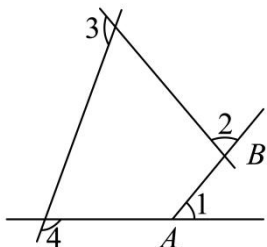


2025 学年第二学期八年级期中学习素养分析数学学科

一、选择题 (每题 3 分, 共 6 题)

1. 如图, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 120^\circ$, 则 $\angle 4 =$ ()



- A. 50° B. 80° C. 100° D. 110°

【答案】D

【解析】

【分析】根据多边形外角和定理得到 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$, 进而代入已知角度求出 $\angle 4$ 的度数.

【详解】解: $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$, $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 120^\circ$, $\therefore \angle 4 = 110^\circ$.

故选: D.

2. 在直角坐标系中, 点 $P(2x-6, x-5)$ 在第四象限, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $3 < x < 5$ B. $-3 < x < 5$ C. $-5 < x < 3$ D. $-5 < x < -3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了点的坐标, 一元一次不等式的求解, 根据四个象限的符号特点分别是: 第一象限 $(+, +)$, 第二象限 $(-, +)$, 第三象限 $(-, -)$, 第四象限 $(+, -)$, 求解 x 的取值范围即可.

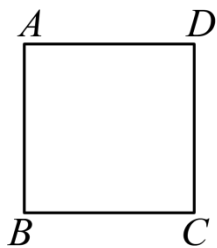
【详解】解: $\because$ 点 $P(2x-6, x-5)$ 在第四象限,

$$\therefore 2x-6 > 0, \quad x-5 < 0,$$

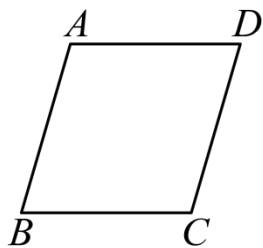
$$\therefore 3 < x < 5,$$

故选: A.

3. 将四根长度相等的细木条首尾相接, 用钉子钉成四边形 $ABCD$, 转动这个四边形, 使它形状改变. 当 $\angle B = 90^\circ$ 时, 如图①, 测得 $AC = 2$. 当 $\angle B = 60^\circ$ 时, 如图②, $AC =$ ()



图①



图②

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 6

D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

如图①先根据题意得到四边形 $ABCD$ 是正方形，连接 AC ，利用勾股定理求出 AB 的长，如图②根据 $\angle B=60^\circ$ ，证明三角形 ABC 为等边三角形即可得到答案.

【详解】解：如图① $\because AB=BC=CD=DA$ ， $\angle B=90^\circ$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

连接 AC ，则 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，

$$\therefore AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2},$$

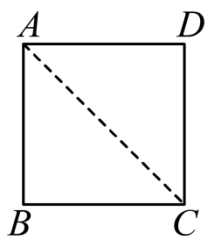
如图②， $\angle B=60^\circ$ ，连接 AC ，

$$\because AB = BC$$

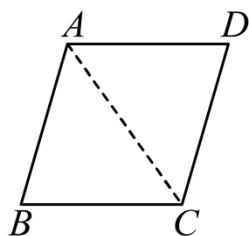
$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AC = AB = BC = \sqrt{2}.$$

故选 A.



图①



图②

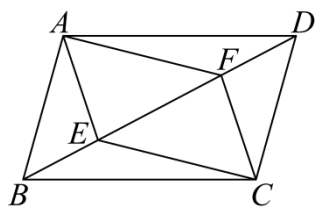
4. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，在对角线 BD 上取两点 E, F ，连结 AE, CE, AF, CF . 下列条件：

① $BE = DF$ ；② $\angle BAE = \angle DCF$ ；

③ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$;

④ $AE = CF$; ⑤ $AE \parallel CF$;

能得到四边形 $AECF$ 是平行四边形的个数是 ()



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

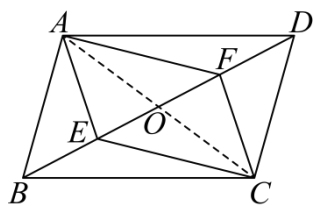
D. 5 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题主要考查平行四边形的定义及其判定, 熟练掌握平行四边形的性质及判定, 则比较简单.
此题利用平行四边形的判定及全等三角形的性质求解.

【详解】 解: 连接 AC 交 BD 于点 O ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, AB = CD, AO = CO, DO = BO$,

$\therefore \angle ABE = \angle CDF$,

① $BE = DF$, 可得 $OE = OF, OA = OC$, 即可判定四边形 $AECF$ 是平行四边形;

② 添加 $\angle BAE = \angle DCF$, 结合 $\angle ABE = \angle CDF, AB = CD$, 可得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF (ASA)$, $\therefore BE = DF$,
可得 $OE = OF, OA = OC$, 可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形;

③ $AE \perp BD, CF \perp BD$, 可得 $AE \parallel CF$, 根据 $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ, \angle ABE = \angle CDF, AB = CD$, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF (AAS)$, 可得 $AE = CF$, 可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形;

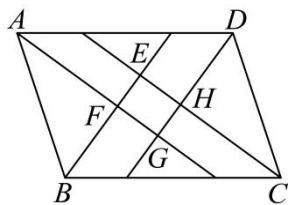
④ $AE = CF$, 无法判定 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 则无法判定四边形 $AECF$ 是平行四边形;

⑤ $AE \parallel CF$, 则 $\angle AEF = \angle CFE$, 可得 $\angle AEB = \angle CFD$, 结合 $\angle ABE = \angle CDF, AB = CD$, 则
 $\triangle ABE \cong \triangle CDF (AAS)$, 继而可得 $AE = CF$, 可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形;

$\therefore$ 能得到四边形 $AECF$ 是平行四边形的个数是 4 个.

故选: C.

5. 如图, $\square ABCD$ 四个内角的平分线两两相交, 构成四边形 $EFGH$, 则四边形 $EFGH$ 的形状是 ()



- A. 任意四边形 B. 正方形 C. 矩形 D. 平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 矩形的判定, 关键是掌握有三个角是直角的四边形是矩形.

由平行线的性质推出 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, 由角平分线定义得到

$\angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ$, 结合对顶角相等得到 $\angle EFG = \angle AFB = 90^\circ$, 同理可得, $\angle FGH = \angle EHG = 90^\circ$, 进而可证明四边形 $EFGH$ 是矩形.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.

$\because AF, BF$ 分别平分 $\angle DAB, \angle ABC$,

$\therefore \angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ$,

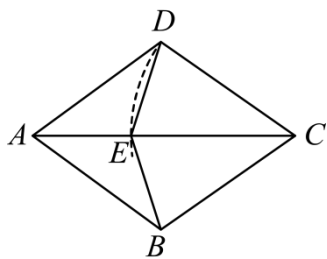
$\therefore \angle EFG = \angle AFB = 90^\circ$.

同理可得, $\angle FGH = \angle EHG = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

故选: C.

6. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 以点 C 为圆心, CD 长为半径画弧, 交 AC 于点 E , 连接 DE, BE , 若 $AE = DE = BE = 1$, 则 AD 长为 ()



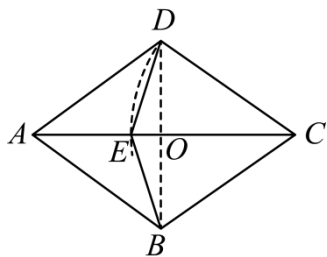
- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质，勾股定理，解一元二次方程等知识. 连接 BD 交 AC 于点 O ，由菱形的性质可得出 $AC \perp BD$ ， $OA = OC$ ， $AD = DC$ ，设 $AD = x$ ，根据题意则 $AD = DC = CE = x$ ， $AC = x + 1$ ，利用勾股定理可得出 $AD^2 - OA^2 = DE^2 - OE^2$ ，代入求值即可得出答案.

【详解】解：连接 BD 交 AC 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ， $OA = OC$ ， $AD = DC$ ，

设 $AD = x$ ，

根据题意则 $AD = DC = CE = x$ ， $AC = x + 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中， $AD^2 = OA^2 + OD^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEO$ 中， $DE^2 = OD^2 + OE^2$ ，

$\therefore AD^2 - OA^2 = DE^2 - OE^2$ ，

$$\text{即 } x^2 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 1^2 - \left(\frac{x+1}{2} - 1\right)^2$$

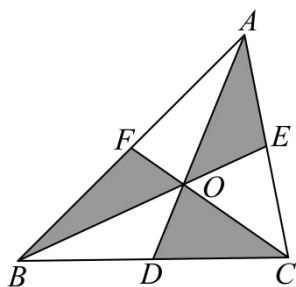
解得： $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (负值舍去)，

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ 即 } AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

故选：B.

二、填空题 (每题 3 分，共 12 题)

7. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心， $S_{\triangle ABC} = 16$ ，则阴影部分的面积之和为_____.



【答案】8

【解析】

【分析】根据三角形重心的定义可知 AD, BE, CF 是 ABC 的中线，再利用三角形中线的性质即可求解.

【详解】解：∵点 O 是 ABC 的重心，

∴ AD, BE, CF 是 ABC 的中线，

∴ $BD = CD$ ， $CE = AE$ ， $AF = BF$ ，

∴ $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ ， $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BAE}$ ， $S_{\triangle ACF} = S_{\triangle BCF}$ ，

∵ $BD = CD$ ，

∴ $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COD}$ ，

∴ $S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle COD}$ ，

∴ $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC}$ ，

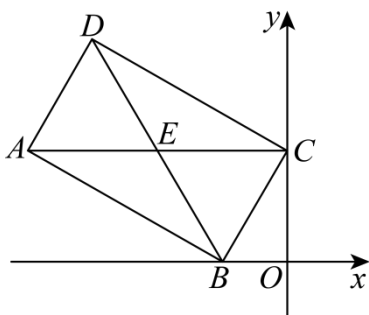
同理可得， $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC}$ ，

∴ $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{16}{3}$ ，

∴ $S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB} = \frac{8}{3}$ ， $S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOC} = \frac{8}{3}$ ， $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC} = \frac{8}{3}$ ，

∴ 阴影部分的面积之和 $= S_{\triangle BOF} + S_{\triangle AOE} + S_{\triangle COD} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 8$.

8. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 E ， $B(-1, 0)$ ， $C(0, \sqrt{3})$ ，如果 $AC \parallel x$ 轴，那么 BE 的长为_____.

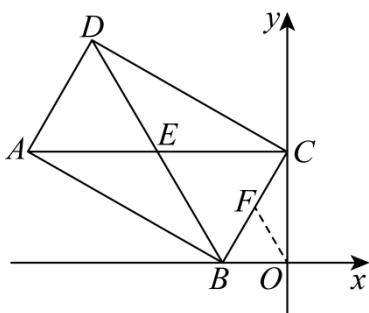


【答案】2

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系、矩形的性质、直角三角形的性质、等边三角形性质和判定、勾股定理，解题的关键是证明 $\triangle EBC$ 是等边三角形，进而求解. 取 BC 的中点 F ，连接 OF ，先根据勾股定理求得 BC 的长度，根据直角三角形的性质得到 $OF = BF = \frac{1}{2}BC = 1$ ，进而得出 $\triangle OBF$ 是等边三角形，再根据矩形的性质及 $AC \parallel x$ 轴证明 $\triangle EBC$ 是等边三角形，从而得到答案.

【详解】 解：如图，取 BC 的中点 F ，连接 OF ，



在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中， $OB = 1$ ， $OC = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{BO^2 + CO^2} = 2,$$

$\because BC$ 的中点 F ，

$$\therefore OF = BF = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore OF = BF = OB,$$

$\therefore \triangle BOF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle OBF = 60^\circ,$$

$\because AC \parallel x$ 轴，

$$\therefore \angle ECB = \angle OBF = 60^\circ,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ ，

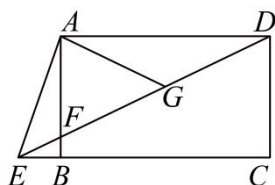
$$\therefore EB = EC,$$

$\therefore \triangle EBC$ 是等边三角形,

$\therefore BE = BC = 2$,

故答案为: 2.

9. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 连接 DE 交 AB 于点 F , $\angle AED = 2\angle CED$, 点 G 是 DF 的中点, 若 $BE = 2$, $CD = 6$, 则 DF 的长为_____.



【答案】 $4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】利用矩形的性质和勾股定理可求出 AE 的长, 利用直角三角形的性质得到 $AG = FG = GD = \frac{1}{2}DF$, 则可证明 $\angle AEG = \angle AGE$ 得到 $AE = AG$, 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB = CD = 6$,

$\therefore \angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$, $\angle GDA = \angle CED$,

$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{10}$,

$\because$ 点 G 是 DF 的中点,

$\therefore AG = FG = GD = \frac{1}{2}DF$,

$\therefore \angle GAD = \angle GDA$,

$\therefore \angle GAD = \angle GDA = \angle DEC$,

$\therefore \angle AGE = \angle GAD + \angle GDA = 2\angle DEC$, $\angle AED = 2\angle DEC$,

$\therefore \angle AEG = \angle AGE$,

$\therefore AE = AG$,

$\therefore DF = 2AG = 2AE = 4\sqrt{10}$.

10. 在平面直角坐标系中, 点 $M(1, 2)$ 与点 $N(5, 8)$, 则 MN 长度为_____.

【答案】 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】平面直角坐标系中点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2) 的距离为 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，据此求解即可.

【详解】解： $\because$ 在平面直角坐标系中，点 $M(1, 2)$ 与点 $N(5, 8)$,

$$\therefore MN = \sqrt{(1-5)^2 + (2-8)^2} = 2\sqrt{13}.$$

11. 已知点 A 坐标为 $(2a, -3a-4)$ ，点 B 的坐标为 $(5, -3)$ ，若 $AB \parallel x$ 轴，则 $a =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了平面直角坐标系中平行于 x 轴的直线上点的坐标特征，解题的关键是牢记平行于 x 轴的直线上所有点的纵坐标相等这一性质.

根据 $AB \parallel x$ 轴，得出点 A 和点 B 的纵坐标相等，据此列方程求解 a 的值，同时验证横坐标不相等以保证两点不重合.

【详解】解： $\because AB \parallel x$ 轴，

$\therefore$ 点 A 与点 B 的纵坐标相等，

$$\therefore -3a - 4 = -3,$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{3},$$

此时点 A 的横坐标为 $2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \neq 5$ ，符合题意.

故答案为： $-\frac{1}{3}$.

12. 已知点 $M(m-5, 2m-1)$ 到两个坐标轴的距离相等，则 $m =$ _____.

【答案】 -4 或 2

【解析】

【分析】点到两坐标轴的距离相等，可知该点的横纵坐标的绝对值相等，列方程求解即可.

【详解】解： $\because$ 点 $M(m-5, 2m-1)$ 到两个坐标轴的距离相等，

$$\therefore |m-5| = |2m-1|.$$

$$\therefore m-5 = 2m-1 \text{ 或 } m-5 = -(2m-1).$$

解得 $m = -4$ 或 $m = 2$.

13. 已知平面直角坐标系内， A 、 B 、 C 三点的坐标分别为 $A(5, 0)$ ， $B(0, 3)$ ， $C(5, 3)$ ， O 为坐标原点，点 E

在线段 BC 上, 若 $\triangle AEO$ 为等腰三角形, 则点 E 坐标为_____.

【答案】 $(4,3)$ 或 $(1,3)$ 或 $(\frac{5}{2},3)$

【解析】

【分析】 根据题意可得点 E 的纵坐标为 3, $OA=5$, 设 $E(m,3)(0 \leq m \leq 5)$, 则 $OE^2 = m^2 + 9$,

$AE^2 = m^2 - 10m + 34$, 再分三种情况: $OA=OE$, $OA=AE$, $AE=OE$, 分别建立方程求解即可.

【详解】 解: $\because B(0,3)$, $C(5,3)$, 点 E 在线段 BC 上,

$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 3,

$\therefore A(5,0)$,

$\therefore OA=5$;

设 $E(m,3)(0 \leq m \leq 5)$, 则 $OE^2 = (m-0)^2 + (3-0)^2 = m^2 + 9$,

$AE^2 = (m-5)^2 + (3-0)^2 = m^2 - 10m + 34$,

当 $OA=OE$ 时, 则 $OA^2 = OE^2$,

$\therefore m^2 + 9 = 5^2$,

解得 $m=4$ 或 $m=-4$ (舍去),

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(4,3)$;

当 $OA=AE$ 时, 则 $OA^2 = AE^2$,

$\therefore m^2 - 10m + 34 = 5^2$,

解得 $m=1$ 或 $m=9$ (舍去),

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1,3)$;

当 $AE=OE$ 时, 则 $AE^2 = OE^2$,

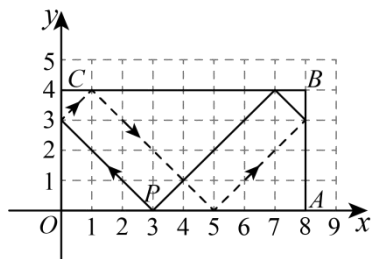
$\therefore m^2 + 9 = m^2 - 10m + 34$,

解得 $m = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(\frac{5}{2},3)$;

综上所述, 点 E 的坐标为 $(4,3)$ 或 $(1,3)$ 或 $(\frac{5}{2},3)$.

14. 如图, 动点 P 从点 $(3,0)$ 出发, 沿所示方向运动, 每当碰到长方形 $OABC$ 的边时反弹, 反弹后的路径与长方形的边的夹角为 45° , 第 2026 次碰到长方形边上的坐标为_____.



【答案】 $(8,3)$

【解析】

【分析】 根据题意可知, 从第 1 次碰撞开始, 每 6 次碰撞为一个循环, 求出 2026 除以 6 的余数即可得到答案.

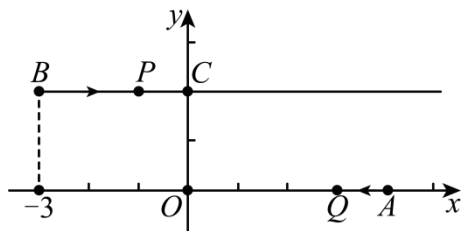
【详解】 解: 由题意可知, 从第 1 次碰撞开始, 每 6 次碰撞为一个循环, 碰撞点的坐标依次为

$(0,3), (1,4), (5,0), (8,3), (7,4), (3,0)$,

$\therefore 2026 \div 6 = 337 \dots 4$,

$\therefore$ 第 2026 次碰到长方形边上的坐标为 $(8,3)$.

15. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(4,0)$, 点 $B(-3,2)$, 点 $C(0,2)$, 点 P 从点 B 出发, 以 2 个单位每秒的速度沿射线 BC 运动, 点 Q 从点 A 出发, 开始以 1 个单位每秒的速度向原点 O 运动, 到达原点后停止运动, 若 P, Q 两点同时出发, 设运动时间为 t 秒, 则当 $t = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形.



【答案】 1 或 3

【解析】

【分析】 利用 A, B, C 的坐标可得到 $BC = 3, BC \parallel x$, 根据平行四边形的判定, 当 $PC = AQ$ 时, 以点 $A,$

Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形, 分情况讨论, 计算即可.

【详解】解: $\because A(4,0), B(-3,2), C(0,2)$,

$\therefore BC=3, BC \parallel x$ 轴,

$\therefore PC \parallel AQ$,

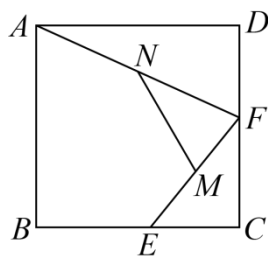
$\therefore$ 当 $PC=AQ$ 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形,

若 $0 < t < \frac{3}{2}$ 时, $BP=2t, PC=3-2t, AQ=t$, 此时 $3-2t=t$, 解得 $t=1$;

若 $\frac{3}{2} < t < 4$ 时, $BP=2t, PC=2t-3, AQ=t$, 此时 $2t-3=t$, 解得 $t=3$;

综上所述, 当 t 为 1 或 3 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形.

16. 如图, 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 上的动点, M, N 分别是 EF, AF 的中点, 则 MN 的最大值为_____.



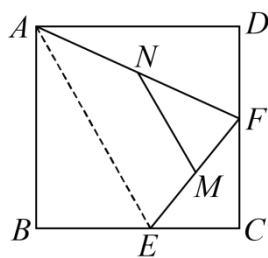
【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】首先证明出 MN 是 $\triangle AEF$ 的中位线, 得到 $MN = \frac{1}{2}AE$, 然后由正方形的性质和勾股定理得到

$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2}$, 证明出当 BE 最大时, AE 最大, 此时 MN 最大, 进而得到当点 E 和点 C 重合时, BE 最大, 即 BC 的长度, 最后代入求解即可.

【详解】如图所示, 连接 AE ,



$\because M, N$ 分别是 EF, AF 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线,

$$\therefore MN = \frac{1}{2} AE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2},$$

$\therefore$ 当 BE 最大时, AE 最大, 此时 MN 最大,

$\because$ 点 E 是 BC 上的动点,

$\therefore$ 当点 E 和点 C 重合时, BE 最大, 即 BC 的长度,

$$\therefore \text{此时 } AE = \sqrt{4 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2} AE = \sqrt{2},$$

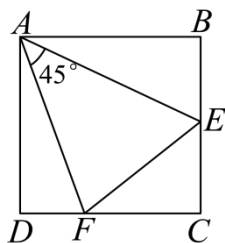
$$\therefore MN \text{ 的最大值为 } \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查了正方形的性质, 三角形中位线的性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

17. 如图, 点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 已知 $AD = 6$, $DF = 2$, 则

$$S_{\triangle AEF} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 15

【解析】

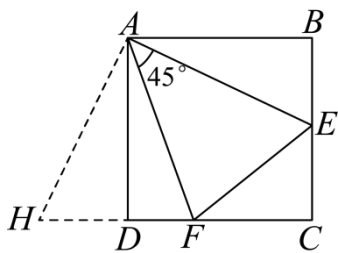
【分析】本题考查全等三角形的判定与性质、勾股定理, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

过点 A 作 $AH \perp AE$ 交 CD 的延长线于点 H , 易证得 $\triangle ADH \cong \triangle ABE$ (ASA) 和 $\triangle AHF \cong \triangle EAF$ (SAS),

根据全等三角形的性质得到 $EF = HF$, 设 $DH = BE = x$, 则 $EF = 2 + x$ 、 $CE = 6 - x$, 根据

$EF^2 = CF^2 + CE^2$ 列方程, 求解 x 的值, 利用 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AHF}$ 进行计算求解即可.

【详解】解: 过点 A 作 $AH \perp AE$ 交 CD 的延长线于点 H , 如图:



$$\because \angle HAE = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAD = \angle BAE,$$

$$\because \angle ADH = \angle ABE = 90^\circ, \quad AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ADH \cong \triangle ABE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AH = AE, \quad DH = BE,$$

$$\because \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAD + \angle DAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAF = \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\because AF = AF,$$

$$\therefore \triangle AHF \cong \triangle AEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = HF,$$

$$\because AD = DC = 6, \quad DF = 2,$$

$$\therefore CF = 6 - 2 = 4,$$

$$\text{设 } DH = BE = x, \text{ 则 } EF = 2 + x, \quad CE = 6 - x,$$

$$\because EF^2 = CF^2 + CE^2,$$

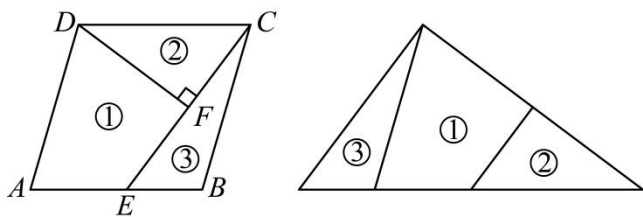
$$\therefore (2 + x)^2 = 4^2 + (6 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AHF} = \frac{1}{2} \times (3 + 2) \times 6 = 15,$$

故答案为: 15.

18. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 5, 点 E 在边 AB 上, 连结 CE , 过点 D 作 $DF \perp CE$ 于点 F , CE , DF 将菱形分割成三部分后, 恰好可以拼成一个直角三角形, 若 $EC = DF + 2$, 则线段 AE 的长度为_____.

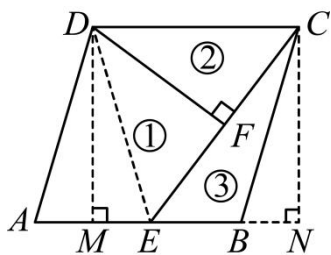


【答案】 $\frac{14}{5}$

【解析】

【分析】由题意可得 $CF = EF$ ，连接 DE ，过点 D, C 分别作 $DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，垂足为点 M, N ，设 $DF = 2x$ ， $AM = a$ ，由 $DF \perp CE$ ，得到 $DC = DE = DA = 5$ ，那么有三线合一可得 $AM = ME = a$ ，则 $CF = EF = x + 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，由勾股定理建立方程求出 $x = 2$ ，则 $CE = 6$ ，可得四边形 $DMNC$ 为矩形，则由双勾股定理可得 $DE^2 - ME^2 = AM^2 = CN^2 = CE^2 - EN^2$ ，继而建立方程求出 a ，即可求解 AE 。

【详解】解：由题意得可得 $CF = EF$ ，连接 DE ，过点 D, C 分别作 $DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，垂足为点 M, N ，



设 $DF = 2x$ ， $AM = a$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = CD = BC = AB = 5$ ， $AD \parallel BC, CD \parallel AB$ ，

$\because CF = EF$ ， $DF \perp CE$ ，

$\therefore DC = DE = DA = 5$ ，

$\because DM \perp AB$ ，

$\therefore AM = ME = a$

$\because EC = DF + 2 = 2x + 2$ ，

$\therefore CF = EF = x + 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，由勾股定理得 $DF^2 + FC^2 = DC^2$ ，

$\therefore (2x)^2 + (x+1)^2 = 5^2$ ，

解得: $x = 2$ 或 $x = -\frac{12}{5}$ (舍)

$$\therefore CE = 6,$$

$$\because CD \parallel AB, DM \perp AB, CN \perp AB,$$

$$\therefore \angle DMN = \angle N = \angle NCD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DMNC$ 为矩形,

$$\therefore CD = MN = 5,$$

$$\therefore EN = 5 - a,$$

$$\because DE^2 - ME^2 = AM^2 = CN^2 = CE^2 - EN^2$$

$$\therefore 5^2 - a^2 = 6^2 - (5 - a)^2,$$

解得: $a = \frac{7}{5},$

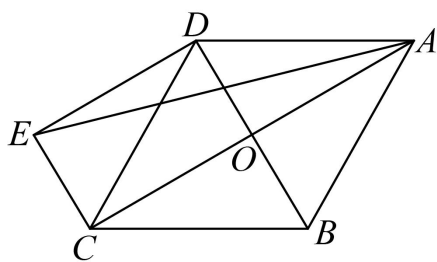
$$\therefore AE = 2a = \frac{14}{5},$$

故答案为: $\frac{14}{5}.$

【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质, 菱形的性质, 勾股定理, 解一元二次方程, 等腰三角形的性质等知识点, 难度较大, 正确构造辅助线是解题的关键.

三、解答题 (第 19, 20, 21, 22 题每题 5 分, 第 23 题 7 分, 第 24 题 8 分, 第 25 题 11 分)

19. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 过点 D 作 $DE \parallel AC$, 且 $DE = \frac{1}{2}AC$, 连接 AE 、 CE . 求证: 四边形 $OCED$ 为矩形.



【答案】 见详解

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的判定、菱形的性质等知识, 熟练掌握相关知识是解题关键. 首先根据菱形的性质可得 $AC \perp BD$, $OC = \frac{1}{2}AC$, 进而可得 $DE = OC$, 结合 $DE \parallel AC$ 可证明四边形 $OCED$ 为平行四边形, 然后根据“有一个角为直角的平行四边形为矩形”即可证明结论.

【详解】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad OC = OA = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore DE = OC,$$

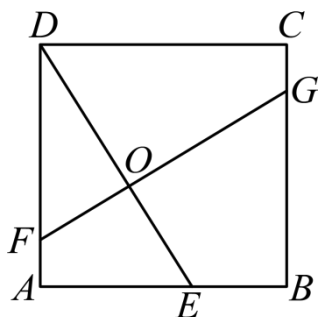
$$\text{又} \because DE \parallel AC,$$

$$\therefore \text{四边形 } OCED \text{ 为平行四边形},$$

$$\therefore \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } OCED \text{ 为矩形}.$$

20. 如图, O 为正方形 $ABCD$ 内一点, 连接 DO 并延长交边 AB 于 E , 过点 O 的直线与边 AD , BC 分别交于 F , G . $FG = DE$, 求证: $FG \perp DE$.

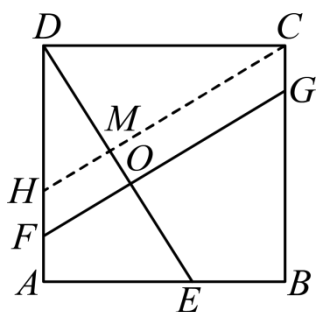


【答案】见解析

【解析】

【分析】过点 C 作 $CH \parallel FG$ 分别交 AD , DE 于点 H , 点 M , 可证明四边形 $CGFH$ 是平行四边形, 得到 $CH = FG$, 则 $CH = DE$; 证明 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle DCH$ (HL), 得到 $\angle ADE = \angle DCH$, 可推出 $\angle CME = \angle DCH + \angle CDE = 90^\circ$, 即 $DE \perp CH$, 则可证明 $FG \perp DE$.

【详解】证明: 如图所示, 过点 C 作 $CH \parallel FG$ 分别交 AD , DE 于点 H , 点 M ,



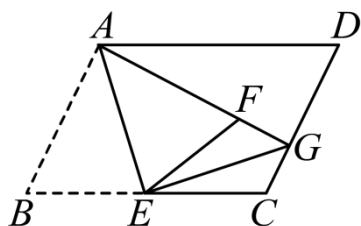
$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为正方形},$$

$$\therefore CD = AD, \quad \angle ADC = \angle A = 90^\circ, \quad AD \parallel BC,$$

$$\text{又} \because CH \parallel FG,$$

$\therefore$ 四边形 $CGFH$ 是平行四边形,
 $\therefore CH = FG$;
 $\because FG = DE$,
 $\therefore CH = DE$,
 $\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle DCH (\text{HL})$,
 $\therefore \angle ADE = \angle DCH$,
 $\because \angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DCH + \angle CDE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CME = \angle DCH + \angle CDE = 90^\circ$,
 $\therefore DE \perp CH$,
 $\because CH \parallel FG$,
 $\therefore FG \perp DE$.

21. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 BC 的中点, 连接 AE , 将 $\triangle AEB$ 沿直线 AE 翻折, 得到 $\triangle AFE$. 如图, 延长 AF 交 CD 于点 G , 求证: $CG = FG$;

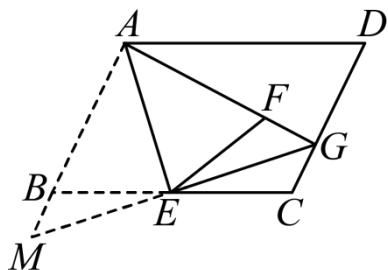


【答案】见解析

【解析】

【分析】延长 GE 交 AB 的延长线于点 M , 证出 $\triangle CGE \cong \triangle BME$, 得到 $BM = CG$, $ME = GE$, 再由角平分线的性质及面积关系得 $AM = AG$, 从而得出 $AM - AB = AG - AF$, 即可得出结论.

【详解】证明: 如图, 延长 GE 交 AB 的延长线于点 M ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle CGE = \angle M, \quad \angle C = \angle EBM;$$

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore CE = BE;$$

在 $\triangle CGE$ 和 $\triangle BME$ 中,

$$\begin{cases} \angle CGE = \angle M \\ \angle C = \angle EBM, \\ CE = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CGE \cong \triangle BME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BM = CG, \quad ME = GE,$$

即 E 为 MG 的中点;

$$\therefore S_{\triangle AEM} = S_{\triangle AEG};$$

由折叠的性质可得 $\angle BAE = \angle FAE$,

$\therefore$ 点 E 到 AM 的距离等于点 E 到 AG 的距离,

设 E 点到 AM 、 AG 的距离分别为 a 、 b , 则 $a = b$;

$$\therefore \frac{1}{2} AM \times a = \frac{1}{2} AG \times b,$$

$$\therefore AM = AG;$$

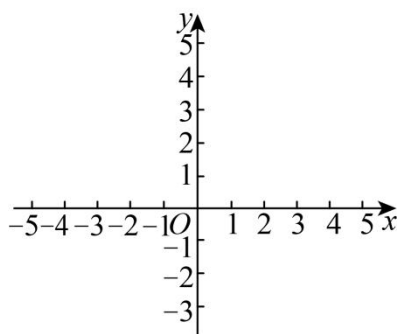
$$\because AB = AF,$$

$$\therefore AM - AB = AG - AF,$$

即 $BM = FG$,

$$\therefore FG = CG.$$

22. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$.



(1) 点 A' 与点 A 关于原点对称, 则点 A' 的坐标为_____, 点 B 与点 B' 关于直线 $x = -1$ 对称, 则点 B' 的坐标为_____.

(2) 若点 M 在 x 轴上, 且 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ACM}$, 试求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $(2,0)$; $(-6,0)$

(2) $M(-4,0)$ 或 $M(0,0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据对称的性质可得点 A' 的坐标和点 B' 的坐标;

(2) 设点 M 的坐标为 $(m,0)$, 利用三角形的面积公式可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because A(-2,0)$,

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(2,0)$;

$\because B(4,0)$,

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(-6,0)$;

【小问 2 详解】

解: 设点 M 的坐标为 $(m,0)$,

$\because A(-2,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$,

$\therefore AB = |-2-4| = 6$, $OC = 3$, $AM = |-2-m|$,

$\because S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ACM}$,

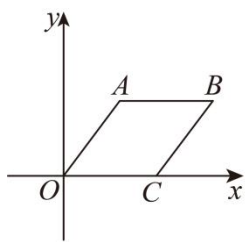
$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times OC = 3 \times \frac{1}{2} AM \times OC$,

$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 3 \times \frac{1}{2} |-2-m| \times 3$,

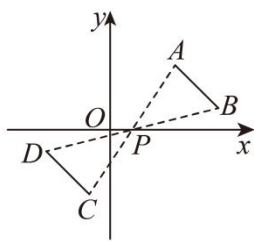
解得: $m = -4$ 或 $m = 0$,

$\therefore M(-4,0)$ 或 $M(0,0)$.

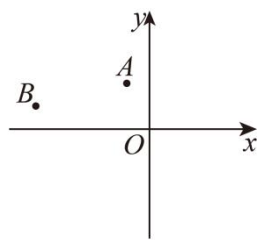
23. 平面直角坐标系不仅可以研究函数, 还可以研究并解决很多图形以及图形变换问题.



图①



图②



图③

- (1) 如图①, 在菱形 $OABC$ 中, 若点 $A(3,4)$, 则点 B 坐标为_____.
- (2) 如图②, 线段 AB 、 CD 关于点 P 对称, 若点 $A(3,3)$, $B(5,1)$, $D(-3,-1)$, 则点 C 的坐标为_____.
- (3) 如图③, 在直角坐标系中, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1,2)$ 、 $(-5,1)$, 点 M 、 N 分别是 x 轴、 y 轴上的点, 若以点 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形, 则点 M 的横坐标为_____.

【答案】 (1) $(8,4)$

(2) $(-1,-3)$

(3) $4, -4, -6$

【解析】

【分析】 (1) 利用菱形边长相等、对边平行的性质求点坐标;

(2) 用中点坐标公式求出对称中心坐标, 再求对称点坐标;

(3) 根据 AB 为边和对角线进行分类讨论, 利用平行四边形的性质求出 M 点横坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 的坐标为 $A(3,4)$,

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore AB = 5, AB \parallel OC,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8,4)$.

【小问 2 详解】

解: $\because B(5,1)$, $D(-3,-1)$ 关于点 P 对称,

$$\therefore \frac{5-3}{2} = 1, \frac{1-1}{2} = 0, \text{ 点 } P \text{ 的坐标为 } (1,0),$$

设点 C 的坐标为 (x,y) ,

$\because A(3,3)$ 与 $C(x,y)$ 关于点 P 对称,

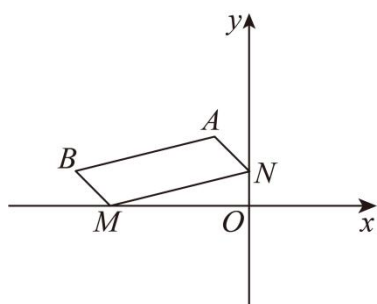
$$\therefore \frac{3+x}{2}=1, \quad \frac{3+y}{2}=0,$$

解得 $x=-1$, $y=-3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-1,-3)$.

【小问 3 详解】

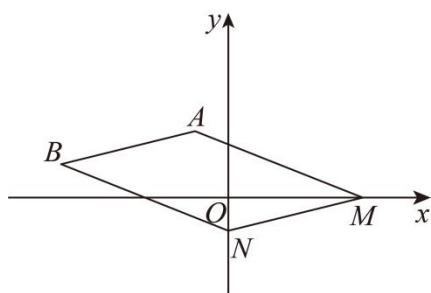
解: 如图, 当 $AB \parallel NM$,



$\because$ 点 N 在 y 轴上, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1,2)$ 、 $(-5,1)$,

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 $-5 - (-1) = -4$;

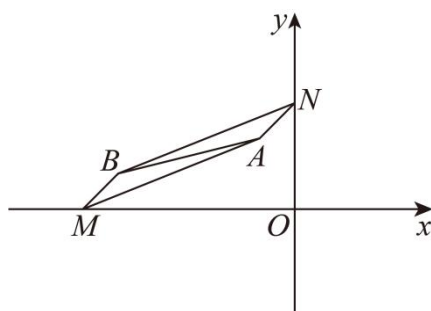
如图, 当 $AB \parallel MN$,



$\because$ 点 N 在 y 轴上, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1,2)$ 、 $(-5,1)$,

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 $-1 - (-5) = 4$;

如图, 当 AB 为对角线,



∵点 N 在 y 轴上, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1, 2)$ 、 $(-5, 1)$,

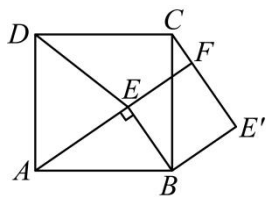
设点 M 的横坐标为 a ,

$$\therefore \frac{a+0}{2} = \frac{-1+(-5)}{2},$$

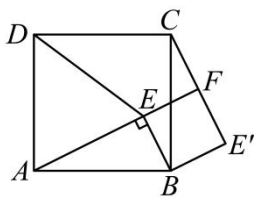
解得 $a = -6$, 即点 M 的横坐标为 -6 ,

综上, 点 M 的横坐标为 4 , -4 , -6 .

24. 【问题情境】如图①, 点 E 为正方形 $ABCD$ 内一点, $\angle AEB = 90^\circ$, 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle CBE'$ (点 A 的对应点为点 C), 延长 AE 交 CE' 于点 F .



图①



图②

【猜想证明】

- (1) 试判断四边形 $BE'FE$ 的形状, 并说明理由;
- (2) 如图②, 若 $AD = DE$, 请猜想线段 CF 与 FE' 的数量关系并加以证明.

【答案】(1) 四边形 $BE'FE$ 是正方形, 详见解析

- (2) $CF = E'F$, 详见解析

【解析】

【分析】本题考查的是正方形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质,

- (1) 先证明四边形 $BE'FE$ 是矩形, 即可证明结论;

- (2) 过点 D 作 $DH \perp AE$ 于 H , 结合正方形性质证明 $\triangle ADH \cong \triangle BAE$, 得出 $AH = BE = \frac{1}{2}AE$, 根据

$BE = E'F$ 即可证明结论.

【小问 1 详解】

解: 四边形 $BE'FE$ 是正方形, 理由如下:

∵将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ,

$$\therefore \angle AEB = \angle CE'B = \angle EBE' = 90^\circ, \quad BE = BE'.$$

又 $\because \angle BEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BE'FE$ 是矩形.

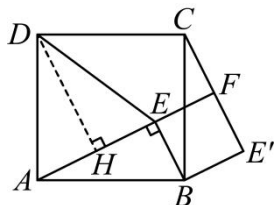
又 $\because BE = BE'$,

∴ 四边形 $BE'FE$ 是正方形.

【小问 2 详解】

$CF = E'F$; 理由如下:

如图, 过点 D 作 $DH \perp AE$ 于 H ,



∵ $DA = DE$, $DH \perp AE$,

∴ $AH = \frac{1}{2} AE$, $\angle ADH + \angle DAH = 90^\circ$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AD = AB$, $\angle DAB = 90^\circ$,

∴ $\angle DAH + \angle EAB = 90^\circ$,

∴ $\angle ADH = \angle EAB$.

又 ∵ $AD = AB$, $\angle AHD = \angle AEB = 90^\circ$,

∴ $\triangle ADH \cong \triangle BAE$ (AAS),

∴ $AH = BE = \frac{1}{2} AE$.

∵ 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ,

∴ $AE = CE'$,

∵ 四边形 $BE'FE$ 是正方形,

∴ $BE = E'F$,

∴ $E'F = \frac{1}{2} CE' = CF$,

∴ $CF = E'F$.

25. 综合与探究

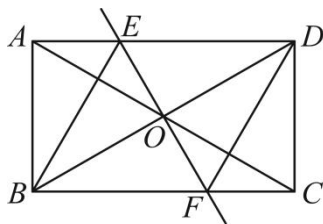


图1

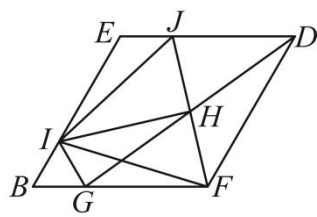


图2

(1) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 过点 O 作直线 $EF \perp BD$, 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 连接 BE , DF , 且 BE 平分 $\angle ABD$.

①求证: 四边形 $BFDE$ 是菱形;

②直接写出 $\angle EBF$ 的度数.

(2) 把 (1) 中菱形 $BFDE$ 进行分离研究, 如图 2, G, I 分别在 BF, BE 边上, 且 $BG = BI$, 连接 GD , H 为 GD 的中点, 连接 FH , 并延长 FH 交 ED 于点 J , 连接 IJ, IH, IF, IG . 试探究线段 IH 与 FH 之间满足的数量及位置关系, 并说明理由.

【答案】(1) ①见解析; ② 60°

(2) $IH = \sqrt{3}FH$, $IH \perp FH$, 理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质、菱形的性质和判定、等边三角形的判定与性质、勾股定理、全等三角形的性质和判定, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

(1) ①证明 EF 是 BD 的垂直平分线, $\triangle BOF \cong \triangle DOE$, 得到 $ED = FB$, 进而证明;

②根据菱形的性质推出 $\angle ABC = 3\angle EBO$, 进而解题即可;

(2) 延长 BE 到 M , 使 $EM = EJ$, 连接 MJ , 证明 $\triangle FGH \cong \triangle DJH$ 以及 $\triangle BGI$ 是等边三角形, 证明 $\triangle FBI \cong \triangle IMJ$ 以及 $\triangle FIJ$ 是等边三角形, 推出 $IH \perp FH$, $\angle FIH = \frac{1}{2}\angle FIJ = 30^\circ$, 即可得解.

【小问 1 详解】

①证明: 由题意知, $OB = OD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OBF = \angle ODE$,

$\because EF \perp BD$,

$\therefore EF$ 是 BD 的垂直平分线,

$\therefore EB = ED$, $FB = FD$, $\angle BOF = \angle DOE = 90^\circ$,

在 $\triangle BOF$ 和 $\triangle DOE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BOF = \angle DOE = 90^\circ \\ OB = OD \\ \angle OBF = \angle ODE \end{cases},$$

$\therefore \triangle BOF \cong \triangle DOE (ASA)$,

$\therefore ED = FB$,

$\therefore EB = ED = FB = FD$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是菱形;

②解: $\because$ 四边形 $BFDE$ 是菱形,

$$\therefore \angle EBO = \angle FBO,$$

$$\therefore \angle EBF = 2\angle EBO,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBO,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBO = \angle FBO,$$

$$\therefore \angle ABC = 3\angle EBO,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore 3\angle EBO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 2\angle EBO = 60^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: $IH = \sqrt{3}FH$, $IH \perp FH$, 理由如下:

延长 BE 到 M , 使 $EM = EJ$, 连接 MJ , 如图所示:

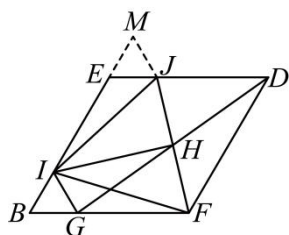


图2

$\because$ 四边形 $BFDE$ 是菱形, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore BF \parallel DE, BF = DE = BE = DF,$$

$$\therefore \angle HGF = \angle HDJ, \angle HFG = \angle HJD, \angle MEJ = \angle B = 60^\circ,$$

$\because H$ 为 GD 的中点,

$$\therefore GH = DH,$$

在 $\triangle FGH$ 和 $\triangle JDH$ 中,

$$\begin{cases} \angle HGF = \angle HDJ \\ \angle HFG = \angle HJD, \\ GH = DH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FGH \cong \triangle JDH (\text{AAS}),$$

$$\therefore FH = JH, FG = DJ,$$

$$\therefore BF - FG = DE - DJ,$$

$$\therefore BG = EJ,$$

$$\because BG = BI, \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BGI$ 是等边三角形,

$$\therefore BI = BG = GI,$$

$$\text{又} \because EM = EJ, \angle MEJ = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle EMJ$ 是等边三角形,

$$\therefore EM = EJ = MJ, \angle M = 60^\circ,$$

$$\therefore BI = MJ = EM, \angle B = \angle M = 60^\circ,$$

$$\because IM = IE + EM = IE + BI = BE,$$

$$\therefore FB = IM,$$

在 $\triangle FBI$ 和 $\triangle IMJ$ 中,

$$\begin{cases} BI = MJ \\ \angle B = \angle M \\ FB = IM \end{cases},$$

$$\therefore \triangle FBI \cong \triangle IMJ (SAS),$$

$$\therefore FI = JI, \angle BFI = \angle MIJ,$$

在 $\triangle FBI$ 中, $\angle BIF + \angle BFI = 180^\circ - \angle B = 120^\circ,$

$$\therefore \angle MIJ + \angle BFI = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FIJ = 180^\circ - (\angle MIJ + \angle BFI) = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because FI = JI,$$

$\therefore \triangle FIJ$ 是等边三角形,

$$\therefore FH = JH$$

$$\therefore IH \perp FH, \angle FIH = \frac{1}{2} \angle FIJ = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle FIH$ 中, $\angle FIH = 30^\circ,$

$$\therefore FI = 2FH,$$

$$\text{由勾股定理得: } IH = \sqrt{FI^2 - FH^2} = \sqrt{(2FH)^2 - FH^2} = \sqrt{3}FH,$$

$$\therefore IH = \sqrt{3}FH, IH \perp FH.$$