

2025 学年第二学期期中学情诊断试卷

(初二年级数学学科)

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 平行四边形 C. 菱形 D. 正五边形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据轴对称图形 (沿某条直线对折后两部分完全重合) 和中心对称图形 (绕某点旋转 180° 后与原图形重合) 的定义, 对每个选项进行判断.

【详解】 解: A、等边三角形是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 此选项不符合题意;

B、平行四边形是中心对称图形, 但不是轴对称图形, 此选项不符合题意;

C、菱形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 此选项符合题意;

D、正五边形是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 此选项不符合题意.

故选: C.

2. 在平面直角坐标系中, 点 $P(m^2+1, 2)$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 A

【解析】

【分析】 先判断点 P 横纵坐标的正负, 再根据象限特征判断位置即可.

【详解】 解: $\because$ 对于任意实数 m , 都有 $m^2 \geq 0$,

$$\therefore m^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

又 $\because$ 点 P 的纵坐标 $2 > 0$, 第一象限内点的横纵坐标均为正数,

$\therefore$ 点 $P(m^2+1, 2)$ 在第一象限.

3. 四边形的不稳定性在实际生活中有着广泛的应用, 即四边形的边长一定时, 可以发生改变的是 ()

- A. 内角和 B. 内角大小 C. 周长 D. 外角和

【答案】 B

【解析】

【分析】结合四边形的不稳定性，四边形的外角和为 360° 度，周长即为四边形的边长之和，进行逐项分析，即可作答.

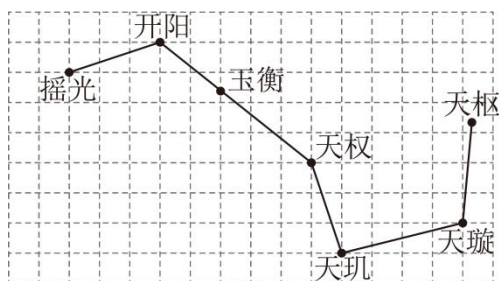
【详解】解：A、四边形内角和恒为 $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$ ，故该选项不符合题意；

B、内角大小可以发生改变，故该选项符合题意；

C、周长为四条边长之和，当四边形的边长一定时，四边形的周长固定，不会改变，故该选项不符合题意；

D、任意多边形外角和恒为 360° ，故四边形外角和不会改变，故该选项不符合题意.

4. 北斗七星是大熊座的一部分，古代人们把这七颗星命名为天枢、天璇、天玑、天权、玉衡、开阳、摇光. 因为将这七星相连所成的形状类似古代舀酒的斗，故名北斗. 爱好天文的小明将自己观察到的北斗七星画在如图所示的方格纸上，建立适当的平面直角坐标系后，表示“摇光”的点的坐标为 $(-4, 2)$ ，表示“开阳”的点的坐标为 $(-1, 3)$ ，则表示“天权”的点（正好在网格点上）的坐标为（ ）



A. $(1, -2)$

B. $(6, -1)$

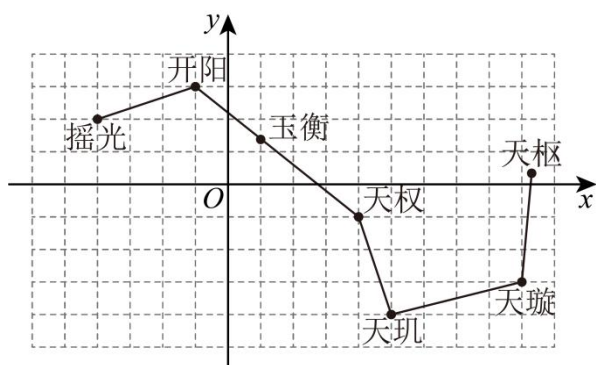
C. $(4, -1)$

D. $(7, 0)$

【答案】C

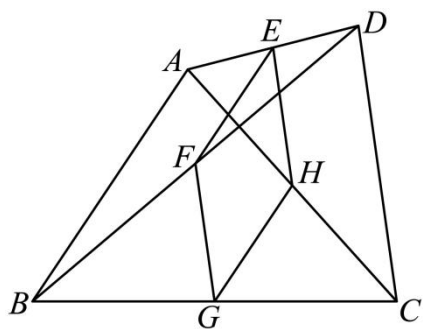
【解析】

【详解】解：平面直角坐标系如图，



∴表示“天权”的点（正好在网格点上）的坐标为 $(4, -1)$.

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分别是线段 AD 、 BD 、 BC 、 AC 的中点，要使四边形 $EFGH$ 是菱形，需要加的条件是（ ）



- A. $AC = BD$ B. $AC \perp BD$ C. $AB = CD$ D. $AB \perp CD$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理可得 $EF = GH = \frac{1}{2}AB$, $EH = FG = \frac{1}{2}CD$, 再由菱形的判定, 即可求解.

【详解】解: $\because E, F, G, H$ 分别是线段 AD, BD, BC, AC 的中点,

$$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}AB, \quad EH = FG = \frac{1}{2}CD,$$

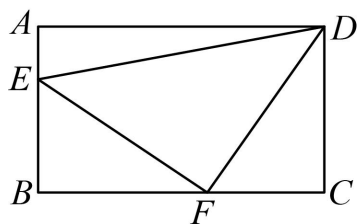
$\therefore$ 当 $EF = FG = GH = EH$ 时, 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$\therefore$ 当 $AB = CD$ 时, 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了三角形中位线定理, 菱形的判定, 熟练掌握三角形中位线定理, 菱形的判定定理是解题的关键.

6. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB < BC$, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, 连接 DE, DF, EF . $AB = a$, $BE = CF = b$, $DE = c$, $\angle BEF = \angle DFC$;



以下两个结论: ()

① $a + b > \frac{\sqrt{2}}{2}c$ ② $(a+b)^2 + (a-b)^2 = c^2$

- A. ①②都正确 B. ①②都错误
C. ①正确, ②错误 D. ①错误, ②正确

【答案】A

【解析】

【分析】先证明 $\triangle BEF \cong \triangle CFD$ (ASA), 则 $\angle BFE = \angle CDF, EF = DF$, 再证明 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形, 则 $EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} c$, 进一步得到 $a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$, 则 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$, 利用完全平方公式

进行计算即可证明②正确, 由 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$ 得到 $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, 根据

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$ 即可证明①正确.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AB = CD = a$$

$$\therefore BE = CF = b, \angle BEF = \angle DFC$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CFD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \angle BFE = \angle CDF, EF = DF,$$

$$\therefore \angle BFE + \angle CFD = \angle CDF + \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} c,$$

$$\therefore CD = BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2},$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2 \times \frac{1}{2}c^2 = c^2, \text{ 故②正确;}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2,$$

$$\therefore a+b > \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\therefore a+b > \frac{\sqrt{2}}{2}c, \text{ 故①正确,}$$

故①②都正确.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 如果从多边形的一个顶点出发的对角线有 5 条, 那么它的边数是_____

【答案】

8

【解析】

【分析】从 n 边形的一个顶点出发, 可以引 $(n-3)$ 条对角线, 根据题目条件列方程求解边数.

【详解】解: 设多边形的边数为 n .

$\therefore$ 从 n 边形的一个顶点出发的对角线条数为 $n-3$,

$$\therefore n-3=5,$$

解得 $n=8$.

8. 在平面直角坐标系中, 点 $(3, -1)$ 到原点的距离为_____.

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理, 根据原点坐标为 $(0, 0)$, 以及点 $(3, -1)$, 结合勾股定理列式, 即可作答.

【详解】解: $\because$ 原点坐标为 $(0, 0)$, 点 $(3, -1)$,

$$\therefore \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 点 $(3, -1)$ 到原点的距离为 $\sqrt{10}$,

故答案为: $\sqrt{10}$.

9. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 60^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数是_____

【答案】

60°

【解析】

【分析】根据平行四边形对边平行的性质，可得邻角互补，即 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，结合已知 $\angle A - \angle B = 60^\circ$ ，联立方程即可求解 $\angle B$ 的度数.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{由题意得 } \angle A - \angle B = 60^\circ,$$

$$\text{联立得 } \begin{cases} \angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle A - \angle B = 60^\circ \end{cases},$$

$$\text{两式相减得 } 2\angle B = 120^\circ,$$

$$\text{解得 } \angle B = 60^\circ$$

10. 若点 $A(3-x, x-5)$ 在平面直角坐标系的第二象限内，则 x 的取值范围是_____

【答案】 $x > 5$

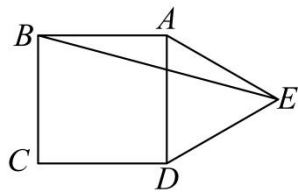
【解析】

【详解】 $\because$ 点 $A(3-x, x-5)$ 在第二象限，

$$\begin{cases} 3-x < 0 \\ x-5 > 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{解得: } x > 5.$$

11. 如图，以正方形 $ABCD$ 的边 AD 为一边向外作等边三角形 ADE ，则 $\angle AEB$ 的大小为_____.



【答案】 15° ## 15 度

【解析】

【分析】根据正方形的性质和等边三角形的性质，可以得到 $\angle BAE$ 的度数，再根据等腰三角形的性质，可以得到 $\angle ABE$ 的度数即可得到解答.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， ADE 是等边三角形，

$$\therefore AB = AD = AE, \quad \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB, \quad \angle BAE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAE) = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ,$$

12. 在平面直角坐标系中, 已知点 $P(a-1, 5)$ 和点 $Q(2, b-1)$ 为关于 x 轴对称, 则 $(a+b)^{2025} =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据题意得: $a-1=2$, $b-1=-5$, 求解即可得出答案.

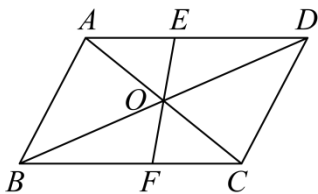
【详解】 解: 根据题意得: $a-1=2$, $b-1=-5$,

解得: $a=3$, $b=-4$,

$$\therefore a+b = 3 + (-4) = -1,$$

$$\therefore (a+b)^{2025} = (-1)^{2025} = -1.$$

13. 如图, EF 过平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点 O , 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 若平行四边形 $ABCD$ 的周长是 32, $OE=3$, 则四边形 $ABFE$ 的周长为 _____



【答案】 22

【解析】

【分析】 先由 ASA 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 得 $OE=OF$, $AE=CF$, 再求得 $AB+BC=16$, 由四边形 $ABFE$ 的周长 $= AB+AE+BF+EF = AB+BF+CF+2OE$, 即可求得答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 对角线的交点为 O ,

$$\therefore AB=CD, AD=BC, OA=OC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle FCO,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (ASA),$$

$$\therefore OE = OF, AE = CF,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 32,

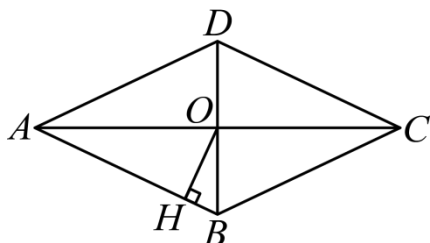
$$\therefore AB + BC = \frac{1}{2} \times 32 = 16,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABFE \text{ 的周长} = AB + AE + BF + EF$$

$$= AB + BF + CF + 2OE$$

$$= AB + BC + 2 \times 3 = 16 + 6 = 22$$

14. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 且 $AC = 16$, $BD = 12$, 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为 H , 则点 O 到边 AB 的距离 $OH =$ _____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】由菱形的性质得 $BO = \frac{1}{2}BD = 6$, $AO = \frac{1}{2}AC = 8$, $AC \perp BD$, 再由勾股定理得 $AB = 10$, 然后由三角形面积求解即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 16$, $BD = 12$,

$$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = 6, AO = \frac{1}{2}AC = 8, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

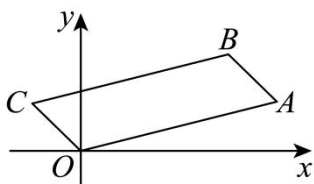
$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$\because OH \perp AB,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}AB \cdot OH,$$

$$\therefore OH = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5}.$$

15. 如图, 四边形 $OABC$ 是平行四边形, 点 A , C 的坐标分别为 $(4,1)$, $(-1,1)$, 则点 B 的坐标为_____.



【答案】 $(3,2)$

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得 $AB \parallel OC$, $AB = OC$, 先求得 O 到 C 的平移方式, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

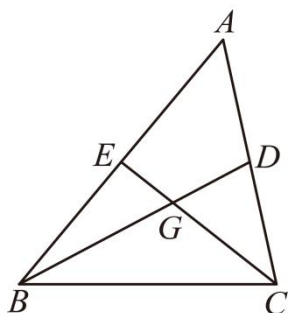
$$\therefore AB \parallel OC, AB = OC,$$

$\because$ 点 A, C 的坐标分别为 $(4,1), (-1,1)$,

$\therefore$ 将 O 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 C ,

$\therefore$ 将 A 向左平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 B , 即 $(3,2)$.

16. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 四边形 $AEGD$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比值是_____.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

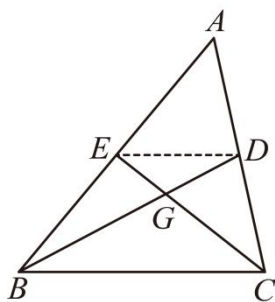
【分析】本题主要考查了三角形的重心, 相似三角形的判定和性质, 三角形中位线定理, 熟练掌握三角形的重心, 相似三角形的判定和性质, 三角形中位线定理是解题的关键. 连接 DE , 根据三角形中位线定理

以及中线的性质可得 $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$, 从而得到

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 进而得到 $\frac{DG}{BD} = \frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}, \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 继而得到 $S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDE}$,

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$, 可得 $S_{\triangle DEG} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$, 再由 $S_{\text{四边形}AEGD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEG}$, 即可.

【详解】解: 如图, 连接 DE ,



∵点 G 是 ABC 的重心,

∴点 D, E 分别为 AC, AB 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB, \frac{DG}{BG} = \frac{EG}{CG} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}, \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDE}, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABD},$$

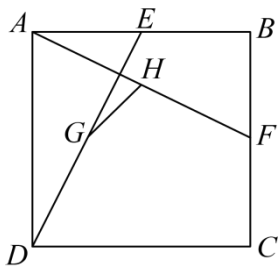
$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEGD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEG} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} + \frac{1}{12}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

即四边形 $AEGD$ 与 ABC 面积的比值是 $\frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

17. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, E, F 分别为边 AB, BC 的中点, 连接 AF, DE , 点 G, H 分别为 DE, AF 的中点, 连接 GH , 则 GH 的长为_____

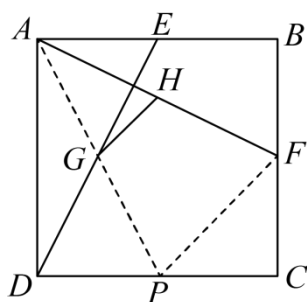


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】连接 AG 并延长 AG 交 CD 于点 P , 连接 PF , 由正方形的性质, 即可证得 $\triangle EAG \cong \triangle DPG$ (ASA), 可得 $AG = PG$, $DP = AE = 2$, 再由勾股定理可求得 PF 的长, 根据三角形中位线定理即可求解.

【详解】解: 连接 AG 并延长 AG 交 CD 于点 P , 连接 PF , 如图所示,



∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $CD = BC = AB = 4$, $\angle C = 90^\circ$, $AB \parallel CD$,

∴ $\angle AEG = \angle GDP$,

∵ E 、 F 分别为边 AB , BC 的中点,

∴ $AE = \frac{1}{2}AB = 2$, $CF = \frac{1}{2}BC = 2$.

∵ G 为 DE 的中点,

∴ $EG = DG$,

在 $\triangle EAG$ 和 $\triangle DPG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle GDP \\ EG = DG \\ \angle AGE = \angle PGD \end{cases},$$

∴ $\triangle EAG \cong \triangle DPG$ (ASA).

∴ $AG = PG$, $DP = AE = 2$.

∴ G 为 AP 的中点,

∵ H 为 AF 的中点,

∴ GH 是 $\triangle APF$ 的中位线.

∴ $GH = \frac{1}{2}PF$.

在 $\text{Rt}\triangle FCP$ 中,

$CP = DC - DP = 4 - 2 = 2$,

∴ $PF = \sqrt{PC^2 + FC^2} = 2\sqrt{2}$.

∴ $GH = \frac{1}{2}PF = \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定及性质, 勾股定理, 三角形中位线定理, 正确作出

辅助线是解决本题的关键.

18. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, 以 AD 为半径的圆 A 和以 CD 为半径的圆 C 相交于点 D 、 E , 如果点 E 到直线 BC 的距离不超过 3, 设 AD 的长度为 m , 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$

【解析】

【分析】如图, 当 E 在 AB 的左侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R , 作 $ES \perp AB$ 于 S , 如图, 当 E 在 AB 的右侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 交 AD 于 Q , 再分别求解 m 的值, 从而可得答案.

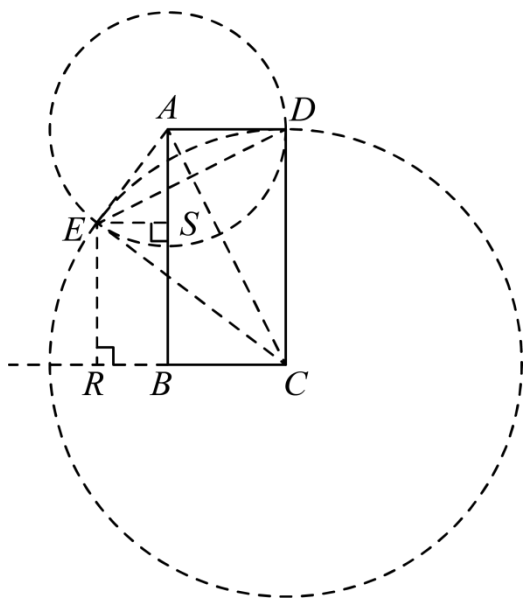
【详解】解: 如图, 当 E 在 AB 的左侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R , 作 $ES \perp AB$ 于 S ,

$\because$ 矩形 $ABCD$, $AB = 5$, $AD = m$,

$\therefore$ 四边形 $ERBS$ 为矩形, $AD = CB = m$, $AB = CD = 5$,

$\therefore ES = BR$, $ER = BS = 3$,

$\therefore AS = 5 - 3 = 2$,



$\because A, C$ 为圆心,

$\therefore AC$ 是 DE 的垂直平分线,

$\therefore AD = AE = m$, $CD = CE = 5$,

$\because ER = 3$,

$\therefore CR = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore ES = BR = 4 - m$,

在 $\text{Rt}\triangle AES$ 中, $m^2 = (4-m)^2 + 2^2$,

解得: $m = \frac{5}{2}$;

如图, 当 E 在 AB 的右侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 交 AD 于 Q ,

$\because$ 矩形 $ABCD$, $AB = 5$, $AD = m$,

$\therefore AD = CB = m$, $AB = CD = 5$, 四边形 $CDQH$ 为矩形,

$\therefore QH = CD = 5$,

同理可得:

$AD = AE = m$, $CD = CE = 5$,

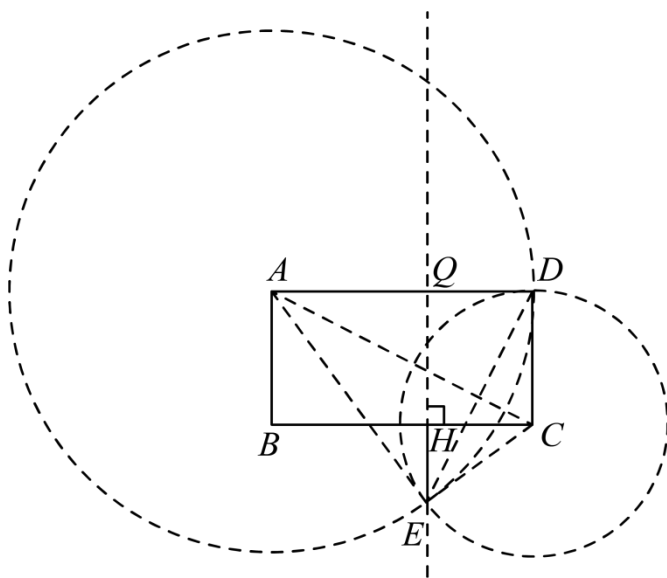
$\therefore EH = 3$,

$\therefore QD = CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = 4$,

$\therefore AQ = m - 4$,

$\therefore EQ = 5 + 3 = 8$

在 $\text{Rt}\triangle AEQ$ 中, $m^2 = (m-4)^2 + 8^2$,



$\therefore m = 10$,

综上: 点 E 到直线 BC 的距离不超过 3, 则 $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$;

故答案为: $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$

【点睛】 本题考查的是矩形的判定与性质, 勾股定理的应用, 两圆的位置关系, 线段的垂直平分线的性质, 确定临界点是解本题的关键.

三、简答题（本大题共 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

19. 一个多边形的内角和是 1080° .

(1) 求该多边形的边数.

(2) 若该多边形每个内角都相等，求每一个外角的度数.

【答案】(1) 8 (2) 45°

【解析】

【分析】本题考查了多边形内角与外角，解题的关键是掌握多边形内角和与外角和公式.

(1) 设该多边形的边数为 n ，根据多边形的内角和与外角和可得方程，解之即可；

(2) 利用 (1) 的结论，可得该多边形是正七边形，然后利用任意多边形的外角和是 360° 进行计算即可解答.

【小问 1 详解】

解：设该多边形的边数为 n ，

由题意可得： $(n-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ ，

解得： $n = 8$ ，

$\therefore$ 该多边形的边数为 8；

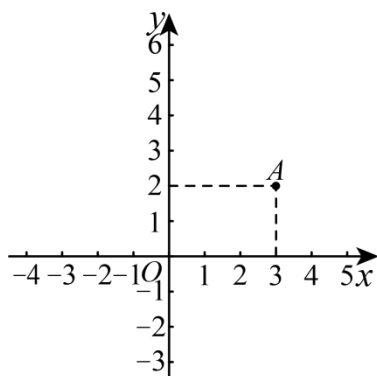
【小问 2 详解】

$\because$ 该多边形每个内角都相等，

$\therefore$ 该多边形每个外角都相等，

$\therefore$ 每一个外角的度数 $= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

20. 如图，在平面直角坐标系内，有一点 A ，将点 A 先向左平移 3 个单位，再向下平移 4 个单位得到点 B .



(1) 写出点 A ，点 B 的坐标；

(2) 如果点 C 在 y 轴上，且 $\angle ABC = \angle ACB$ ，求点 C 的坐标.

【答案】(1) 点 A 的坐标为 $(3, 2)$ ；点 B 的坐标为 $(0, -2)$

(2) 点 C 的坐标为 $(0, 6)$

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系中点的平移与等腰三角形的性质，解题的关键是利用点的平移规律求出点 B 的坐标，再结合等腰三角形“等角对等边”的性质列方程求解点 C 的坐标.

(1) 先从坐标系中读出点 A 的坐标，再根据平移规律“左减右加横坐标，上加下减纵坐标”求出点 B 的坐标；

(2) 根据 $\angle ABC = \angle ACB$ ，得 $AB = AC$ ，设点 C 的坐标为 $(0, y)$ ，利用两点间距离公式列方程求解.

【小问 1 详解】

解： 由图可知，点 A 的坐标为 $(3, 2)$ ，

根据平移规律，点 A 向左平移 3 个单位，再向下平移 4 个单位得到点 B ，

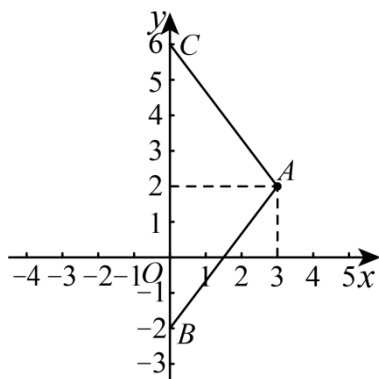
则点 B 的横坐标为： $3 - 3 = 0$ ，

纵坐标为： $2 - 4 = -2$ ，

故点 B 的坐标为 $(0, -2)$ 。

【小问 2 详解】

解： 设点 C 的坐标为 $(0, y)$ ，



$\because \angle ABC = \angle ACB$ ，

$\therefore AB = AC$

由两点间距离公式，

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5，$$

$$AC = \sqrt{(3-0)^2 + (2-y)^2}，$$

$$\therefore \sqrt{(3-0)^2 + (2-y)^2} = 5，$$

两边平方得: $9 + (2 - y)^2 = 25$,

$$(2 - y)^2 = 16,$$

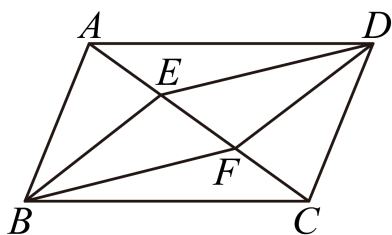
$$2 - y = \pm 4,$$

当 $2 - y = 4$ 时, $y = -2$ (与点 B 重合, 舍去);

当 $2 - y = -4$ 时, $y = 6$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 6)$.

21. 如图, 已知: 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AF = CE$. 求证: 四边形 $BFDE$ 是一个平行四边形.



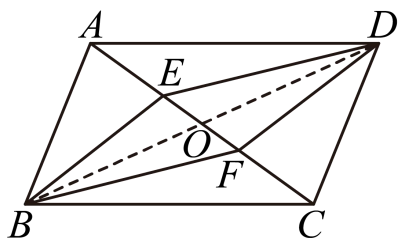
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质的综合应用, 解题的关键是利用平行四边形的性质结合已知条件, 通过对角线互相平分来判定四边形为平行四边形.

先利用平行四边形 $ABCD$ 的性质, 得到对角线互相平分, 即 $OA = OC$, $OB = OD$; 再结合已知 $AF = CE$, 推出 $OE = OF$; 最后根据对角线互相平分的四边形是平行四边形, 证明四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

【详解】证明: 连接 BD 与 AC 交于点 O .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA = OC$, $OB = OD$ (平行四边形的对角线互相平分).

$\because AF = CE$,

$\therefore AF - OA = CE - OC$,

即 $OE = OF$.

又 $\because OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形).

22. 综合与实践: 恺撒密码

恺撒密码是世界上最古老的加密技术之一, 采用位移加密方法: 明文中的所有字母都按照一个固定数值在字母表上向后 (或向前) 进行移位后形成密文. 例如, 向前移动 3 位 (密钥 $k = 3$) 的恺撒密码, 如图 1 所示: 为方便使用恺撒密码进行加密和解密, 可以使用密码盘如图 2 所示.

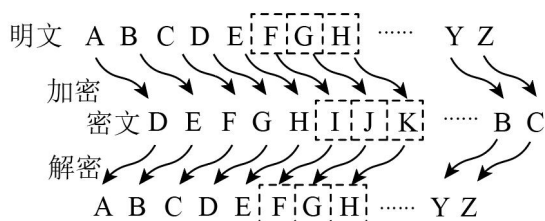


图1

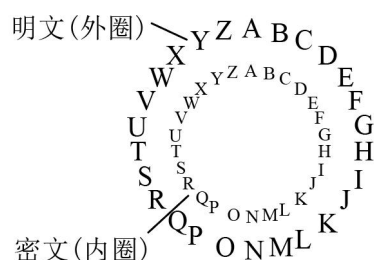


图2

(1) “解密”: 已知密钥 $k = 3$, 密文 *uhdgb* 所对应的明文是_____.

(2) “加密”: 已知密钥 $k = 8$, 明文 *enjoy* 所对应的密文是_____.

(3) “猜猜我是谁”:

信息一: “我的身份经过了双重加密, 密文为 “*rdykqrahw*”, 左起奇数位密钥为 a , 偶数位密钥为 b .”

信息二: 密钥隐于坐标: 已知点 $P(a, b)$ 位于第一象限, 到 x 轴距离为 3, 到 y 轴的距离为 5.

根据以上信息, 点 P 的坐标为_____, 我的身份对应的明文是_____

【答案】(1)

ready

(2)

mvrwg

(3)

$(5, 3)$, *mathlover*

【解析】

【分析】(1) 因为“解密”, 已知密钥 $k = 3$, 所以密文中每个字母对应的明文应是它向前移动 3 位对应的字母, 把对应字母连起来写, 可得: 密文 *uhdgb* 对应的明文是 *ready*;

(2) “加密”, 已知密钥 $k = 8$, 则明文每个字母对应的密文是它向后移动 8 位对应的字母, 把对应字

母连起来写，可得：明文 *enjoy* 所对应的密文是 *mvrwg*；

(3) 根据到 x 轴的距离是纵坐标，到 y 轴的距离是横坐标，可得点 P 的坐标，根据左起奇数位密钥为 a ，偶数位密钥为 b ，可知，奇数位上的字母对应的明文是它向前移动 5 位对应的字母，偶数位上的字母是它向前移动 3 位对应的字母，找出每个密文字母相对应的明文字母即可得到明文。

【小问 1 详解】

解：“解密”，已知密钥 $k=3$ ，

则密文中每个字母对应的明文是它向前移动 3 位对应的字母，

如下图所示，

D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

密文 *uhdgb* 中， u 对应 r ， h 对应 e ， d 对应 a ， g 对应 d ， b 对应 y ，

$\therefore$ 密文 *uhdgb* 对应的明文是 *ready*；

【小问 2 详解】

解：“加密”，已知密钥 $k=8$ ，

则明文中每个字母对应的密文是它向后移动 8 位对应的字母，

如下图所示，

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H

$\therefore$ 明文 *enjoy* 中， e 对应 m ， n 对应 v ， j 对应 r ， o 对应 w ， y 对应 g ，

$\therefore$ 明文 *enjoy* 所对应的密文是 *mvrwg*；

【小问 3 详解】

解： $\because$ 点 $P(a, b)$ 位于第一象限，到 x 轴距离为 3，到 y 轴的距离为 5，

$\therefore a=5$ ， $b=3$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5, 3)$ ；

$\therefore$ 左起奇数位密钥为 a ，偶数位密钥为 b ，

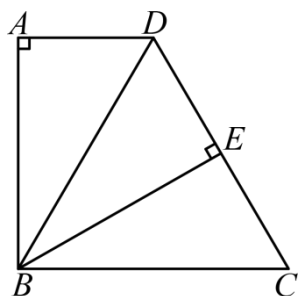
$\therefore$ 左起奇数位上的字母对应的明文字母是它向前移动 5 位对应的字母，左起偶数位上的字母对应的明文字母是它前移动 3 位对应的字母，

$\therefore$ 密文 “*rdykqrahw*” 中， r 对应 m ， d 对应 a ， y 对应 t ， k 对应 h ， q 对应 l ， r 对应 o ， a 对应 v ， h 对应 e ， w 对应 r ，

∴ 密文 “rdykqrahw” 对应的明文是 *mathlover* .

四、解答题 (本大题共 4 题, 23-24 每题 7 分, 25 题 8 分, 26 题 10 分, 满分 32 分)

23. 已知: 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折, 点 A 恰好落在腰 CD 上的点 E 处.



(1) 如图, 当点 E 是腰 CD 的中点时, 求证: $\triangle BCD$ 是等边三角形;

(2) 延长 BE 交线段 AD 的延长线于点 F , 连接 CF , 如果 $CE = DF$, 请画出符合题意的图形, 并证明: 四边形 $ABCF$ 是矩形.

【答案】 (1) 证明见解析 (2) 画图与证明见解析

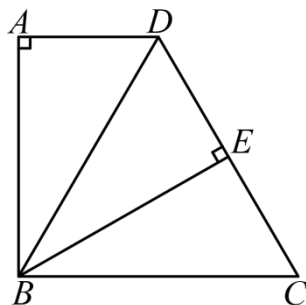
【解析】

【分析】 (1) 利用翻折性质得 $BE \perp CD$, 结合 E 为 CD 中点证 $BD = BC$, 再由角度关系推 $\angle CBD = 60^\circ$, 证 $\triangle BCD$ 为等边三角形;

(2) 过 D 作梯形的高 $DH \perp BC$, 证 $\triangle BCE \cong \triangle DCH$ 得 $BC = DC$ 、 $CE = CH$, 结合 $CE = DF$ 与 $AD = BH$, 推得 $BC = AF$ 且 $AF \parallel BC$, 再由 $\angle A = 90^\circ$ 证四边形 $ABCF$ 为矩形.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折, 点 A 落在腰 CD 上的点 E 处,



$\therefore AB = BE$, $\angle A = \angle BED = 90^\circ$, 即 $BE \perp CD$,

$\because E$ 是腰 CD 的中点,

$\therefore BE$ 垂直平分 CD ,

$\therefore BD = BC$,

$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

由翻折性质, $\angle ABD = \angle EBD$,

$$\because BD = BC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EBC \quad (\text{三线合一}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD = \angle EBC,$$

$$\text{又} \because \angle ABD + \angle EBD + \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD = \angle EBC = 30^\circ,$$

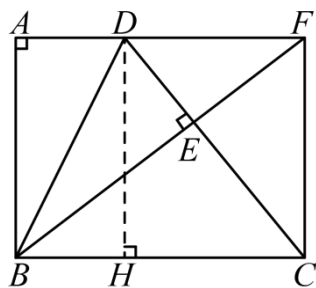
$$\therefore \angle CBD = \angle EBD + \angle EBC = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because BD = BC,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形.

【小问 2 详解】

证明: 过点 D 作 $DH \perp BC$, 垂足为 H , 则 $\angle DHC = 90^\circ$.



$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形,

$$\therefore AB = DH, \quad BH = AD,$$

由翻折性质, $\angle A = \angle BED = 90^\circ, \quad AB = BE,$

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle BED = 90^\circ, \quad \text{且} \quad DH = BE,$$

$$\text{在} \triangle BCE \text{ 和 } \triangle DCH \text{ 中: } \begin{cases} \angle BEC = \angle DHC = 90^\circ \\ \angle BCE = \angle DCH \\ BE = DH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCH \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore BC = DC, \quad CE = CH,$$

$$\because CE = DF,$$

$$\therefore CH = DF,$$

$$\text{又} \because BH = AD,$$

$\therefore CH + BH = DF + AD$ ，即 $BC = AF$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，即 $AF \parallel BC$ ，

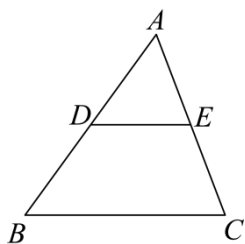
$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 是平行四边形，

又 $\because \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCF$ 是矩形.

24. 阅读材料:

金山区某中学数学兴趣小组，在《23.4 (1) 三角形的中位线与重心》一课的学习后，对中位线定理的证明产生了很大的兴趣，在课后进行了延伸探究.



已知: 如图 (1), 在 ABC 中, D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点.

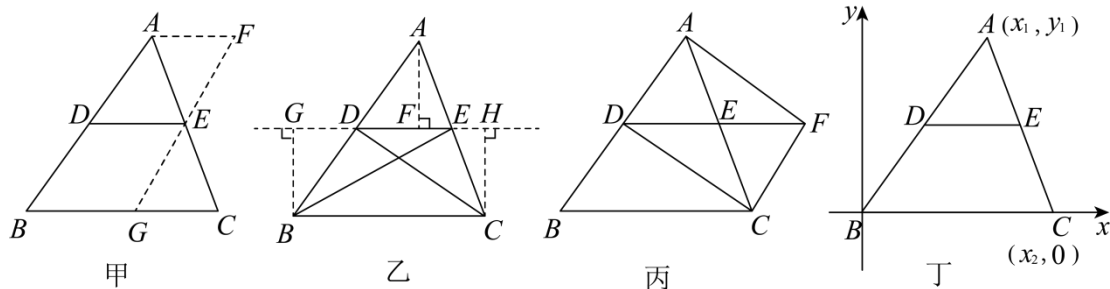
求证: $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

下面是几位同学的探究过程:

甲: 过点 E 作 $EG \parallel AB$ ，交 BC 于点 G ，过点 A 作 BC 的平行线交 GE 的延长线于点 F .

乙: 连接 BE ， CD ，过点 A 作 $AF \perp DE$ ，垂足为 F ，分别过点 B 、 C 作 $BG \perp DE$ ， $CH \perp DE$ ，交 ED 、 DE 延长线于点 G 、 H .

丙: 延长 DE 至点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 FC 、 DC 、 AF .



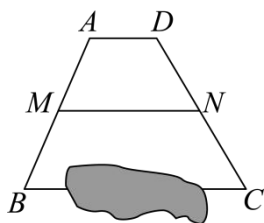
丁: 以点 B 为原点建立平面直角坐标系，设点 A 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 C 的坐标为 $(x_2, 0)$.

(1) 任务一: 四位同学的方案，能证明三角形的中位线定理的有_____ (填人名)

(2) 任务二: 请选择一位同学的方案，并将证明过程补充完整.

(3) 任务三: 该兴趣小组在某公园开展“测距”为主题的小队活动时，发现 B 、 C 两地被某人工湖隔开，由于只有工具: 一把皮尺 (测量长度略小于 BC)，某同学提出方案“我们可以在与 BC 平行的人行步道上

的点 A 、 D 处作好标记，通过皮尺找到 AB 与 DC 的中点 M 、 N ，通过皮尺测量 AD ， MN 的长度，就可以估算出 B 、 C 两点间的距离了”。若测得 $AD = m$ ， $MN = n$ ，请直接写出 B 、 C 两点间的距离。（用含 m 、 n 的代数式表示）



【答案】(1) 甲乙丙丁

(2) 选择甲（或乙或丙或丁）；证明见解析

(3) B 、 C 两点间的距离为 $2n - m$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的判定与性质结合全等三角形的判定与性质即可判断；

(2) 甲：先证明四边形 $AFGB$ 是平行四边形，再证明 $\triangle AFE \cong \triangle CGE$ (AAS)，然后证明四边形 $ADEF$ 是平行四边形即可；乙：证明 $\triangle AFD \cong \triangle BGD$ (AAS)， $\triangle AFE \cong \triangle CHE$ (AAS)，再证明四边形 $BGHC$ 是平行四边形即可；丙：先证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (SAS)，再证明四边形 $DBCF$ 是平行四边形即可；丁：根据中点坐标公式得到 D ， E 的坐标，然后根据点的坐标特征即可判定；

(3) 连接 AN 并延长，交 BC 延长线于点 P ，证明 $\triangle ADN \cong \triangle PCN$ (AAS)，得到 MN 是 $\triangle ABP$ 的中位线，根据中位线的性质即可得解。

【小问 1 详解】

解：甲乙丙丁；

【小问 2 详解】

解：选择甲；

过点 E 作 $EG \parallel AB$ ，交 BC 于点 G ，过点 A 作 BC 的平行线交 GE 的延长线于点 F 。

$\because EG \parallel AB$ ， $AF \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFGB$ 是平行四边形，

$\therefore AF = BG$ ， $AB = FG$ ，

$\because AF \parallel BC$ ，

$\therefore \angle F = \angle CGE$ ，

$\because D、E$ 分别是 $AB、AC$ 的中点,

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB, \quad AE = CE,$$

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle CGE$ 中,

$$\begin{cases} \angle F = \angle CGE \\ \angle FEA = \angle GEC, \\ AE = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CGE (AAS),$$

$$\therefore AF = CG = BG = \frac{1}{2}BC, \quad FE = EG = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$$\therefore AF \parallel DE, \quad AF = DE,$$

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC;$$

选择乙;

证明: 连接 BE, CD , 过点 A 作 $AF \perp DE$, 垂足为 F , 分别过点 $B、C$ 作 $BG \perp DE, CH \perp DE$, 交 $ED、DE$ 延长线于点 $G、H$.

$$\therefore \angle AFD = \angle BGD = 90^\circ.$$

$\because D$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle BGD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AFD = \angle BGD \\ \angle ADF = \angle BDG, \\ AD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle BGD (AAS),$$

$$\therefore FD = GD, \quad AF = BG.$$

同理, $\because \angle AFE = \angle CHE = 90^\circ, \quad \angle AEF = \angle CEH, \quad AE = EC,$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CHE (AAS),$$

$$\therefore FE = EH, \quad AF = CH.$$

$$\therefore DE = FD + FE = \frac{1}{2}GF + \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2}GH, \quad BG = CH.$$

$\because BG \perp GH, \quad CH \perp GH,$

$$\therefore BG \parallel CH,$$

$\therefore$ 四边形 $BGHC$ 是平行四边形,

$$\therefore BC \parallel GH, \quad BC = GH,$$

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC;$$

选择丙;

证明: 延长 DE 至点 F , 使 $EF = DE$, 连接 FC 、 DC 、 AF .

$\because E$ 是 AC 的中点,

$$\therefore AE = EC,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中,

$$\begin{cases} EF = DE \\ \angle AEF = \angle DEC, \\ AE = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE (SAS),$$

$$\therefore AD = CF, \quad \angle DAE = \angle FCE,$$

$$\therefore DB \parallel FC,$$

$\because D$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AD = DB,$$

$$\therefore DB = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形,

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DF = BC,$$

$$\because DE = EF,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC;$$

选择丁;

证明: 以点 B 为原点建立平面直角坐标系, 设点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 C 的坐标为 $(x_2, 0)$.

$$\therefore BC = x_2,$$

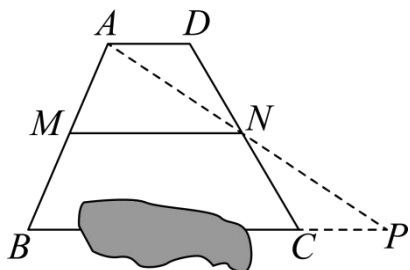
$\because D$ 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点,

$$\therefore D\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right), \quad E\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1}{2}\right),$$

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2}BC;$$

【小问3详解】

解：如图，连接 AN 并延长，交 BC 延长线于点 P ，



$\because$ 点 N 是 DC 的中点，

$$\therefore DN = CN,$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAN = \angle P, \quad \angle D = \angle NCP,$$

在 $\triangle ADN$ 和 $\triangle PCN$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAN = \angle P \\ \angle D = \angle NCP, \\ DN = CN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADN \cong \triangle PCN (AAS),$$

$$\therefore AD = CP, \quad AN = NP, \quad \text{即点 } N \text{ 是 } AP \text{ 的中点},$$

$\because$ 点 M 是 AB 的中点，

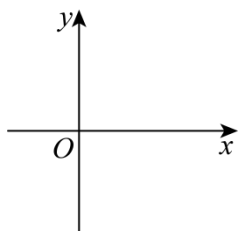
$\therefore MN$ 是 $\triangle ABP$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}(BC + CP) = \frac{1}{2}(BC + AD), \quad \text{即 } n = \frac{1}{2}(BC + m),$$

$$\therefore BC = 2n - m,$$

即 B 、 C 两点间的距离为 $2n - m$.

25. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2a, 0)$ 、 $B(0, 2b)$ 、 $C(-a, 3b)$. 若 a 、 b 满足 $\sqrt{a-3} + (b-\sqrt{3})^2 = 0$.



(1) 求点 A 、 B 、 C 的坐标；

(2) 点 $P(m, n)$ 为坐标平面内一点 ($m > 0$);

①若 $\triangle OBP$ 的面积大于 $3\sqrt{3}$, 求 m 的取值范围;

②若点 P 在直线 $x=8$ 上, 且满足 $S_{\triangle ABP} = 2S_{\triangle BOC}$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $A(6, 0)$ 、 $B(0, 2\sqrt{3})$ 、 $C(-3, 3\sqrt{3})$

(2) ① $m > 3$; ② 点 P 的坐标为 $\left(8, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(8, -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据算术平方根和完全平方数的非负性得到 a , b 的值, 即可得解;

(2) ① 根据三角形面积公式表示出 $S_{\triangle OBP}$, 然后根据题意列不等式求解即可得解; ② 分情况讨论: 当点 P 在 x 轴上方时, 当点 P 在 x 轴下方时, 当点 P 在 x 轴时, 根据三角形面积公式表示出 $S_{\triangle ABP}$ 和求解 $S_{\triangle BOC}$, 根据面积关系列等式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because a$ 、 b 满足 $\sqrt{a-3} + (b-\sqrt{3})^2 = 0$, $\sqrt{a-3} \geq 0$, $(b-\sqrt{3})^2 \geq 0$,

$$\therefore a-3=0, \quad b-\sqrt{3}=0,$$

$$\therefore a=3, \quad b=\sqrt{3},$$

$$\therefore A(2a, 0)、B(0, 2b)、C(-a, 3b),$$

$$\therefore A(6, 0)、B(0, 2\sqrt{3})、C(-3, 3\sqrt{3});$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } ① S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2} OB \cdot m = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \cdot m = \sqrt{3}m,$$

$$\because \triangle OBP \text{ 的面积大于 } 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \sqrt{3}m > 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } m > 3;$$

$$② S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot |x_C| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times |-3| = 3\sqrt{3},$$

$$\because \text{点 } P \text{ 在直线 } x=8 \text{ 上},$$

$$\therefore P(8, n),$$

设直线 $x=8$ 与 x 轴的交点为 D ,

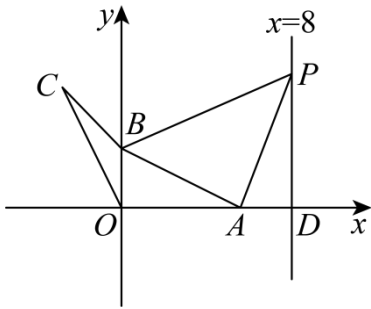
当点 P 在 x 轴上方时,

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABP} &= S_{\text{梯形}OBPD} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle APD} \\
 &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + n) \times 8 - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times (8-6) \times n \\
 &= 8\sqrt{3} + 4n - 6\sqrt{3} - n \\
 &= 2\sqrt{3} + 3n,
 \end{aligned}$$

$$\because S_{\triangle ABP} = 2S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore 2\sqrt{3} + 3n = 2 \times 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } n = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(8, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right);$$



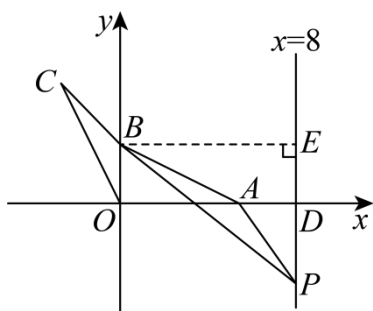
当点 P 在 x 轴下方时,

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABP} &= S_{\triangle BEP} - S_{\text{梯形}ABED} - S_{\triangle APD} \\
 &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - n) \times 8 - \frac{1}{2} \times (8-6+8) \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (8-6) \times (-n) \\
 &= 8\sqrt{3} - 4n - 10\sqrt{3} + n \\
 &= -2\sqrt{3} - 3n,
 \end{aligned}$$

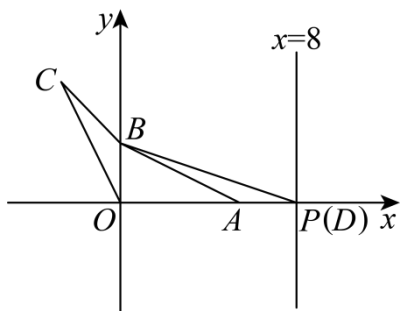
$$\because S_{\triangle ABP} = 2S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore -2\sqrt{3} - 3n = 2 \times 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } n = -\frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(8, -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right);$$

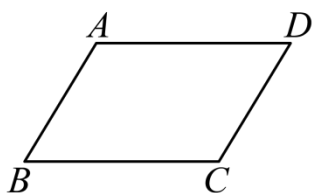
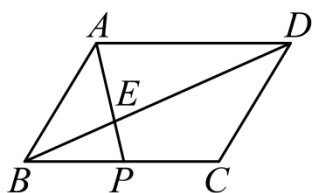


当点 P 在 x 轴时, 此时 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times (8-6) \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} < S_{\triangle BOC}$, 故此情况不存在;

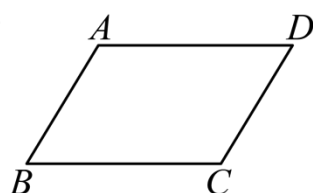


综上, 点 P 的坐标为 $\left(8, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(8, -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

26. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 P 是边 BC 中点, AP 与 BD 交于点 E .



备用图



备用图

(1) 连接 CE , 当 $EA = EC$ 时,

①求证: 平行四边形 $ABCD$ 是菱形;

②若 $AB = 5$, $AE = 3$, 求 BD 的长; (提示: 构造三角形重心)

(2) 过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F , 若点 C 、 E 、 F 共线, 且满足 $CE = \sqrt{2}AE$, 求 $\frac{AB}{BC}$ 的值.

【答案】(1) ①见解析; ② $BD = 6\sqrt{2}$

$$(2) \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

【解析】

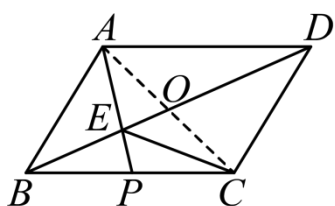
【分析】(1) ①连接 AC 交 BD 于点 O , 根据平行四边形的对角线互相平分可得 $AO = OC$, 再根据等腰三角形三线合一可得 $EO \perp AC$, 即可得证;

②由 $AD \parallel BC$ ，可得 $\triangle ADE \sim \triangle PBE$ ，根据相似三角形的性质结合中点的性质可得 $DE = 2BE$ ，在 $Rt\triangle AOE$ 和 $Rt\triangle AOB$ 中，分别利用勾股定理列式计算可求得 BE 的长，即可得解；

(2) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle PBE$ ，可得到 $DE = 2BE$ ，证明 $\triangle BFE \sim \triangle DCE$ ，可得 $BF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$ ，
 $EF = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}AE$ ，在 $Rt\triangle AFE$ 中，根据勾股定理可得 AF ，即可得到 AB ，在 $Rt\triangle BFC$ 中，根据勾股定理可得 BC ，从而得解.

【小问 1 详解】

①证明：如图，连接 AC 交 BD 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO = OC$ ，即点 O 是 AC 的中点，

$\because EA = EC$ ，

$\therefore EO \perp AC$ ，即 $BD \perp AC$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形；

②解： $\because$ 点 P 是边 BC 中点，

$\therefore BC = 2BP$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

$\therefore AD = BC = 2BP$ ， $BO = OD = \frac{1}{2}BD$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle PBE$ ，

$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BP} = \frac{2BP}{BP} = 2$ ，

$\therefore DE = 2BE$ ，

$\therefore BD = BE + DE = BE + 2BE = 3BE$ ，

$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = \frac{3}{2}BE$ ，

$$\therefore EO = BO - BE = \frac{3}{2}BE - BE = \frac{1}{2}BE,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOE \text{ 中, } OA^2 = AE^2 - EO^2 = 3^2 - \left(\frac{1}{2}BE\right)^2 = 9 - \frac{1}{4}BE^2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOB \text{ 中, } OA^2 + BO^2 = AB^2, \text{ 即 } 9 - \frac{1}{4}BE^2 + \left(\frac{3}{2}BE\right)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得 } BE = 2\sqrt{2} \text{ (负值已舍去),}$$

$$\therefore BD = 3BE = 6\sqrt{2};$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AB \parallel DC, \quad AB = DC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle PBE,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BP} = \frac{2BP}{BP} = 2,$$

$$\therefore DE = 2BE,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle BFE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{EF}{CE} = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB, \quad EF = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}AE,$$

$$\therefore AB = 2BF = 2AF, \quad CF = CE + EF = CE + \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}CE = \frac{3\sqrt{2}}{2}AE,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AFE \text{ 中, } AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{AE^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}AE\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}AE,$$

$$\therefore AB = 2AF = \sqrt{2}AE,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BFC \text{ 中, } BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AE\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}AE\right)^2} = \sqrt{5}AE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{5}AE} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

