

A.  $\tan A = \frac{2}{3}$

B.  $\cot A = \frac{2}{3}$

C.  $\sin A = \frac{2}{3}$

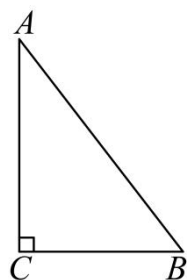
D.  $\cos A = \frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查锐角三角函数定义，根据锐角三角函数的定义即可求得答案。

【详解】解：已知  $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ，



$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5},$$

$\therefore A$ 、 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，故选项错误；

B、 $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故选项错误；

C、 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，故选项错误；

A、 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$ ，故选项正确；

故选：D.

3. 将抛物线  $y = -3x^2$  向左平移 4 个单位长度，所得到抛物线的表达式是 ( )

A.  $y = -3(x+4)^2$       B.  $y = -3(x-4)^2$       C.  $y = -3x^2 + 4$       D.  $y = -3x^2 - 4$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，根据“左加右减，上加下减”的法则解答即可.

【详解】解：将抛物线  $y = -3x^2$  向左平移 4 个单位长度，得到的抛物线是  $y = -3(x+4)^2$ .

故选：A.

4. 泰勒斯是古希腊时期的思想家、科学家、哲学家，他曾通过测量同一时刻标杆的影长，标杆的高度，金字塔的影长，推算出金字塔的高度，这种测量原理，就是我们所学的 ( )

- A. 图形的相似      B. 图形的平移  
C. 图形的旋转      D. 图形的翻折

【答案】A

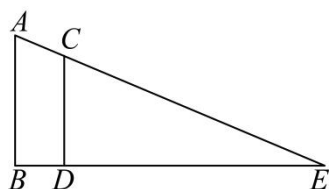
【解析】

【分析】本题主要考查将实际问题数学化，根据实际情况画出图形即可求解. 根据在同一时刻的太阳光下物体的影长和物体的实际高度成比例即可判断.

【详解】解：根据题意画出如下图形：可以得到  $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ，则  $\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DE}$ ，

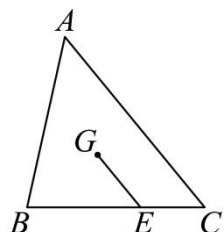
$AB$  即为金字塔的高度， $CD$  即为标杆的高度，通过测量影长即可求出金字塔的高度，

$\therefore$  这种测量原理，就是我们所学的图形相似.



故选：A.

5. 如图，点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心， $GE \parallel AC$  交  $BC$  于点  $E$ . 如果  $AC = 12$ ，那么  $GE$  的长为 ( )



A. 3

B. 4

C. 6

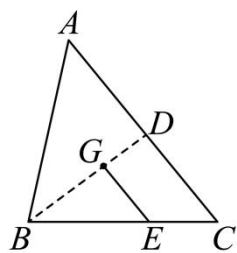
D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查的是重心的概念和性质、相似三角形的判定和性质，掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键. 连接  $BG$  并延长交  $AC$  于  $D$ ，根据点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，得到  $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ， $\frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}$ ，根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【详解】 解：连接  $BG$  并延长交  $AC$  于  $D$ ，



$\because$  点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \quad \frac{BG}{BD} = \frac{2}{3},$$

$\because GE \parallel AC$ ,

$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BCD$ ,

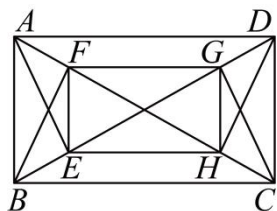
$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{EG}{CD},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{EG}{6},$$

$$\therefore GE = 4,$$

故选：B.

6. 如图，过矩形  $ABCD$  的顶点分别作对角线的垂线，垂足分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ ，依次连接四个垂足，可得到矩形  $EFGH$ 。设对角线  $AC$  与  $BD$  的夹角为  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ )，那么矩形  $EFGH$  与矩形  $ABCD$  面积的比值为 ( )



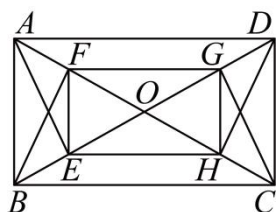
- A.  $\sin^2 \alpha$                       B.  $\cos^2 \alpha$                       C.  $\tan^2 \alpha$                       D.  $\cot^2 \alpha$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查相似多边形的判定和性质，先推导  $\triangle OFB \sim \triangle OEA$ ，得到  $\frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OA} = \frac{EF}{AB} = \cos \alpha$ ，然后利用相似多边形的面积比等于相似比的平方是解题的关键。

【详解】如图，设对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ，



$\because ABCD, EFGH$  是矩形,

$\therefore OA = OB = OC = OD$ ,

$\because BF \perp AC, AE \perp BD$ ,

$\therefore \angle AEO = \angle BFO = 90^\circ$ ,

又  $\because \angle EOF = \angle BOA$ ,

$\therefore \triangle OFB \cong \triangle OEA$ ,

$\therefore OF = OE$

$\because \frac{OF}{OA} = \frac{OE}{OB}, \angle EOF = \angle AOB$ ,

$\therefore \triangle OEF \sim \triangle OBA$ ,

$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} = \frac{EF}{AB}$ ,

$$\therefore \cos \alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OA},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \cos \alpha,$$

$$\therefore \frac{OF}{OA} = \frac{OG}{OD}, \quad \angle AOD = \angle FOG,$$

$$\triangle OFG \sim \triangle OAD,$$

$$\therefore \frac{FG}{AD} = \frac{OF}{OA} = \cos \alpha,$$

$$\therefore \text{矩形 } EFGH \text{ 与矩形 } ABCD \text{ 面积的比为 } \frac{EF}{AB} \cdot \frac{FG}{AD} = \cos^2 \alpha,$$

故选 B.

## 二、填空题

7. 已知  $x:y=3:2$ , 那么  $(x-y):x=$  \_\_\_\_\_.

【答案】 1:3

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质, 表示出  $y$  是解题的关键. 先用  $x$  表示出  $y$ , 再代入比例式进行计算即可得解.

【详解】 解:  $\because x:y=3:2$ ,

$$\therefore y = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore (x-y):x = \left(x - \frac{2}{3}x\right):x = \frac{1}{3}x:x = 1:3,$$

故答案为: 1:3.

8. 如果两个相似三角形的周长比为 2:3, 那么它们的对应高的比为\_\_\_\_\_.

【答案】 2:3

【解析】

【分析】 根据相似三角形的周长比等于相似比可求得其相似比, 再根据对应高线的比等于相似比可得到答案.

【详解】  $\because$  两个相似三角形的周长比为 2:3,

$\therefore$  两个相似三角形的相似比为 2:3,

$\therefore$  对应高线的比为 2:3,

故答案为: 2:3.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质, 掌握相似三角形的周长比、对应高线比等于相似比是解题的关

键.

9. 已知抛物线  $y = (1-a)x^2 + 3$  开口向下, 那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $a > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与系数的关系: 二次项系数  $a$  决定抛物线的开口方向和大小. 当  $a > 0$  时, 抛物线开口向上; 当  $a < 0$  时, 抛物线开口向下. 根据二次函数的性质可知, 当抛物线开口向下时, 二次项系数  $1-a < 0$ .

【详解】 解:  $\because$  抛物线  $y = (1-a)x^2 + 3$  的开口向下,

$\therefore 1-a < 0$ , 解得,  $a > 1$ .

故答案为:  $a > 1$ .

10. 上海与杭州的实际距离约 200 千米, 在比例尺为 1: 5000000 的地图上, 上海与杭州的图上距离约 \_\_\_\_\_ 厘米.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据题意及比例尺可直接进行求解.

【详解】 解:  $\because$  200 千米 = 20000000 厘米,

$\therefore$  上海与杭州的图上距离约为  $20000000 \times \frac{1}{5000000} = 4\text{cm}$ ;

故答案为 4.

【点睛】 本题主要考查比例尺, 熟练掌握图上距离 = 实际距离  $\times$  比例尺是解题的关键.

11. 已知一坡面的坡度  $i = 1:\sqrt{3}$ , 那么这个坡角等于\_\_\_\_\_°.

【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查了坡度的计算, 特殊角的三角函数值的计算, 理解坡度的含义, 掌握特殊角的三角函数的计算是解题的关键.

根据坡度坡面的垂直高度 ( $h$ ) 和水平宽度 ( $l$ ) 的比值, 即坡角的正切值  $\tan \alpha$ , 其中  $\alpha$  是斜坡与水平面之间的夹角, 由此即可求解.

【详解】 解: 设坡角为  $\alpha$ ,

$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$$\therefore a = 30^\circ,$$

故答案为：30 .

12. 已知抛物线  $y = x^2 - c$  经过点  $A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$ , 那么  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$ . (填 “>”、“<”、或 “=”)

【答案】<

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象性质，熟悉掌握二次函数的图象性质是解题的关键.

找出二次函数的开口方向和对称轴，即可根据位置信息求解.

【详解】 解：  $\because y = x^2 - c$

$\therefore a = 1$  开口向上，  $y$  有最小值， 且对称轴为  $y$  轴，

$\therefore$  越靠近  $y$  轴， 值越小，

$$\because |-1| < |4|$$

$$\therefore y_1 < y_2$$

故答案为：< .

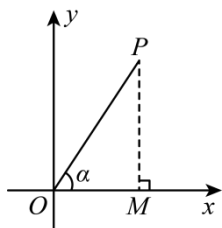
13. 在直角坐标平面内有一点  $P(3,1)$ ， 那么  $OP$  与  $x$  轴正半轴夹角的余弦值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  ##  $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形、勾股定理等知识点. 作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ ， 构造直角三角形， 根据三角函数的定义求解.

【详解】 解： 如图， 作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ ，  $P(3,1)$ ，



根据勾股定理可得  $OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$  ,

$$\therefore \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故答案为:  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

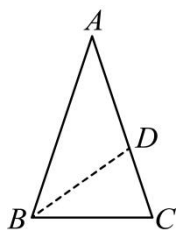
14. 顶角为  $36^\circ$  的等腰三角形的腰与底的比值为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】作  $\angle ABC$  的平分线  $BD$  交  $AC$  于点  $D$ , 得到的  $\triangle BCD$  和  $\triangle ABC$  都是顶角为  $36^\circ$  的等腰三角形, 根据它们的腰和底对应成比例, 列比例式解答即可.

【详解】解: 设等腰  $\triangle ABC$  中, 顶角  $\angle BAC = 36^\circ$ ,  $AB = AC = a$  (腰长),  $BC = b$  (底边长),



$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle A) = 72^\circ.$$

作  $\angle ABC$  的平分线  $BD$  交  $AC$  于点  $D$ .

$$\text{则 } \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BAC = 36^\circ,$$

$$\therefore AD = BD.$$

$$\because \angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle ACB = 72^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore BD = BC = b,$$

$$\therefore AD = BD = b, \quad DC = AC - AD = a - b$$

$\because \triangle ABC$  和  $\triangle BDC$  都是顶角为  $36^\circ$  的等腰三角形,

$\therefore$  它们的腰和底的比相等,

$$\text{即 } \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC},$$

$$\text{代入得 } \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b},$$

$$\text{整理得 } a^2 - ab - b^2 = 0,$$

两边同除以  $b^2$ ,

$$\text{设 } k = \frac{a}{b} (k > 0),$$

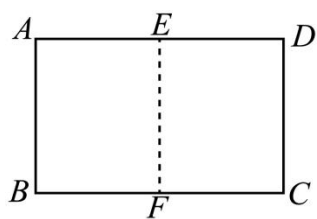
$$\text{得 } k^2 - k - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\because k > 0,$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

15. 我们把常用的 A4 纸的短边与长边的比叫作“白银比”，把这样的矩形称为“白银矩形”。如图，一张规格为 A4 的矩形纸片  $ABCD$ ，将其长边对折（ $EF$  为折痕），得到两个全等的 A5 矩形纸片，且 A4、A5 这两种规格的矩形纸片相似，那么这个“白银比”为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似多边形的性质，理解题意，掌握相似多边形的各边的比是解题的关键.

分别表示出原矩形的长和宽，折叠后的长与宽，结合题意“白银比”进行计算即可求解.

【详解】 解：设矩形纸片长为  $AD = BC = a$ ，宽为  $AB = CD = b$ ，

$$\therefore \text{折叠后矩形的长为 } b, \text{ 宽为 } \frac{1}{2}a,$$

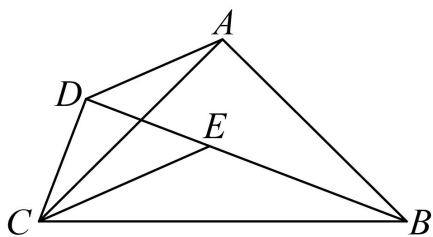
$$\text{根据题意可得, } \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得, } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

16. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $E$  是  $BD$  上的点， $\angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$ ， $DC = DE$ ， $AB = AC$ ，那么  $AD : BE =$ \_\_\_\_\_.



【答案】  $\sqrt{2}:2$

【解析】

【分析】 此题考查了等腰直角三角形的判定和性质、勾股定理、相似三角形的判定和性质等知识. 先证明

$\triangle CDE, \triangle ABC$  都是等腰直角三角形, 得到  $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\angle ACD = \angle BCE$ , 则  $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ,

即可得到  $AD:BE = CD:CE = 1:\sqrt{2}$ .

【详解】 解:  $\because \angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$ ,  $DC = DE$ ,  $AB = AC$ ,

$\therefore \triangle CDE, \triangle ABC$  都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 45^\circ$ ,  $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{2}CD$ ,  $BC = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{2}AC$ ,

$\therefore \angle DCE - \angle ACE = \angle ACB - \angle ACE$ ,  $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

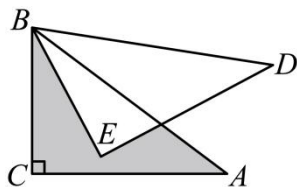
$\therefore \angle ACD = \angle BCE$ ,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE$ ,

$\therefore AD:BE = CD:CE = 1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$

故答案为:  $\sqrt{2}:2$

17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ , 将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  旋转到  $\triangle DBE$  的位置, 其中点  $D$  与点  $A$  对应, 点  $E$  与点  $C$  对应. 如果图中阴影部分的面积为 4.5, 那么  $\angle CBE$  的正切值是\_\_\_\_\_.



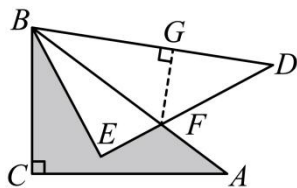
【答案】  $\frac{9}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了正切函数的定义, 旋转的性质和勾股定理. 作  $FG \perp BD$  于点  $G$ , 利用旋转的性质以

及面积法和勾股定理求得  $EF = 1$ ,  $BF = \sqrt{10}$ , 解得  $FG = \frac{9}{5}$ , 再利用由旋转的性质求得  $\angle CBE = \angle FBG$ , 据此求解即可.

【详解】解: 作  $FG \perp BD$  于点  $G$ ,



$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

由旋转的性质得,  $BE = 3$ ,  $BD = 5$ ,  $\angle BED = 90^\circ$ ,

$$\text{由题意得 } S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times EF \times 3 = 4.5,$$

解得  $EF = 1$ ,

$$\therefore BF = \sqrt{BE^2 + EF^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle BFD} = S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} \times BD \times FG = 4.5,$$

$$\text{解得 } FG = \frac{9}{5},$$

$$\therefore BG = \sqrt{BF^2 - FG^2} = \frac{13}{5},$$

由旋转的性质得,  $\angle CBA = \angle EBD$ , 则  $\angle CBE = \angle FBG$ ,

$$\therefore \angle CBE \text{ 的正切值} = \tan \angle FBG = \frac{FG}{BG} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{9}{13},$$

故答案为:  $\frac{9}{13}$ .

18. 已知  $AC$  和  $BD$  是矩形  $ABCD$  的两条对角线, 将  $\triangle ADC$  沿直线  $AC$  翻折后, 点  $D$  落在点  $E$  处, 三角形  $AEC$  与矩形的重叠部分是三角形  $ACF$ , 连接  $DE$ , 如果  $AB = 6$ ,  $BF = 2$ , 那么  $\angle BDE$  的正切值是\_\_\_\_\_.

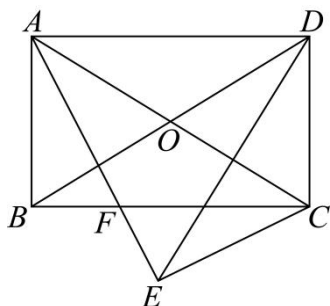
【答案】  $\frac{1}{3}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】分两种情况讨论, 根据矩形的性质得出  $OA = OC = OB = OD$ ,  $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$ , 则  $\angle OAD = \angle ODA = \angle ACB$ , 根据折叠的性质得出  $AC \perp DE$ ,  $\angle ADE = \angle AED$ ,  $\angle ACD = \angle ACE$ ,

$\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ, \angle DAC = \angle EAC$  , 设  $\angle ODA = \alpha$  , 则  $\angle OAD = \angle ACB = \alpha, \angle EAC = \alpha$  , 根据直角三角形的性质及三角形外角性质推出  $\angle BDE = \angle BAF = 90^\circ - 2\alpha$  , 则  $\tan \angle BDE = \tan \angle BAF$  , 或  $\tan \angle BDE = \tan \angle BCF$  , 根据正切的定义求解即可.

【详解】解: 如图,  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ,  $AB = 6$ ,  $BF = 2$ ,



$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore OA = OC = OB = OD, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle ACB$ ,

根据折叠的性质得,  $AC \perp DE$ ,  $\angle ADE = \angle AED, \angle ACD = \angle ACE$ ,

$\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ, \angle DAC = \angle EAC$ ,

设  $\angle ODA = \alpha$  , 则  $\angle OAD = \angle ACB = \alpha, \angle EAC = \alpha$  ,

$\therefore \angle EFC = \angle EAC + \angle ACB = 2\alpha, \angle AED = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - \alpha$ ,

$\therefore \angle BDE = \angle ABD - \angle ODA = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$ ,

$\therefore \angle AFB = \angle EFC = 2\alpha$ ,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle AFB = 90^\circ - 2\alpha$ ,

$\therefore \angle BDE = \angle BAF$ ,

$\therefore \tan \angle BDE = \tan \angle BAF$ ,

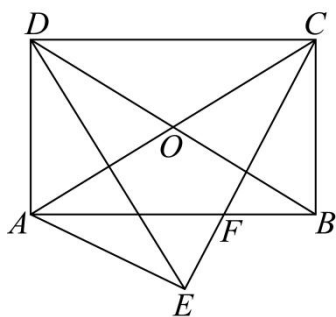
在  $\text{Rt}\triangle ABF$  中,

$$\therefore \tan \angle BAF = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \frac{1}{3},$$

即  $\angle BDE$  的正切值是  $\frac{1}{3}$ ;

如图,  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ ,  $AB = 6$ ,  $BF = 2$ ,



同理得  $\angle BDE = \angle BCF$ ,

$$\therefore AF = AB - BF = 4,$$

$$\because \angle BAC = \angle DCA, \angle ACE = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC,$$

$$\therefore CF = AF = 4,$$

在  $\text{Rt}\triangle CBF$  中,  $CF = 4$ ,  $BF = 2$ ,

$$\therefore BC = \sqrt{CF^2 - BF^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \tan \angle BCF,$$

$$\therefore \tan \angle BAF = \frac{BF}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle BDE = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即  $\angle BDE$  的正切值是  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

综上,  $\angle BDE$  的正切值是  $\frac{1}{3}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

故答案为:  $\frac{1}{3}$  或  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

【点睛】此题考查了折叠的性质、矩形的性质、解直角三角形, 勾股定理, 熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

### 三、解答题

19. 计算:  $\frac{4}{1+\sqrt{3}} - (\cos 30^\circ)^{-1} + |-\tan 45^\circ| + \pi^0$ .

【答案】  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】先根据分母有理化、特殊角的三角函数值、负整数指数幂、绝对值、零指数幂的运算法则计算，再合并即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \frac{4}{1+\sqrt{3}} - (\cos 30^\circ)^{-1} + |-\tan 45^\circ| + \pi^0 \\
 &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} + |-1| + 1 \\
 &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 + 1 \\
 &= 2(\sqrt{3}-1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\
 &= 2\sqrt{3} - 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\
 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了分母有理化、特殊角的三角函数值、负整数指数幂、绝对值、零指数幂，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

20. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 经过点  $A(-1, 6)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(0, 1)$ .

- (1) 求该抛物线的表达式及其对称轴  $l$ ;
- (2) 如果点  $A$  与点  $D$  关于对称轴  $l$  对称，联结  $AB$ 、 $BD$ ，求  $\triangle ABD$  的面积.

【答案】 (1)  $y = x^2 - 4x + 1$ ，直线  $x = 2$

(2) 24

【解析】

【分析】本题考查了二次函数与三角形面积的综合问题，涉及待定系数法求函数解析式.

- (1) 直接利用待定系数法求函数解析式，利用对称轴公式求对称轴即可；
- (2) 过点  $B$  作  $BH \perp AD$ ，垂足为点  $H$ ，先求出  $D(5, 6)$ ，继而求出  $AD, BH$ ，即可求解面积.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $A(-1, 6)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(0, 1)$  三点,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = -2 \\ c = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}.$$

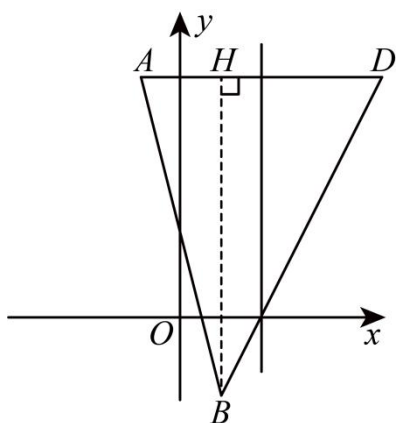
$\therefore$  抛物线的表达式为  $y = x^2 - 4x + 1$ .

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$\therefore$  抛物线的对称轴  $l$  为直线  $x = 2$ ;

【小问 2 详解】

解: 过点  $B$  作  $BH \perp AD$ , 垂足为点  $H$ .



$\because$  点  $A$  与点  $D$  关于对称轴  $l$  对称, 又点  $A(-1, 6)$ ,

$\therefore D(5, 6)$ ,

$\therefore AD \parallel x$  轴,  $AD = 6$ .

$\because B(1, -2)$ ,

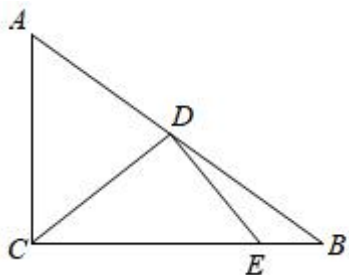
$\therefore BH = 8$ .

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AD \times BH = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

21. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos A = \frac{3}{5}$ .  $D$  是  $AB$  边的中点, 过点  $D$  作直线  $CD$  的垂线, 与边  $BC$  相交于点  $E$ .

(1) 求线段  $CE$  的长;

(2) 求  $\sin \angle BDE$  的值.



【答案】 (1)  $CE = \frac{25}{4}$  (2)  $\sin \angle BDE = \frac{7}{25}$

【解析】

【分析】 (1) 由勾股定理求出  $BC$ ，再根据斜边上的中线求出  $AD$ ， $\angle DCB = \angle B$ ，由余弦定理求出  $CE$ ；

(2) 作  $EF \perp AB$  交  $AB$  于  $F$ ，在直角三角形中由勾股定理列出关于  $BF$  的关系式，从而求出  $\angle BDE$  的正弦值。

【详解】 解：(1)  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ，

$$\cos A = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore AB = 10$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$$

又  $\because D$  为  $AB$  中点，

$$\therefore AD = BD = CD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle B,$$

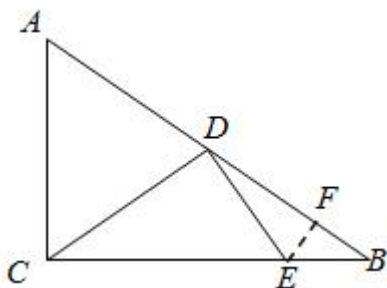
$$\therefore \cos \angle DCB = \frac{CD}{CE}$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$$

$$\therefore \frac{5}{CE} = \frac{8}{10}$$

$$\therefore CE = \frac{25}{4}$$

(2) 作  $EF \perp AB$  交  $AB$  于  $F$ ，



由 (1) 知  $CE = \frac{25}{4}$

则  $BE = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$

$$DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \frac{15}{4}$$

设  $BF = x$ , 则

$$DF = BD - BF = 5 - x,$$

在  $Rt\triangle DEF$  中,

$$EF^2 = DE^2 - DF^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - (5-x)^2$$

在  $Rt\triangle BEF$  中,

$$EF^2 = BE^2 - BF^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - x^2$$

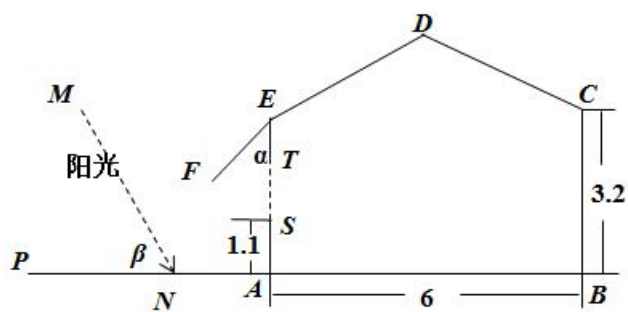
$$\therefore \frac{225}{16} - (5-x)^2 = \frac{49}{16} - x^2$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \sin \angle BDE = \frac{EF}{DE} = \frac{7}{25}$$

【点睛】本题考查锐角三角函数、勾股定理，利用同角的锐角三角函数值相等是关键．方程思想是常用的数学思想．

22. 如图，是小明家房屋的纵截面图，其中线段  $AB$  为屋内地面，线段  $AE$ 、 $BC$  为房屋两侧的墙，线段  $CD$ 、 $DE$  为屋顶的斜坡．已知  $AB = 6$  米， $AE = BC = 3.2$  米，斜坡  $CD$ 、 $DE$  的坡比均为  $1:2$ ．



(1) 求屋顶点 D 到地面 AB 的距离:

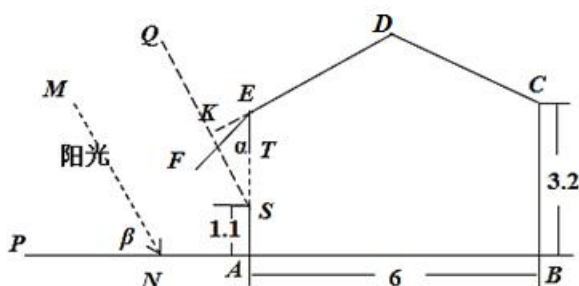
(2) 已知在墙 AE 距离地面 1.1 米处装有窗 ST, 如果阳光与地面的夹角  $\angle MNP = \beta = 53^\circ$ , 为了防止阳光通过窗 ST 照射到屋内, 所以小明请门窗公司在墙 AE 端点 E 处安装一个旋转式遮阳棚 (如图中线段 EF), 公司设计的遮阳棚可作  $90^\circ$  旋转, 即  $0^\circ < \angle FET = \alpha \leq 90^\circ$ , 长度为 1.4 米, 即  $EF = 1.4$  米. 试问: 公司设计的遮阳棚是否能达到小明的要求? 说说你的理由. (参考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.41$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.73$ ,

$$\sqrt{5} \approx 2.24, \sqrt{10} \approx 3.16, \sin 53^\circ = 0.8, \cos 53^\circ = 0.6, \tan 53^\circ = \frac{4}{3}.)$$

**【答案】** (1) 屋顶点 D 到地面 AB 的距离 4.7 米;

(2) 公司设计的遮阳棚能达到小明的要求, 理由如下:

过点 S 作  $SQ \parallel MN$ , 过点 E 作  $EK \perp SQ$ , 只需比较 EK 与 EF 的大小关系即可判断



$\therefore$  阳光与地面的夹角  $\angle MNP = \beta = 53^\circ$ ,

$\therefore$  SQ 与水平线的夹角也为  $53^\circ$

$\therefore \angle ESK = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

$\therefore \angle SEK = 90^\circ - \angle ESK = 53^\circ$

$\therefore AE = 3.2$  米,  $AS = 1.1$  米

$\therefore SE = AE - AS = 2.1$  米

$\therefore EK = SE \cdot \cos \angle SEK \approx 2.1 \times 0.6 = 1.26$  米  $< 1.4$  米

即  $EK < EF$

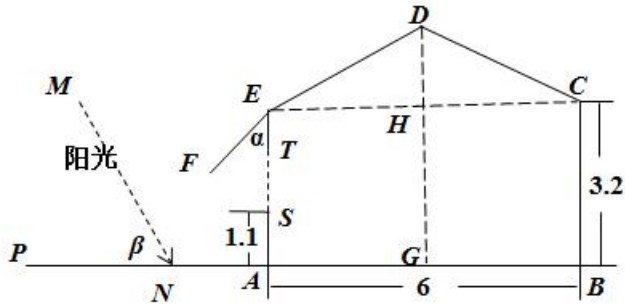
$\therefore$  公司设计的遮阳棚能达到小明的要求.

**【解析】**

**【分析】** (1) 过点 D 作  $DG \perp AB$  于 G, 连接 CE 交 DG 于 H, 根据矩形的判定定理证出四边形 ABCE 为矩形, 从而求出  $HG = BC = 3.2$  米, 然后根据坡比列出方程即可求出 DH, 从而得出结论;

(2) 过点 S 作  $SQ \parallel MN$ , 过点 E 作  $EK \perp SQ$ , 只需比较 EK 与 EF 的大小关系即可判断, 在  $Rt\triangle SEK$  中, 解直角三角形即可求出 EK, 从而得出结论.

【详解】解：(1) 过点  $D$  作  $DG \perp AB$  于  $G$ ，连接  $CE$  交  $DG$  于  $H$



$\therefore AE = BC = 3.2$  米,  $AE \parallel BC$

$\therefore$  四边形  $ABCE$  为平行四边形

$\therefore CB \perp AB$

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore$  四边形  $ABCE$  为矩形

$\therefore CE \parallel AB$ , 且  $CE = AB = 6$

$\therefore DH \perp EC$

$\therefore HG = BC = 3.2$  米

$\therefore$  斜坡  $CD$ 、 $DE$  的坡比均为  $1:2$

$\therefore DH:CH = 1:2$ ,  $DH:EH = 1:2$

设  $DH = x$ , 则  $CH = 2x$ ,  $EH = 2x$

$\therefore CH + EH = CE$

$\therefore 2x + 2x = 6$

解得:  $x = 1.5$

即  $DH = 1.5$  米

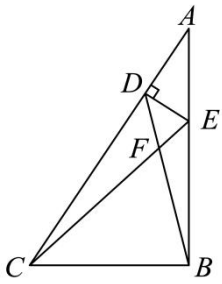
$\therefore$  屋顶点  $D$  到地面  $AB$  的距离  $DG = DH + HG = 4.7$  米

答: 屋顶点  $D$  到地面  $AB$  的距离  $4.7$  米.

(2) 略.

【点睛】此题考查的是解直角三角形的应用和矩形的判定及性质, 掌握利用锐角三角函数解直角三角形、坡比的定义是解题关键.

23. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 点  $D$  在边  $AC$  上, 过点  $D$  作  $DE$  垂直  $AC$  交  $AB$  于点  $E$ , 连接  $EC$ 、 $BD$  交于点  $F$ .



(1) 求证:  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ;

(2) 如果  $BC = BE$ , 求证:  $\frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$ .

【答案】 (1)

证明:  $\because \angle ABC = 90^\circ, DE \perp AC$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\because \angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

(2)

证明:  $\because \triangle ABD \sim \triangle ACE$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE$$

$$\therefore \angle BFC - \angle ACE = \angle BFC - \angle ABD$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC - \angle ACE, \angle BEC = \angle BFC - \angle ABD$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEC$$

$$\because BC = BE, \angle CBE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BEC, CE^2 = BC^2 + BE^2 = 2BC^2$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BDC, BC^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

$$\because \angle FBC = \angle CBD$$

$$\therefore \triangle FBC \sim \triangle CBD$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BC}$$

$$\therefore BC^2 = BF \cdot BD$$

$$\therefore \frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识：

(1) 由  $\angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle A$ , 证明  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ , 得  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , 所以  $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ , 则  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ;

(2) 由相似三角形的性质得  $\angle ABD = \angle ACE$ , 推导出  $\angle BDC = \angle BEC$ , 由  $BC = BE$ ,  $\angle CBE = 90^\circ$ , 得  $\angle BCF = \angle BEC$ ,  $CE^2 = BC^2 + BE^2 = 2BC^2$ , 则  $\angle BCF = \angle BDC$ ,  $BC^2 = \frac{1}{2}CE^2$ , 而  $\angle FBC = \angle CBD$ , 所以  $\triangle FBC \sim \triangle CBD$ , 则  $\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BC}$ , 所以  $BC^2 = BF \cdot BD$ , 则  $\frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$

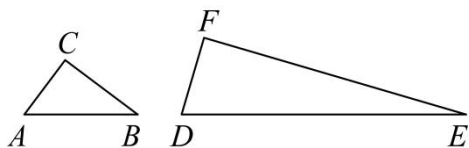
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

24. 如图,  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  都是直角三角形,  $\angle C = \angle F = 90^\circ$ , 且  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  不相似. 其中  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $DF = 7$ ,  $EF = 24$ .



(1) 是否存在经过锐角顶点的一条直线, 能把  $\triangle ABC$  或  $\triangle DEF$  其中一个分割成两个三角形, 使分割得的两个三角形中有一个三角形 (记这个三角形的面积为  $S$ ) 与没有分割的三角形相似. 如果存在;

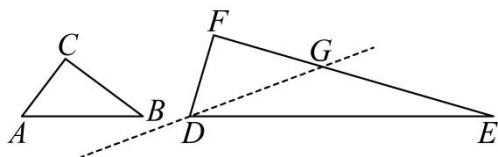
①请写出你的分割方案 (只要写出一个方案即可), 并证明方案的正确性;

②按照你写出的分割方案, 求出  $S$  的值.

(2) 分别从  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的直角顶点引两条直线, 分别将它们分割成两个三角形,  $CG$  交  $AB$  于  $G$ ,  $FH$  交  $DE$  于  $H$ , 当  $\triangle ACG$  与被  $FH$  分割形成的  $\triangle DFH$  和  $\triangle EFH$  中的一个相似时, 直接写出  $AG$  的长.

【答案】 (1)

①过点  $D$  作直线  $DG$  交  $EF$  于点  $G$ , 使得  $\angle FDG = \angle A$ , 如下图:



证明如下:

根据锐角三角函数的定义可知,

$$\tan \angle EDF = \frac{EF}{DF} = \frac{24}{7}, \quad \tan E = \frac{DF}{EF} = \frac{7}{24}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan \angle EDF > \tan A > \tan B > \tan E,$$

$$\therefore \angle EDF > \angle A > \angle B > \angle E,$$

由题意可得,  $\angle C = \angle F = 90^\circ$ ,  $\angle FDG = \angle A$ ,

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DGF;$$

$$\textcircled{2} S = \frac{98}{3}$$

$$(2) AG \text{ 的值为 } \frac{70}{39} \text{ 或 } \frac{36}{5} \text{ 或 } 5.$$

### 【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 解直角三角形,

(1) ① 根据锐角三角函数的定义可得,  $\tan \angle EDF > \tan A > \tan B > \tan E$ , 从而得到  $\angle EDF > \angle A > \angle B > \angle E$ , 可过点  $D$  作直线  $DG$  交  $EF$  于点  $G$ , 使得  $\angle FDG = \angle A$ , 即可; ② 根据相似的性质, 求出  $FG$  的长, 利用三角形的面积公式进行计算即可;

(2) 根据  $\angle EDF > A > B > E$  得到  $\angle DHE > \angle E > \angle B$ , 则可以分三种情况, 分别求解即可.

### 【小问 1 详解】

解: (1) ①略

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \triangle ABC \sim \triangle DGF \text{ 可得 } \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{FG},$$

$$\text{又 } \because AC = 6, \quad BC = 8, \quad DF = 7,$$

$$\therefore \frac{6}{7} = \frac{8}{FG}, \text{ 解得 } FG = \frac{28}{3},$$

$$\therefore S = S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2} DF \times FG = \frac{98}{3},$$

$$\text{即 } S = \frac{98}{3}.$$

### 【小问 2 详解】

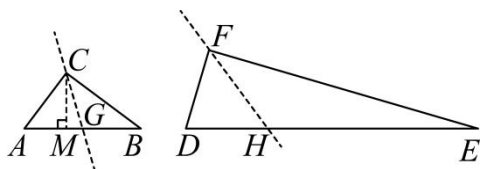
解: 由 (1) 可得  $\angle EDF > \angle A > \angle B > \angle E$ ,

则  $\angle DHE > \angle E > \angle B$ ,

可以分为如下三种情况,

① 当  $\triangle ACG \sim \triangle HFD$  时,  $\angle AGC = \angle D$ ,

过  $C$  作  $CM \perp AB$ , 如下图:



由勾股定理可得,  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ ,

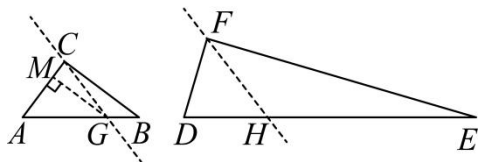
$$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} AB \times CM, \text{ 解得 } CM = \frac{24}{5},$$

$$\text{则 } AM = \frac{CM}{\tan A} = \frac{18}{5}, \quad MG = \frac{CM}{\tan \angle CGA} = \frac{CM}{\tan D} = \frac{7}{5},$$

$$\therefore AG = AM + MG = 5;$$

②当  $\angle ACG = \angle D$ ,  $\angle A = \angle DFH$  或  $\angle A = \angle DHF$  时,  $\triangle ACG$  与  $\triangle FDH$  相似,

过点  $G$  作  $GM \perp AC$ , 如下图:



设  $AG = x$ , 由题意可得  $\triangle AMG \sim \triangle ACB$ ,

$$\therefore \frac{AM}{AC} = \frac{MG}{BC} = \frac{AG}{AB}, \text{ 即 } \frac{AM}{6} = \frac{MG}{8} = \frac{x}{10},$$

$$\therefore AM = \frac{3}{5}x, \quad MG = \frac{4}{5}x,$$

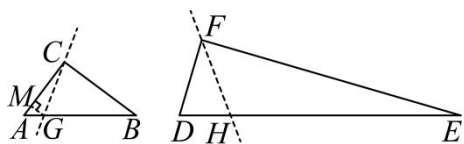
$$\therefore CM = \frac{MG}{\tan \angle ACG} = \frac{MG}{\tan D} = \frac{7}{30}x,$$

$$\therefore AM + MC = \frac{3}{5}x + \frac{7}{30}x = 6, \text{ 解得 } x = \frac{36}{5},$$

$$\therefore AG = \frac{36}{5};$$

③当  $\angle ACG = \angle E$ ,  $\angle A = \angle HFE$  时,  $\triangle ACG$  与  $\triangle HFE$  相似,

过点  $G$  作  $GM \perp AC$ , 如下图:



设  $AG = x$ , 由题意可得  $\triangle AMG \sim \triangle ACB$ ,

$$\therefore \frac{AM}{AC} = \frac{MG}{BC} = \frac{AG}{AB}, \text{ 即 } \frac{AM}{6} = \frac{MG}{8} = \frac{x}{10},$$

$$\therefore AM = \frac{3}{5}x, \quad MG = \frac{4}{5}x,$$

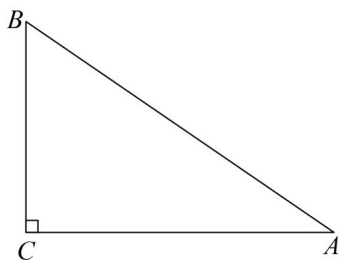
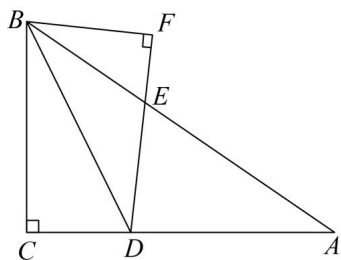
$$\therefore CM = \frac{MG}{\tan \angle ACG} = \frac{MG}{\tan E} = \frac{96}{35}x,$$

$$\therefore AM + MC = \frac{3}{5}x + \frac{96}{35}x = 6, \text{ 解得 } x = \frac{70}{39},$$

$$AG = \frac{70}{39};$$

综上,  $AG$  的值为  $\frac{70}{39}$  或  $\frac{36}{5}$  或 5.

25. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cot A = \sqrt{2}$ , 点  $D$  为边  $AC$  上的一个动点, 以点  $D$  为顶点作  $\angle BDE = \angle A$ , 射线  $DE$  交边  $AB$  于点  $E$ , 过点  $B$  作射线  $DE$  的垂线, 垂足为点  $F$ .



备用图

(1) 当点  $D$  是边  $AC$  中点时, 求  $\tan \angle ABD$  的值;

(2) 求证:  $AD \cdot BF = BC \cdot DE$ ;

(3) 当  $DE : EF = 3 : 1$  时, 求  $AE : EB$ .

【答案】(1)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ;

(2) 见解析; (3) 5: 3

【解析】

【分析】(1) 过  $D$  作  $DH \perp AB$  于  $H$ , 设  $AC = \sqrt{2}x$ ,  $BC = x$ , 由勾股定理得  $AB = \sqrt{3}x$ , 由中点定义和三角形的等面积法求得  $DH$ , 再根据勾股定理求得  $AH$ 、 $BH$ , 由  $\tan \angle ABD = \frac{DH}{BH}$  求解即可;

(2) 根据相似三角形的判定证明  $\triangle DEB \sim \triangle ADB$ 、 $\triangle DFB \sim \triangle ACB$ , 根据相似三角形的性质即可证得结论;

(3) 设  $DE = 3k$ ,  $EF = k$ , 则  $DF = 4k$ , 根据余切定义和勾股定理可求得  $EB$ 、 $BF$ 、 $BD$ , 再根据相似三角形的性质求得  $AB$  即可求解.

【小问 1 详解】

解: 过  $D$  作  $DH \perp AB$  于  $H$ ,

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cot A = \sqrt{2} = \frac{AC}{BC}$ ,

设  $AC = \sqrt{2}x$ ,  $BC = x$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + x^2} = \sqrt{3}x,$$

$\therefore D$  为  $AC$  的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

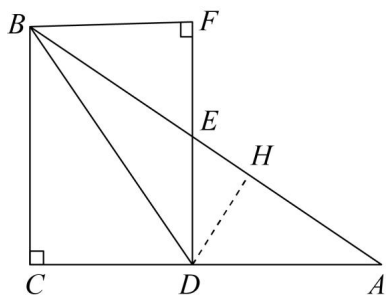
$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot DH,$$

$$\therefore DH = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} x \cdot x}{\sqrt{3} x} = \frac{\sqrt{6}}{6} x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHD \text{ 中, } AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6} x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$$\therefore BH = AB - AH = \sqrt{3} x - \frac{\sqrt{3}}{3} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BHD \text{ 中, } \tan \angle ABD = \frac{DH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6} x}{\frac{2\sqrt{3}}{3} x} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$



【小问 2 详解】

证明:  $\because \angle BDE = \angle A, \angle DBE = \angle ABD,$

$\therefore \triangle DEB \sim \triangle ADB,$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DB}{AB},$$

$\because \angle F = \angle C = 90^\circ, \angle BDE = \angle A,$

$\therefore \triangle DFB \sim \triangle ACB,$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{DB}{AB},$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BF}{BC} \text{ 即 } AD \cdot BF = BC \cdot DE;$$

【小问 3 详解】

解: 由  $DE : EF = 3 : 1$  可设  $DE = 3k, EF = k$ , 则  $DF = 4k$ ,

$$\therefore \angle BDE = \angle A,$$

$$\therefore \cot \angle BDE = \cot \angle A = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{4k}{BF} = \sqrt{2},$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{2}k, \text{ 又 } \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore EB = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}k)^2 + k^2} = 3k,$$

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}k)^2 + (4k)^2} = 2\sqrt{6}k,$$

$$\therefore \triangle DEB \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{EB}{BD} = \frac{BD}{AB} \text{ 即 } \frac{3k}{2\sqrt{6}k} = \frac{2\sqrt{6}k}{AB},$$

$$\therefore AB = 8k,$$

$$\therefore AE = AB - EB = 5k,$$

$$\therefore AE : EB = 5k : 3k = 5 : 3.$$

【点睛】 本题考查锐角三角函数、勾股定理、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.