

2025 学年第二学期期中诊断练习八年级

数学 (学科) 试卷

2026.4

说明:

1. 本试卷含四个大题, 共 26 题;
2. 答题时, 请按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 一个多边形的边数增加 1 时, 其外角和的变化情况为 ()

A. 不变 B. 增加 1° C. 增加 180° D. 增加 360°

【答案】A

【解析】

【分析】任意多边形的外角和是固定值, 与边数无关, 据此即可判断变化情况.

【详解】解: $\because$ 任意多边形的外角和恒为 360° , 不随边数的改变而改变,

$\therefore$ 当多边形的边数增加 1 时, 其外角和保持不变.

2. 如图的伸缩门, 其原理是 ()



- A. 三角形的稳定性 B. 四边形的不稳定性
C. 两点之间线段最短 D. 两点确定一条直线

【答案】B

【解析】

【分析】根据四边形的不稳定性, 可得答案.

【详解】解: 如图的伸缩门, 其原理是四边形的不稳定性,

故选: B.

【点睛】本题考查了多边形, 利用四边形的性质是解题关键.

3. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 平行四边形
B. 矩形
C. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念逐一判断可得.

【详解】解: A. 平行四边形是中心对称图形, 但不是轴对称图形, 此选项不符合题意;

B. 矩形既是轴对称图形又是中心对称图形, 此选项符合题意;

C. 正三角形是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 此选项不符合题意;

D. 等腰直角三角形是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 此选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题主要考查轴对称图形和中心对称图形, 解题的关键是掌握轴对称图形和中心对称图形的概念.

4. 已知 a 、 b 均为正数, 则点 $(-a, b)$ 在平面直角坐标系中的哪个象限 ()

- A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件判断出点 $(-a, b)$ 的横、纵坐标的正负性, 再根据各象限内点的坐标特征来确定该点所在的象限.

【详解】 $\because a$ 、 b 均为正数,

$\therefore a > 0$, 即 $-a < 0$, $b > 0$,

$\therefore$ 点 $(-a, b)$ 的横坐标 $-a < 0$, 纵坐标 $b > 0$, 符合第二象限内点的坐标特征 $(-, +)$,

$\therefore$ 点 $(-a, b)$ 在第二象限.

5. 点 $P(-3, 4)$ 与点 $Q(3, 4)$ 在平面直角坐标系中关于哪条线对称 ()

- A. x 轴
B. y 轴
C. 直线 $x = 1$
D. 直线 $y = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平面直角坐标系中点的对称坐标特征, 通过分析两点横纵坐标的关系, 即可确定对称轴.

【详解】解: $\because$ 点 $P(-3, 4)$ 与点 $Q(3, 4)$ 的纵坐标相等, 横坐标互为相反数,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 0$, 即 y 轴.

6. 菱形 $AOBC$ 的周长为 40, 以 O 为原点, 顶点 A 在 x 轴负半轴上建立平面直角坐标系, 顶点 B 的横坐标是 8, 则点 C 的坐标为 ()

A. $(-2, 8)$ 或 $(-2, -8)$

B. $(-2, 6)$ 或 $(-2, -6)$

C. $(-10, 0)$ 或 $(10, 0)$

D. $(8, 6)$ 或 $(-8, -6)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用菱形四边相等的性质求出边长, 再结合勾股定理得到点 B 的纵坐标, 最后根据菱形对边平行且相等的性质求出点 C 的坐标, 分点 B 在 x 轴上方和下方两种情况讨论.

【详解】 $\because$ 菱形 $AOBC$ 周长为 40, 菱形四条边相等,

$\therefore$ 菱形边长为 $40 \div 4 = 10$, 可得 $OB = AO = 10$,

$\because O$ 为原点, 点 B 横坐标为 8, 设 $B(8, y)$,

由勾股定理得: $OB^2 = 8^2 + y^2$, 代入 $OB = 10$,

得: $10^2 = 64 + y^2$, 解得 $y = \pm 6$,

即点 B 坐标为 $(8, 6)$ 或 $(8, -6)$,

$\because AO$ 在 x 轴上, 菱形对边平行且相等,

$\therefore BC \parallel AO$, $BC = AO = 10$,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标与 B 相同,

由菱形顶点顺序 $AOBC$ 可知, 从点 B 到点 C 的平移与从点 O 到点 A 的平移相同, 点 $O(0, 0)$ 到点 $A(-10, 0)$ 是向左平移 10 个单位,

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 $8 - 10 = -2$,

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(-2, 6)$ 或 $(-2, -6)$.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 十边形的内角和为_____.

【答案】 1440° ## 1440 度

【解析】

【分析】 本题考查了多边形内角和的计算, 解题的关键是掌握多边形内角和公式, 并正确代入边数进行计算.

利用多边形内角和公式： n 边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ ；确定十边形的边数 $n=10$ ，代入公式计算内角和.

【详解】解：十边形的边数 $n=10$ ，则其内角和为 $(10-2) \times 180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ$.

故答案为：1440°.

8. 已知平行四边形周长为 20，一边长 4，则另一边长为_____.

【答案】

6

【解析】

【分析】利用平行四边形对边相等的性质，结合周长的定义即可计算出另一边长.

【详解】 $\because$ 平行四边形的对边相等，

$\therefore$ 平行四边形的周长等于 2 倍的两邻边长度之和，

设平行四边形另一边长为 x ，根据题意得 $2(4+x)=20$ ，

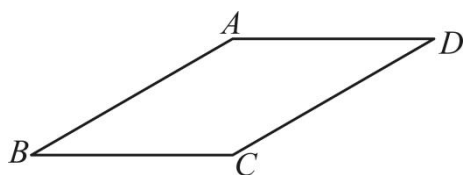
解得 $x=6$.

9. 平行四边形的一个内角是 30° ，则与它相邻的内角为_____.

【答案】150°

【解析】

【详解】解：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle B = 30^\circ$ ，



$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle B = 150^\circ$.

10. 若菱形两条对角线的长分别为 6 和 9，则此菱形面积为_____.

【答案】27

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质，根据菱形的对角线互相垂直，互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的一半.

【详解】解：菱形的面积为： $\frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$.

故答案为：27.

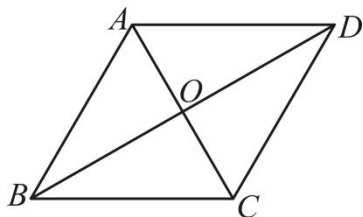
11. 已知菱形的一条边与它的两条对角线所成的两个角的度数之比为1:2, 则这个菱形的较大内角为_____.

【答案】 120° ##120 度

【解析】

【分析】 根据已知条件, 设 $\angle CBD = x$, 则 $\angle BCA = 2x$, 由菱形的对角线互相垂直得出方程, 解方程得出各个内角的度数, 找到菱形内的较大内角, 通过计算即可得出结果.

【详解】 解: 如图所示:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $\angle ADC = \angle ABC = 2\angle CBD$, $\angle BAD = \angle BCD = 2\angle BCA$,

设 $\angle CBD = x$, 则 $\angle BCA = 2x$,

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBD + \angle BCA = 90^\circ$, 即 $x + 2x = 90^\circ$,

解得 $x = 30^\circ$,

$\therefore \angle BCA = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$,

$\therefore$ 菱形的较大角 $\angle BAD = \angle BCD = 2\angle BCA = 120^\circ$.

12. 矩形相邻两边的长是1和2, 则它的两条对角线之和为_____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据矩形的性质可知矩形内角为直角, 且对角线相等, 再利用勾股定理求出一条对角线的长, 最后计算两条对角线的和即可.

【详解】 解: $\because$ 矩形的四个内角都是直角, 且矩形的对角线相等,

$\therefore$ 由勾股定理可得, 一条对角线的长为 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 两条对角线之和为 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

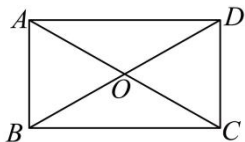
13. 矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , $\triangle OAB$ 为等边三角形, $AB = 2$, 则矩形另一边长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OB = OC$ ，又 $\triangle OAB$ 为等边三角形，所以 $OA = OB = AB = 2$ ，最后通过勾股定理即可求解.

【详解】解：如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OB = OC$ ，

$\because \triangle OAB$ 为等边三角形，

$\therefore OA = OB = AB = 2$ ，

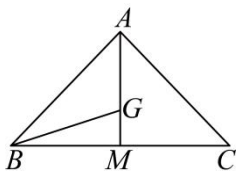
$\therefore OC = OA = 2$ ，

$\therefore AC = 4$ ，

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 矩形另一边长为 $2\sqrt{3}$.

14. 如图， $\triangle ABC$ 的重心为 G ，如果 $\triangle AGB$ 的面积为 2，则 $\triangle AMC$ 的面积为_____.



【答案】3

【解析】

【分析】根据三角形重心的定义可知 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AG = 2GM$ ，利用等高三角形面积比等于底边比求出 $\triangle ABM$ 的面积，再根据中线将三角形分成面积相等的两部分求解.

【详解】 $\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 A 、 G 、 M 共线，

$\therefore AM$ 为 $\triangle ABC$ 的中线， $AG = 2GM$ ，

$\therefore S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$ ，

在 $\triangle ABM$ 中， $AG = 2GM$ ，

$\therefore S_{\triangle AGB} = 2S_{\triangle BGM}$ ，

$\therefore S_{\triangle AGB} = 2$ ，

$$\therefore S_{\triangle BGM} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AGB} + S_{\triangle BGM} = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AMC} = 3.$$

15. 把点 $(-2, 3)$ 向下平移 5 个单位后的坐标是_____;

【答案】 $(-2, -2)$

【解析】

【分析】 根据向下平移，横坐标不变，纵坐标减去，求出结果即可.

【详解】 解：把点 $(-2, 3)$ 向下平移 5 个单位后的坐标是 $(-2, -2)$,

故答案为： $(-2, -2)$.

【点睛】 本题考查了平移与坐标与图形的变化的关系，熟记平移中点的变化规律是：横坐标右移加，左移减；纵坐标上移加，下移减是解题的关键.

16. 平面直角坐标系中，点 $A(2, 1)$ 与点 $B(-2, -2)$ 之间的距离为_____.

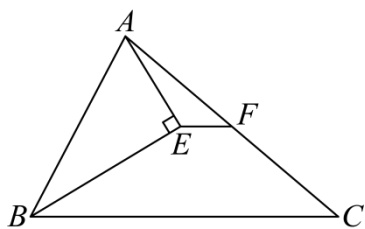
【答案】 5

【解析】

【分析】 根据两点之间的距离公式即可求解.

【详解】 解： $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5.$

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABE = \angle EBC$ ， $AE \perp BE$ ，垂足为 E ， F 是 AC 的中点， $BC = 7$ ， $AB = 4$ ，则 $EF =$ _____.

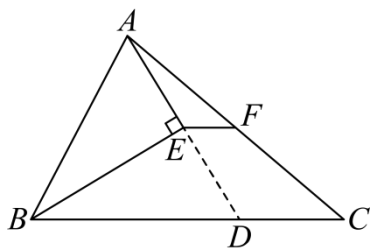


【答案】 1.5 或 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 通过作辅助线构造出等腰三角形和三角形的中位线，从而将求线段 EF 的问题转化为求线段 CD 长度的问题.

【详解】 解：如图，延长 AE 交 BC 于点 D ,



$$\because AE \perp BE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle DBE \\ BE = BE \\ \angle AEB = \angle DEB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBE (\text{ASA}),$$

$$\therefore AB = DB = 4, \quad AE = DE,$$

$\therefore$ 点 E 是 AD 的中点,

$\because$ 点 F 是 AC 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ADC$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD,$$

$$\because BC = 7,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 3,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD = 1.5.$$

18. 定义: 顶角顶点在坐标轴上的等腰三角形叫做“顶好 $\triangle$ ”, 已知: 平面直角坐标系中 $A(1,3)$ 、 $B(3,2)$,

顶好 ABC 的顶点 C 的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ 或 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

【解析】

【分析】 根据题意分情况进行讨论: 点 C 在 x 轴和点 C 在 y 轴上, 利用勾股定理设未知数列方程求解即可.

【详解】 解: 由题意知, 顶点 C 在坐标轴上, 此时分情况讨论:

①当点 C 在 x 轴上,

设顶点 C 的坐标为 $(x, 0)$,

$$\therefore CA^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2 = (x-1)^2 + 9, \quad CB^2 = (x-3)^2 + (0-2)^2 = (x-3)^2 + 4,$$

$$\because CA = CB,$$

$$\therefore CA^2 = CB^2,$$

$$\therefore (x-1)^2 + 9 = (x-3)^2 + 4,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{顶点 } C \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{4}, 0\right);$$

②当点 C 在 y 轴上,

设顶点 C 的坐标为 $(0, y)$,

$$\therefore CA^2 = (0-1)^2 + (y-3)^2 = 1 + (y-3)^2, \quad CB^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2 = 9 + (y-2)^2,$$

$$\because CA = CB,$$

$$\therefore CA^2 = CB^2,$$

$$\therefore 1 + (y-3)^2 = 9 + (y-2)^2,$$

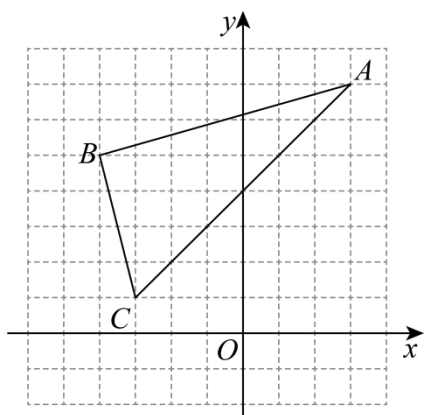
$$\text{解得 } y = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{顶点 } C \text{ 的坐标为 } \left(0, -\frac{3}{2}\right),$$

综上所述, 顶点 C 点的坐标是 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ 或 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

三、(本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

19. 在平面直角坐标系中, ABC 各顶点的坐标分别为 $A(3, 7)$ 、 $B(-4, 5)$ 、 $C(-3, 1)$;



(1) 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 $x = -1$ 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$

(2) 写出 $\triangle A_1B_1C_1$ 各个顶点的坐标: A_1 _____; B_1 _____; C_1 _____.

【答案】 (1) 见解析 (2) $(-5, 7)$; $(2, 5)$; $(1, 1)$

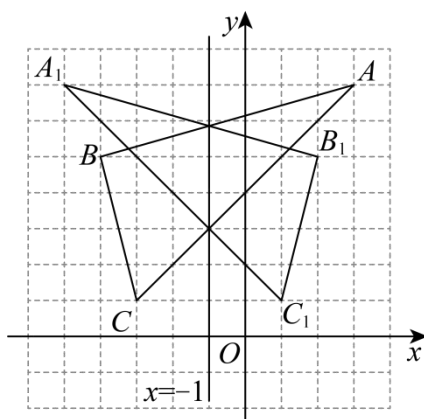
【解析】

【分析】 (1) 利用轴对称的性质描出点 A_1 、 B_1 、 C_1 ，再顺次连接即可；

(2) 根据 $\triangle A_1B_1C_1$ 各个顶点的位置，写出点 A_1 、 B_1 、 C_1 的坐标即可.

【小问 1 详解】

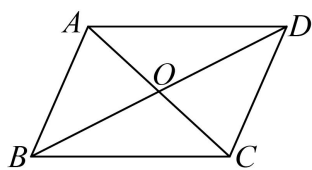
解: $\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示:



【小问 2 详解】

解: $A_1(-5, 7)$; $B_1(2, 5)$; $C_1(1, 1)$.

20. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中对角线 AC 、 BD 相交于 O , $AC + BD = 12$, $BC = 4$, 求: $\triangle AOD$ 的周长.



【答案】10

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得： $AD = BC = 4$ ， $OA + OD = \frac{1}{2}(AC + BD) = 6$ ，则 $\triangle AOD$ 的周长为 $6 + 4 = 10$ 。

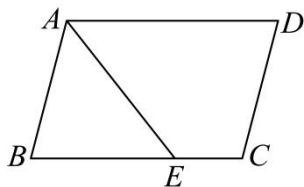
【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AO = CO = \frac{1}{2}AC, \quad BO = DO = \frac{1}{2}BD, \quad AD = BC = 4,$$

$$\therefore AO + DO = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(AC + BD) = 6,$$

$$\therefore \triangle AOD \text{ 的周长为: } AO + DO + AD = 6 + 4 = 10.$$

21. 如图，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD$ 的平分线与边 BC 相交于点 E 。



(1) 求证： $AB = BE$ ；

(2) 求证： $CE + CD = AD$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用平行四边形的性质求得 $\angle DAE = \angle BEA$ ，利用角平分线的定义求得 $\angle DAE = \angle BAE$ ，据此计算即可得到 $AB = BE$ ；

(2) 利用平行四边形的性质即可证明结论成立。

【小问1详解】

证明： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BEA,$$

$\because AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线，

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE,$$

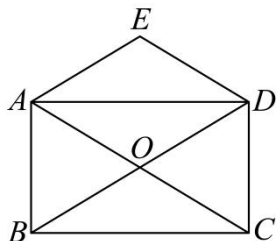
$$\therefore AB = BE;$$

【小问2详解】

证明： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\begin{aligned}\therefore AB &= CD, \quad AD = BC, \\ \therefore AB &= BE, \\ \therefore BE &= CD, \\ \therefore CE + CD &= CE + BE = BC = AD.\end{aligned}$$

22. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , $DE \parallel CA$, $AE \parallel BD$. 求证: 四边形 $AODE$ 是菱形.



【答案】见解析

【解析】

【分析】先根据 $DE \parallel CA$, $AE \parallel BD$, 得出四边形 $AODE$ 是平行四边形, 再根据矩形的性质证明 $AO = OD$, 即可证明四边形 $AODE$ 是菱形.

【详解】证明: $\because DE \parallel CA$, $AE \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $AODE$ 是平行四边形,

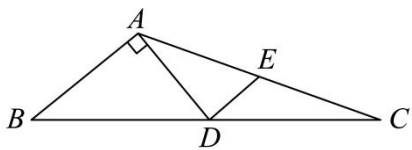
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AC = BD, \quad AO = \frac{1}{2}AC, \quad OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore AO = OD,$$

$\therefore$ 四边形 $AODE$ 是菱形.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 BC 、 AC 的中点, $AD \perp AB$, 垂足为 A , $AC = 10$, $AD = 4$.



(1) 求证: $\angle ADE = 90^\circ$;

(2) 求 AB 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $AB = 6$.

【解析】

【分析】(1) 证明 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 即可求得 $\angle ADE = \angle BAD = 90^\circ$;

(2) 利用勾股定理求得 $DE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, 再利用三角形中位线定理求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because D、E$ 分别是 $BC、AC$ 的中点,

$\therefore DE$ 是 ABC 的中位线,

$\therefore DE \parallel AB$,

$\because AD \perp AB$,

$\therefore \angle ADE = \angle BAD = 90^\circ$;

【小问 2 详解】

解: $\because AC = 10$, E 是 AC 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = 5,$$

$\because \angle ADE = 90^\circ$, $AD = 4$,

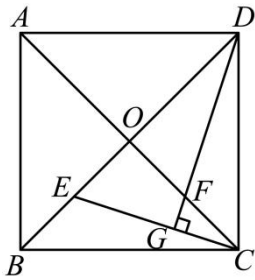
$$\therefore DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$\because DE$ 是 ABC 的中位线,

$\therefore AB = 2DE = 6$.

四、(本题共 3 题, 满分 28 分)

24. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC、BD$ 交于点 O , E 是 OB 上一点, $DG \perp CE$, 垂足为 G . DG 与 OC 相交于点 F .



(1) 求证: $\angle ODF = \angle GCF$;

(2) 求证: $CE = DF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用等角的余角相等即可证明 $\angle ODF = \angle GCF$;

(2) 利用 ASA 证明 $\triangle ODF \cong \triangle OCE$ 即可得到 $CE = DF$.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC、BD$ 交于点 O ,

$$\therefore \angle DOF = 90^\circ,$$

$$\therefore DG \perp CE,$$

$$\therefore \angle FGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFO = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle ODF = 90^\circ - \angle DFO = 90^\circ - \angle CFG = \angle GCF;$$

【小问2详解】

证明： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$$\therefore OD = OC,$$

$$\therefore \angle ODF = \angle GCF, \text{ 即 } \angle ODF = \angle OCE,$$

$$\therefore \angle DOF = \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ODF \cong \triangle OCE (\text{ASA}),$$

$$\therefore CE = DF.$$

25. 小海在探究平面直角坐标系中线段长的时候发现, 如果已知两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则线段 AB 的

中点 M 的坐标可以是 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. 例如已知 $P(2, 3)$, $Q(4, 5)$, 则线段 PQ 的中点坐标是

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right), \text{ 即中点坐标是 } (3, 4).$$

(1) 已知两点 $A(0, 6)$, $B(4, 0)$, 那么线段 AB 中点 M 的坐标是_____.

(2) 据此, 他进一步探究: 已知平面直角坐标系中三个点的坐标, 可以找出第四个点和已知三个点构成平行四边形. 例如: 已知 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(4, 3)$, 如果以 A 、 B 、 C 、 D 四点为顶点可以构成平行四边形, 就可以求出 D 的坐标.

小海的求法:

设 $D(x, y)$

如果以 AB 、 CD 为对角线, 则 AB 的中点与 CD 的中点重合.

$$\text{即 } \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \text{ 与 } \left(\frac{4+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) \text{ 重合}$$

$$\text{得 } \frac{4+x}{2} = 2 \quad \frac{3+y}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{解得 } x = 0, y = 0,$$

$$\therefore D(0,0)$$

写出小海的求法是依据了平行四边形的判定定理：_____.

(3) 乐乐觉得用这种方法做，应该还有其他位置的 D 点，请用此方法求出其他位置 D 点的坐标

【答案】 (1) $(2,3)$

(2) 对角线互相平分的四边形是平行四边形

(3) $(2,4)$ 或 $(6,2)$

【解析】

【分析】 (1) 直接利用题干给出的中点坐标公式计算即可得到结果；

(2) 根据小海利用平行四边形对角线中点重合的性质，对应平行四边形的判定定理即可得出结论；

(3) 分两种情况讨论，分别以 AC 、 BD 为对角线和 BC 、 AD 为对角线，通过构造第四个点 D ，利用平行四边形对角线中点重合的性质列方程求解，即可得到其余 D 点的坐标.

【小问 1 详解】

解：由题意知， AB 中点 M 的坐标是 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$,

即中点坐标是 $(2,3)$.

【小问 2 详解】

解：小海的方法中，说明两条对角线的中点重合，即对角线互相平分，依据的平行四边形判定定理为：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

【小问 3 详解】

解：设 $D(x, y)$,

此时分两种情况讨论：

①以 AC ， BD 为对角线，

$\therefore AC$ 的中点坐标为 $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$ ，即 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ， BD 的中点为 $\left(\frac{3+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)$ ，

由中点重合可得： $\frac{3+x}{2} = \frac{5}{2}$ ， $\frac{1+y}{2} = \frac{5}{2}$ ，

解得 $x=2$ ， $y=4$ ，

此时 $D(2,4)$ ；

②以 BC ， AD 为对角线，

$\therefore BC$ 的中点坐标为 $\left(\frac{3+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 即 $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$, AD 的中点为 $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$,

由中点重合可得: $\frac{1+x}{2} = \frac{7}{2}$, $\frac{2+y}{2} = 2$,

解得 $x = 6$, $y = 2$,

此时 $D(6, 2)$,

综上所述, 其他位置 D 点的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(6, 2)$.

26. 综合与实践【问题情境】

我们熟知的世界名画《蒙娜丽莎的微笑》, 其构图呈现出了非常协调、匀称的矩形美. 通过测量, 我们发现

这种矩形的宽和长之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (值约为 0.618). 这就是“黄金矩形”. 世界上许多著名的建筑, 为取得

最佳的视觉效果, 都不约而同地采用了“黄金矩形”的设计.



为了进一步了解“黄金矩形”, 在综合实践活动课上, 同学们以“矩形的折叠”为主题开展数学活动.

【操作探究】: 利用矩形纸带, 折出“黄金矩形”.

步骤 1: 在一张矩形纸带的一端, 利用图 1 的方法折出一个正方形 $MNAB$, 然后把纸带展平;

步骤 2: 如图 2, 把这个正方形 $MNAB$ 对折成两个全等的矩形, 再把纸带展平;

步骤 3: 如图 3, 折出内侧矩形对角线的折痕 CB , 并把折痕 CB 折到纸带下沿 CD 处;

步骤 4: 如图 4, 展平纸带, 按照所得的点 D 折出 $DE \perp AD$, 折出矩形 $BADE$

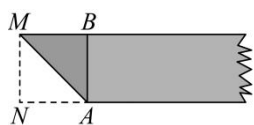


图1

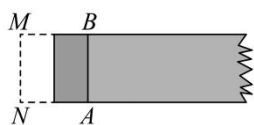


图2

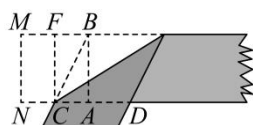


图3

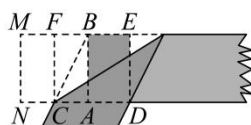


图4

【分析探究】

(1) 图 4 中如果 $MN = 2$, 则 $BC =$ _____; $AD =$ _____.

(2) 求证: 矩形 $ABED$ 是“黄金矩形”.

【学以致用】

(3) 将一张正方形纸片 $ABCD$ ，先按下列操作画出示意图，再按要求解决问题.

①折叠正方形 $ABCD$ ，使点 A 与点 B 重合，点 D 与点 C 重合，折痕交边 AB 于点 M ，交边 CD 于点 N ；

②过点 B 折叠正方形 $ABCD$ ，使点 A 落在 BN 上的点 F 处，折痕交边 AD 于点 E ，连接 EF ；

③过点 E 作边 BC 的垂线，垂足为 H ，矩形 $ABHE$ 是“黄金分割”矩形吗？请证明你的结论.

【答案】(1) $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5}-1$

(2) 证明见详解 (3) 矩形 $ABHE$ 是“黄金分割”矩形，作图和证明见详解

【解析】

【分析】(1) 利用矩形的性质，正方形的性质及勾股定理得出 BC 的长度，再由翻折的性质结合线段和差关系即可求得 AD 的长度；

(2) 设 $MN = x$ ，利用正方形的性质，矩形的性质及勾股定理得出 $BC = CD$ 的表达式，从而得出矩形 $ABED$ 相邻两边的比值，进而证得矩形 $ABED$ 是“黄金矩形”；

(3) 根据题意作出对应的图形，延长 CD ， BE 交于点 Q ，设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ，利用矩形的性质，翻折的性质，勾股定理和等腰三角形的性质得出相关线段的表达式，进而求得 $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，从而证得矩形 $ABHE$ 是“黄金分割”矩形.

【小问 1 详解】

解：在正方形 $MNAB$ 中， $MN = NA = AB = MB = 2$ ，

$\therefore$ 正方形 $MNAB$ 对折成两个全等的矩形得矩形 $MNCF$ 和 $FCAB$ ，

$$\therefore MF = FB = NC = CA = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}NA = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle CAB$ 中， $BC = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{5}$ ，

由折叠可知， $BC = CD = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore AD = CD - CA = \sqrt{5} - 1.$$

【小问 2 详解】

证明：设 $MN = x$ ，

根据题意可得， $AB = AN = MN = x$ ， $BC = CD$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle CAB$ 中， $BC = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{5}}{2}x,$$

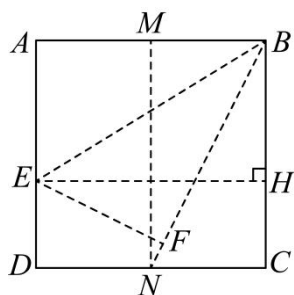
$$\therefore AD = CD - AC = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x,$$

$$\therefore \frac{AD}{BA} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\therefore$ 矩形 $ABED$ 是“黄金矩形”.

【小问 3 详解】

解：如图所示为所求：



矩形 $ABHE$ 是“黄金分割”矩形，

证明：设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 2a,$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 对折成两个全等的矩形得矩形 $ADNM$ 和 $MNCB$ ，

$$\therefore AM = BM = DN = NC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC = a,$$

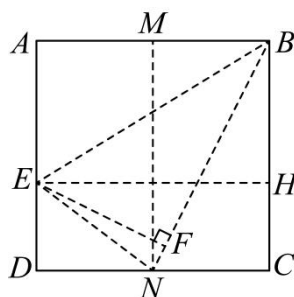
$$\text{在 Rt}\triangle BCN \text{ 中, } BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$\therefore \triangle ABE$ 沿 BE 翻折得 $\triangle FBE$ ，

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE (\text{SSS}),$$

$$\therefore AB = BF = 2a, \quad AE = EF, \quad \angle A = \angle EFB = 90^\circ, \quad \angle ABE = \angle FBE,$$

如图，连接 EN ，



$$\therefore FN = BN - BF = (\sqrt{5} - 2)a ,$$

$$\text{设 } AE = EF = b , \text{ 则 } DE = AD - AE = 2a - b ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFN \text{ 中, } EN^2 = EF^2 + FN^2 ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEN \text{ 中, } EN^2 = DE^2 + DN^2 ,$$

$$\therefore EF^2 + FN^2 = DE^2 + DN^2 , \text{ 即 } b^2 + [(\sqrt{5} - 2)a]^2 = (2a - b)^2 + a^2 ,$$

$$\therefore b = (\sqrt{5} - 1)a , \text{ 即 } AE = EF = (\sqrt{5} - 1)a ,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{b}{2a} = \frac{(\sqrt{5} - 1)a}{2a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ,$$

$\therefore$ 矩形 $ABHE$ 是 “黄金分割” 矩形.