

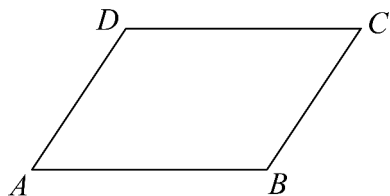
2025 学年第二学期期中质量检测

八年级数学试卷

(完成时间：90 分钟，满分：100 分)

一、选择题 (每题 3 分，共 18 分)

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，添加下列条件，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()



- A. $BC = AD$ B. $BC \parallel AD$ C. $\angle A = \angle C$ D. $AB = CD$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理进行逐一判断即可.

【详解】解：添加条件 $BC = AD$ ，结合条件 $AB \parallel CD$ ，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 A 符合题意；

添加条件 $BC \parallel AD$ ，结合条件 $AB \parallel CD$ ，可以通过两组对边分别平行的四边形是平行四边形能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 B 不符合题意；

添加条件 $\angle A = \angle C$ ，由 $AB \parallel CD$ ，可得 $\angle C + \angle B = 180^\circ$ ，进而可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，则 $BC \parallel AD$ ，可以通过两组对边分别平行的四边形是平行四边形能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 C 不符合题意；

添加条件 $AB = CD$ ，结合条件 $AB \parallel CD$ ，可以通过一组对边相等且平行的四边形是平行四边形能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 D 不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定，熟知平行四边形的判定定理是解题的关键.

2. 下列 y 关于 x 的函数中，定义域为一切实数的是 ()

- A. $y = x - 3$ B. $y = \sqrt{x - 3}$ C. $y = \frac{1}{x - 3}$ D. $y = (x - 3)^0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了函数的定义域，解题的关键是掌握二次根式，分式以及零指数幂有意义的条件. 通过分析每个函数的定义域限制，判断是否对所有实数 x 有定义.

【详解】解：A. $y = x - 3$ ，定义域为一切实数，符合题意；

B. $y = \sqrt{x-3}$ ， $x-3 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 3$ ，

$\therefore$ 该选项不符合题意；

C. $y = \frac{1}{x-3}$ ，

$x-3 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 3$ ，

$\therefore$ 该选项不符合题意；

D. $y = (x-3)^0$ ，

$x-3 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 3$ ，

$\therefore$ 该选项不符合题意；

故选：A.

3. 下列各函数中， y 是 x 的正比例函数的是（ ）

A. $y = \frac{x}{3}$

B. $y = 2x^2$

C. $y = x - 1$

D. $y = \frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了正比例函数的定义，一般地，形如 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数，据此可得答案.

【详解】解：A、 $y = \frac{x}{3}$ ， y 是 x 的正比例函数，故该选项符合题意；

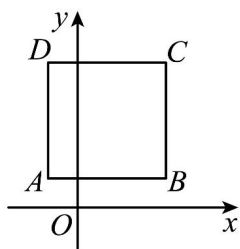
B、 $y = 2x^2$ ， y 不是 x 的正比例函数，故该选项不符合题意；

C、 $y = x - 1$ ， y 不是 x 的正比例函数，故该选项不符合题意；

D、 $y = \frac{1}{x}$ ， y 不是 x 的正比例函数，故该选项不符合题意；

故选：A.

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， A 的坐标为 $(-1, 1)$ ， AB 平行于 x 轴，则点 C 的坐标为()



- A. $(3,4)$ B. $(4,5)$ C. $(5,3)$ D. $(3,5)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方形的边长加上点 A 的横坐标得到点 C 的横坐标，正方形的边长加上点 A 的纵坐标得到点 C 的纵坐标，从而得解.

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 A 的坐标为 $(-1,1)$ ，

∴ 点 C 的横坐标为 $4-1=3$ ，

点 C 的纵坐标为 $4+1=5$ ，

∴ 点 C 的坐标为 $(3,5)$.

5. 以下四边形中，顺次连接四条边的中点能得到一个正方形的是 ()

- A. 平行四边形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理，顺次连接四边形四条边的中点，所得四边形的对边平行且等于原四边形对角线的一半，因此若所得四边形为正方形，则原四边形的对角线必须互相垂直且长度相等.

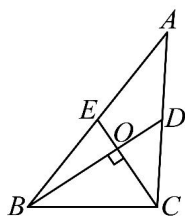
【详解】解：平行四边形对角线仅互相平分，不满足垂直且相等；

菱形对角线互相垂直但长度不相等；

矩形对角线长度相等但不互相垂直；

只有正方形对角线既互相垂直又长度相等，符合要求.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心， $BO \perp OC$ ， $BO=6$ ， $CO=4$ ，则四边形 $AEOD$ 的面积是 ()



A. 24

B. 18

C. 12

D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】根据重心的性质可得 $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OE} = 2$ ， D 、 E 分别为 AC 、 AB 的中点，再根据比例关系得到面积间的关系即可.

【详解】解：∵ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OE} = 2$ ， D 、 E 分别为 AC 、 AB 的中点，

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12,$$

$$S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} OD \cdot OC = \frac{1}{2} S_{\triangle OBC} = 6,$$

$$S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} OB \cdot OE = \frac{1}{2} S_{\triangle OBC} = 6,$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} = 18,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEOD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle OBE} = 18 - 6 = 12.$$

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 如果一个多边形的内角和与外角和相等, 那么这个多边形的边数是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角和与外角和的关系, 设这个多边形的边数为 n , 则 $(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ$, 求解即可, 掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解: ∵ 多边形的外角和为 360° ,

∴ 这个多边形的内角和为 360° ,

设这个多边形的边数为 n ,

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ,$$

解得: $n = 4$,

故答案为: 4.

8. 若点 $A(a, 3)$ 在 y 轴上, 则点 $B(a+1, a-2)$ 在第_____象限.

【答案】

四

【解析】

【分析】 根据 y 轴上点的横坐标为 0, 求出 a 的值, 进而得到点 B 的坐标, 再根据各象限内点的坐标特征判断即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(a, 3)$ 在 y 轴上,

$$\therefore a = 0,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (0+1, 0-2), \text{ 即 } B(1, -2),$$

$\because$ 横坐标为正, 纵坐标为负的点在第四象限,

$\therefore$ 点 B 在第四象限.

9. 已知点 A 坐标为 $(2+a, -3a)$, 点 B 的坐标为 $(5, -3)$, 若 $AB \parallel x$ 轴, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查坐标与图形的性质, 根据平行于 x 轴的直线上所有点的纵坐标相等, 列方程求解 a 即可, 掌握平面直角坐标系中点的坐标特征是解题的关键.

【详解】 解: $\because AB \parallel x$ 轴, 点 B 的坐标为 $(5, -3)$,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的纵坐标与点 } B \text{ 的纵坐标相等, 可得 } -3a = -3,$$

解得 $a = 1$.

10. 已知 y 关于 x 的正比例函数 $y = (1-m)x + m^2 - 9$ 的图像经过第一、三象限, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】

$$-3$$

【解析】

【分析】 先利用正比例函数定义求出 m 的可能值, 再结合图像经过第一、三象限的性质筛选出符合条件的 m 值.

【详解】 解: $\because y = (1-m)x + m^2 - 9$ 是 y 关于 x 的正比例函数

$$\therefore \text{常数项满足 } m^2 - 9 = 0$$

$$\text{解得 } m = 3 \text{ 或 } m = -3$$

又 $\because$ 函数图像经过第一、三象限

$$\therefore \text{比例系数满足 } 1-m > 0$$

$$\text{解得 } m < 1$$

$$\therefore m = -3.$$

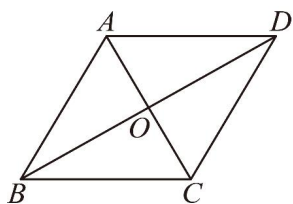
11. 菱形的周长为 8，它的一个内角为 60° ，则菱形的较长的对角线长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由菱形的性质可得 $AB=2$ ， $AC \perp BD$ ， $BD=2OB$ ，由直角三角形的性质可得 $AO=1$ ，由勾股定理可求 BO 的长，即可得 BD 的长.

【详解】解：如图所示：



$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 8,

$\therefore AB=2$, $AC \perp BD$, $BD=2OB$,

$\because \angle ABC=60^\circ$,

$\therefore \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$,

$\therefore AO=1$,

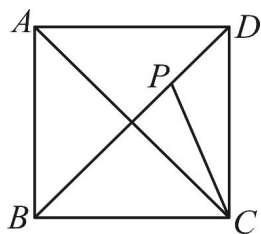
$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore BD = 2\sqrt{3}$,

故答案为 $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了菱形的性质，直角三角形 30° 角所对的直角边等于斜边的一半的性质，勾股定理，熟记性质是解题的关键，作出图形更形象直观.

12. 如图，已知 P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点，且 $BP=BC$ ，则 $\angle ACP$ 度数是_____度.



【答案】 22.5

【解析】

【详解】 $\because ABCD$ 是正方形,

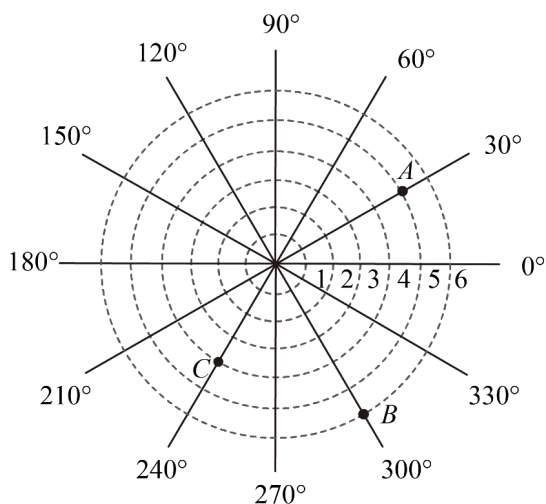
$$\therefore \angle DBC = \angle BCA = 45^\circ,$$

$$\therefore BP = BC,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle BPC = \frac{1}{2} (180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP \text{ 度数是 } 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ$$

13. 如图，雷达探测器探测到三艘船 A , B , C ，按照目标表示方法的规定， A 、 B 两艘船的位置分别表示为 $A(5, 30^\circ)$, $B(6, 300^\circ)$ ，则船 C 的位置应表示为_____.



【答案】 $(4, 240^\circ)$

【解析】

【详解】 解：船 C 的位置应表示为 $(4, 240^\circ)$.

14. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标为 $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(3, -4)$ ，则三角形的形状为_____.

【答案】 直角三角形

【解析】

【分析】 先计算出三角形三边的平方，再利用勾股定理逆定理判断三角形形状即可.

【详解】 解： $\because A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(3, -4)$,

$$\therefore AB^2 = (1-4)^2 + (2-3)^2 = 9+1=10,$$

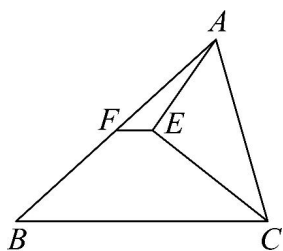
$$AC^2 = (1-3)^2 + (2+4)^2 = 4+36=40,$$

$$BC^2 = (4-3)^2 + (3+4)^2 = 1+49=50,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 10+40=50=BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACE = \angle ECB$, $AE \perp EC$, F 是边 AB 的中点, $AE = 3$, $EC = 4$, $BC = 7$, 那么 FE 的长是_____.



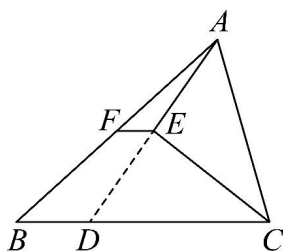
【答案】1

【解析】

【分析】本题考查三角形中位线定理, 勾股定理以及全等三角形的判定和性质, 解题的关键是通过延长 AE 构造全等三角形, 得出线段关系, 再利用中位线定理求解.

延长 AE 交 BC 于点 D , 先证 $\triangle AEC \cong \triangle DEC$, 得到 $AC = CD$ 的长度, 利用勾股定理求得 AC 的长度, 再结合 E 为 AD 中点, F 是 AB 中点, 利用中位线定理求 FE .

【详解】延长 AE 交 BC 于点 D ,



$$\therefore \angle AEC = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp EC,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle ECB \\ EC = EC \\ \angle AEC = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore AC = CD, \quad AE = DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = 3$, $EC = 4$,

$$\therefore AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD + CD$$

$$\therefore BD = BC - CD = 7 - 5 = 2$$

$$\because AE = DE,$$

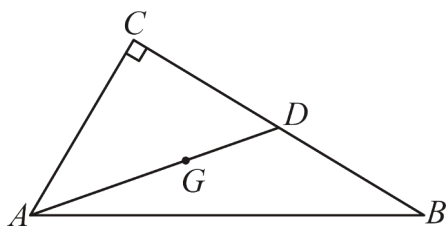
$\therefore E$ 为 AD 的中点,

又 $\because F$ 是边 AB 的中点,

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

故答案为: 1.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果 $BC = 8$, $DG = 2$, 那么 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $2\sqrt{21}$

【解析】

【分析】 根据重心的性质, 可得 CD 、 AD , 再用勾股定理求出 AC , 进而得到 AB 即可.

【详解】 解: $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $BC = 8$, $DG = 2$

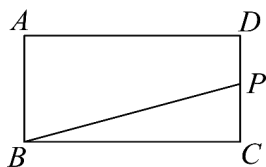
$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 4, AG = 2GD = 4, \text{ 则 } AD = AG + GD = 6,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}.$$

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 6$, 有一点 P 从点 B 出发, 按 $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$ 的顺序运动, 若点 P 在线段 CD 上, 设点 P 运动的距离为 x , $\triangle PBC$ 的面积为 y , 写出 y 关于 x 的函数表达式 $\underline{\hspace{2cm}}$. (不必写出自变量的取值范围)



【答案】 $y = 3x - 18$

【解析】

【详解】 解: $CP = x - 6$,

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BC \cdot CP, \text{ 即 } y = \frac{1}{2} \times 6 \times (x-6) = 3x-18.$$

18. 当一个凸四边形的一条对角线把原四边形分割成两个等腰三角形时, 我们称这个四边形为“等腰四边形”, 其中这条对角线称为这个四边形的“等腰线”. 如果凸四边形 $ABCD$ 是“等腰四边形”, 对角线 BD 是该四边形的“等腰线”, 其中 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = CD \neq AD$, 那么 $\angle ADC$ 的度数为_____.

【答案】 45° 或 135°

【解析】

【分析】 根据“等腰四边形”定义, 可得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 均为等腰三角形, 已知 $AB = BC = CD \neq AD$, $\triangle BCD$ 已满足 $BC = CD$ 的等腰条件, 对 $\triangle ABD$ 分 $AB = BD$ 和 $AD = BD$ 两种情况, 结合等腰三角形性质、矩形性质和直角三角形的性质计算即可.

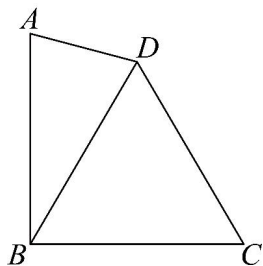
【详解】 解: $\because$ 凸四边形 $ABCD$ 是“等腰四边形”, 对角线 BD 是等腰线,

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都是等腰三角形.

$\because AB = BC = CD \neq AD$,

$\therefore \triangle BCD$ 中 $BC = CD$, 满足等腰三角形条件, $\triangle ABD$ 中 $AB \neq AD$, 分两种情况讨论:

①当 $AB = BD$ 时,



$\because AB = BC = CD$,

$\therefore BD = BC = CD$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DBC = \angle BDC = 60^\circ$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

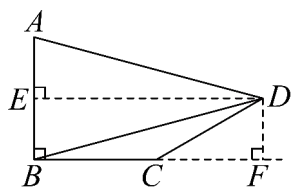
在等腰 $\triangle ABD$ 中, $AB = BD$,

$$\therefore \angle ADB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$\therefore \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$.

②当 $AD = BD$ 时,

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 作 $DF \perp CB$, 交 CB 的延长线于 F ,



$\because \angle ABC = 90^\circ$, $DE \perp AB$, $DF \perp CF$,

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是矩形,

$\therefore DF = BE$,

$\because AD = BD$, $DE \perp AB$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}AB$,

$\because AB = CD$,

$\therefore DF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$,

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,

$\therefore \angle DCF = 30^\circ$,

$\because BC = CD$,

$\therefore \angle DBC = \angle BDC$,

又 $\because \angle DCF = \angle DBC + \angle BDC = 2\angle BDC$,

$\therefore \angle BDC = 15^\circ$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$,

$\because AD = BD$,

$\therefore \angle BAD = \angle ABD = 75^\circ$,

$\therefore \angle ADB = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ$,

$\therefore \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$,

综上, $\angle ADC$ 的度数为 45° 或 135° .

三、解答题 (5+7+8+10+8+8, 共 46 分)

19. 已知 y 与 $2x+3$ 成正比例关系, 当 $x=3$ 时, $y=6$;

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式;

(2) 当 $y=3$ 时, 求 x 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x + 2$

$$(2) \quad x = \frac{3}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 由题可设 $y = k(2x + 3)$ ，再利用待定系数法可得 $k = \frac{2}{3}$ ；

(2) 令 $y = 3$ ，再解方程即可.

【小问1 详解】

解：∵ y 与 $2x + 3$ 成正比例关系，

所以，可设 $y = k(2x + 3)$ ，

$$\therefore k \times (2 \times 3 + 3) = 6, \text{ 解得 } k = \frac{2}{3},$$

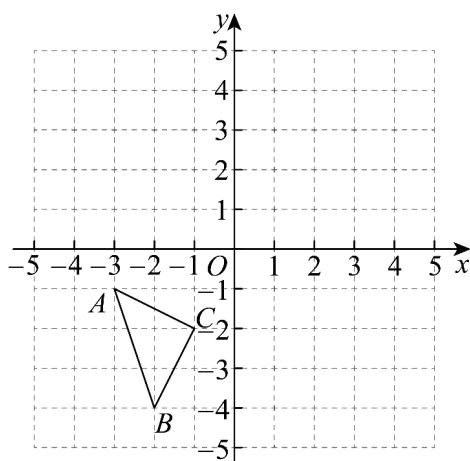
$$\therefore y = \frac{2}{3}(2x + 3) = \frac{4}{3}x + 2;$$

【小问2 详解】

解：当 $y = 3$ 时，即 $y = \frac{4}{3}x + 2 = 3$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{3}{4}.$$

20. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别是 $A(-3, -1)$ ， $B(-2, -4)$ ， $C(-1, -2)$ 。

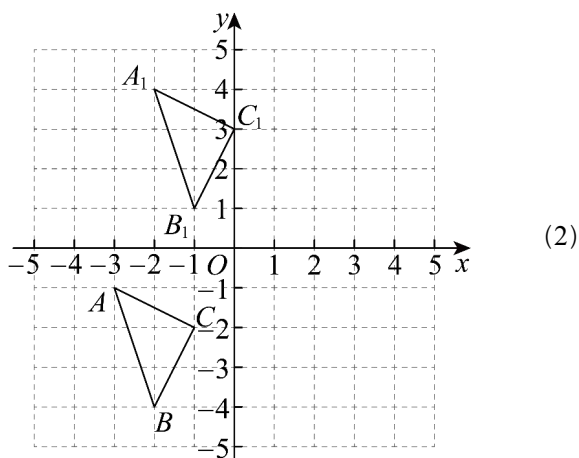


(1) 将 $\triangle ABC$ 向右平移1个单位，再向上平移5个单位，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，请画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ，若 $\triangle ABC$ 上有一点 $P(x, y)$ ，则平移后的对应点 P_1 的坐标为_____；

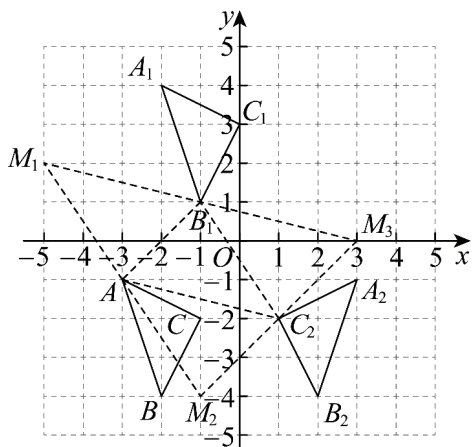
(2) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ ，若存在点 M ，使得以 A 、 B_1 、 C_2 、 M 四点构成的四边形为平行四边形，请直接写出所有可能的点 M 坐标：_____。

【答案】(1)

解: 如图, P_1 的坐标为 $(x+1, y+5)$,



解: 如图, 点 M 坐标为 $(-5, 2)$ 或 $(3, 0)$ 或 $(-1, -4)$



【解析】

【分析】(1) 根据平移的性质画出 $\triangle A_1B_1C_1$, 根据平移方式得出 P_1 的坐标为 $(x+1, y+5)$;

(2) 根据轴对称的性质画出 $\triangle A_2B_2C_2$, 进而根据平行四边形的性质, 结合坐标系, 找到 M 点的坐标, 即可求解.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

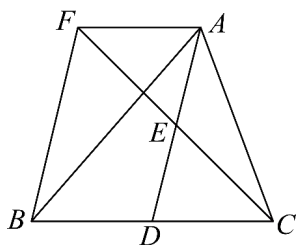
解: $\because A(-3, -1)$, $B_1(-1, 1)$, $C_2(1, -2)$, 以 A 、 B_1 、 C_2 、 M 四点构成的四边形为平行四边形,

将点 A 沿 C_2B_1 方向平移, 使得 $AM = C_2B_1$, 得到 M 坐标为 $(-5, 2)$,

将点 B_1 沿 AC_2 方向平移, 使得 $B_1M = AC_2$, 得到 M 坐标为 $(3, 0)$,

将点 A 沿 B_1C_2 方向平移,使得 $AM = B_1C_2$, 得到 M 坐标为 $(-1, -4)$.

21. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 过点 A 作 BC 的平行线交 CE 的延长线于点 F , 连接 BF .



(1) 求证: $AF = BD$;

(2) 如果 $AB = AC$, 试证明: 四边形 $AFBD$ 为矩形.

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析.

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 矩形的判定, 平行四边形的判定与性质, 综合性较强, 难度较大, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先结合点 E 是 AD 的中点, $AF \parallel BD$, 得 $AE = DE$, $\angle FAE = \angle CDE$, 再结合对顶角相等, 证明 $\triangle AFE \cong \triangle DCE$, 则 $AF = CD$, 又因为 AD 是 BC 边上的中线, 故 $AF = BD$, 即可作答;

(2) 因为 $AB = AC$, $BD = CD$, 得 $AD \perp BC$, 由 (1) 得 $AF = BD$, 又 $\because AF \parallel BD$, 得出四边形 $AFBD$ 为平行四边形, 因为 $\angle ADB = 90^\circ$, 所以四边形 $AFBD$ 为矩形.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

又 $\because AF \parallel BD$,

$$\therefore \angle FAE = \angle CDE,$$

又 $\because \angle FEA = \angle CED$,

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore AF = CD,$$

又 $\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore AF = BD.$$

【小问 2 详解】

解: $\because AB = AC, BD = CD,$

$\therefore AD \perp BC,$

$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$

由 (1) 得 $AF = BD,$

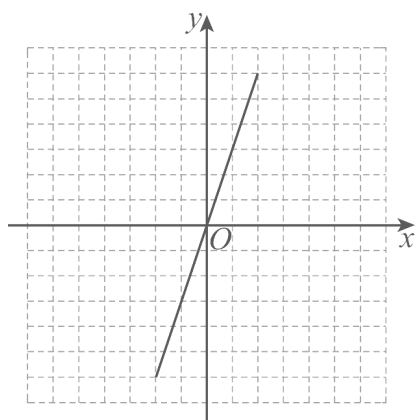
又 $\because AF \parallel BD,$

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 为平行四边形,

$\because \angle ADB = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 为矩形.

22. 已知正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图像经过点 $P(2, 6)$.



(1) 求此正比例函数的表达式;

(2) 若 x 轴上有一点 $A(3, 0)$, 此正比例函数的图像上有一点 $B\left(\frac{4}{3}, m\right)$, 求 $\triangle OAB$ 的面积;

(3) 在 (2) 的基础上, 在 y 轴上找一点 C , 使 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底的等腰三角形, 求点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = 3x$

(2) 6 (3) $\left(0, \frac{2\sqrt{22}}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求解即可;

(2) 先求出点 B 的坐标, 然后根据三角形面积公式求解即可;

(3) 设 $C(0, c)$, 根据 $AB = AC$ 列方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $P(2, 6)$ 代入 $y = kx (k \neq 0)$, 得

$$6 = 2k,$$

解得 $k = 3$,

$$\therefore y = 3x;$$

【小问 2 详解】

解: 把 $B\left(\frac{4}{3}, m\right)$ 代入 $y = 3x$, 得

$$m = 3 \times \frac{4}{3} = 4,$$

$$\therefore B\left(\frac{4}{3}, 4\right),$$

$$\therefore A(3, 0),$$

$$\therefore OA = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot y_B = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6;$$

【小问 3 详解】

解: 设 $C(0, c)$,

$\therefore \triangle ABC$ 是以 BC 为底的等腰三角形,

$$\therefore AB = AC.$$

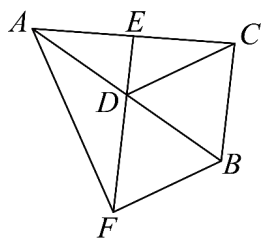
$$\therefore AB^2 = \left(3 - \frac{4}{3}\right)^2 + (0 - 4)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + (-4)^2 = \frac{169}{9}, \quad AC^2 = (3 - 0)^2 + (0 - c)^2 = 9 + c^2,$$

$$\therefore 9 + c^2 = \frac{169}{9},$$

$$\text{解得 } c = \pm \frac{2\sqrt{22}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{2\sqrt{22}}{3}\right) \text{ 或 } \left(0, -\frac{2\sqrt{22}}{3}\right).$$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D , E 分别为边 AB , AC 的中点, 延长 ED 至点 F , 使得 $DF = 2DE$, 连接 CD 、 BF .



(1) 求证: 四边形 $BCDF$ 是平行四边形;

(2) AF ，如果 $AF = AC$ ，请判断四边形 $BCDF$ 是什么特殊的平行四边形，并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 四边形 $BCDF$ 是菱形，见解析

【解析】

【分析】本题考查的是平行四边形的判定及菱形的判定，

(1) 先证明 $DE = \frac{1}{2}BC$ ， $DE \parallel BC$ ，进而得出 $DF = BC$ ，即可证明结论；

(2) 联结 CF ，得出 BD 、 CF 互相平分，进而得出 $AB \perp CF$ ，即可证明结论；

【小问 1 详解】

证明：∵ D ， E 分别为边 AB ， AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, DE \parallel BC,$$

$$\therefore DF = 2DE,$$

$$\therefore DF = BC,$$

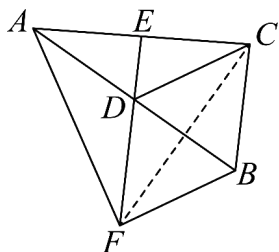
$$\therefore DF \parallel BC,$$

∴ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：四边形 $BCDF$ 是菱形.

联结 CF ；



∴ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

∴ BD 、 CF 互相平分，

$$\therefore AF = AC,$$

$$\therefore AB \perp CF, \text{ 即 } BD \perp CF,$$

∴ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

∴ 平行四边形 $BCDF$ 是菱形.

24. “数学探究小组”研究如下问题：如图 1，点 M 是矩形 $ABCD$ 内一点，求作一个四边形，使得四边形的四边分别等于 AM 、 BM 、 CM 、 DM ，并且两条对角线互相垂直.

小组成员小杰提出了如下的作法：1. 过点 M 作 $MN \parallel AB$ 并截取 $MN = AB$ ；2. 分别连接 BN 、 CN . 那

么四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

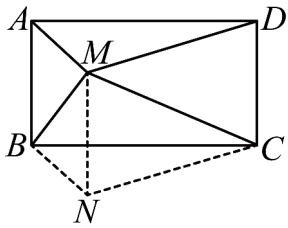


图1

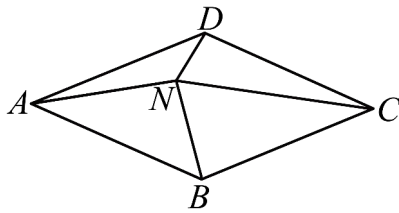


图2

(1) 请判断小杰的作法是否正确, 并说明理由;

(2) 如图 2, 点 N 是菱形 $ABCD$ 内一点, 请根据上述信息提出一个类似问题, 并予以解决 (只需写出作法或画出图形、结论, 不必说明理由).

【答案】 (1)

解: 小杰的作法正确, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD, AB = CD, \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore AB \perp BC,$

$\because MN \parallel AB, MN = AB,$

$\therefore AB \parallel CD \parallel MN, AB = MN = CD, MN \perp BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形,

$\therefore AM = BN, DM = CN,$

$\therefore$ 四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

(2)

如图 2, 点 N 是菱形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得四边形的四边分别等于 AN 、 BN 、 CN 、 DN , 并且两条对角线的夹角度数等于菱形的一个内角度数.

作法: 1. 过点 N 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $NG = AB$; 2. 分别连接 BG 、 CG . 那么四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.

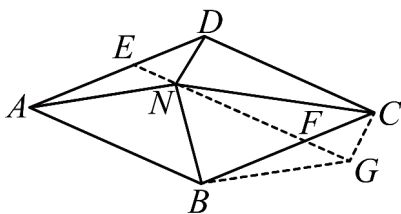


图2

【解析】

【分析】 本题考查了矩形和菱形的性质, 平行四边形的判定和性质, 三角形外角的性质, 掌握特殊四边形

的判定和性质是解题关键.

(1) 根据矩形的性质证明四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形, 即可得到答案;

(2) 先根据 (1) 提出类似问题, 再过点 N 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $NG = AB$;

2. 分别连接 BG 、 CG . 利用平行四边形的判定和性质, 即可证明四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = \angle DAN + \angle NAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because EF \parallel AB, NG = AB,$$

$$\therefore AB \parallel EF \parallel MN, AB = NG = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGN$ 和四边形 $CDNG$ 都是平行四边形,

$$\therefore AN = BG, DN = CG, AN \parallel BG, \angle BAN = \angle BGN,$$

$$\therefore \angle NAB + \angle ABG = \angle NAB + \angle ABC + \angle CBG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAN = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle NFB = \angle CBG + \angle BGN = \angle DAN + \angle BAN = \angle DAB,$$

$\therefore$ 四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.