

青浦一中 2025 学年第二学期期中学业质量调研

初二年级数学学科试卷

2026.04

(考试时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

考生注意: 本考试分设试卷和答题纸. 答题前, 务必在答题纸上填写姓名、座位号 (考号), 并填涂好准考证号. 作答必须涂或写在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 在平行四边形、矩形、菱形、正方形中, 既是中心对称又是轴对称, 且对角线相等的是 ()

- A. 平行四边形与矩形
B. 矩形与正方形
C. 菱形与正方形
D. 矩形与菱形

【答案】B

【解析】

【分析】根据中心对称图形、轴对称图形的定义, 以及特殊四边形对角线的性质, 逐一判断图形是否满足三个条件, 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 平行四边形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 且对角线不相等, 不符合要求; 矩形既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 且对角线相等, 符合要求; 菱形既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 但对角线不相等, 不符合要求; 正方形既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 且对角线相等, 符合要求;
 $\therefore$ 满足所有条件的是矩形与正方形.

2. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 相似比为 2:3, 若 $\triangle ABC$ 的周长为 8, 则 $\triangle DEF$ 的周长为 ()

- A. 12
B. 16
C. 18
D. 24

【答案】A

【解析】

【分析】利用相似三角形周长的比等于相似比计算即可求解.

【详解】解: $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$, 相似比为 2:3,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长: $\triangle DEF$ 的周长 = 2:3,

$\because \triangle ABC$ 的周长为 8, 设 $\triangle DEF$ 的周长为 x ,

$\therefore 8:x = 2:3$,

即 $2x = 8 \times 3$,

解得 $x = 12$,

即 $\triangle DEF$ 的周长为 12.

3. 顺次连接菱形各边中点所得的四边形一定是 ()

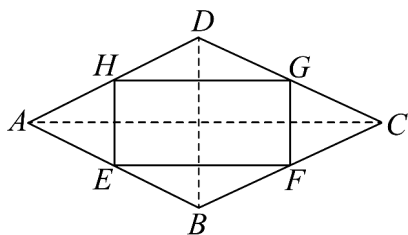
- A. 平行四边形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理可推出所得四边形对边平行且相等，判定为平行四边形，再结合菱形对角线互相垂直的性质，可推出平行四边形有一个内角为直角，利用矩形的判定定理即可得到结论.

【详解】解：设菱形为 $ABCD$ ， E ， F ， G ， H 分别为 AB ， BC ， CD ， DA 的中点，连接对角线 AC 、 BD ，



$\therefore E, F, G, H$ 分别是菱形 $ABCD$ 四边的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, GH 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel AC, \quad EF = \frac{1}{2}AC, \quad GH \parallel AC, \quad GH = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore EF \parallel GH, \quad EF = GH,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

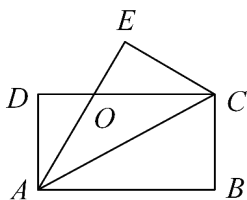
$$\therefore AC \perp BD,$$

同理可证: $EH \parallel BD$.

$$\therefore EF \perp EH, \text{ 即 } \angle HEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

4. 如图, 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AD=4\text{cm}$, 把纸片沿直线 AC 折叠, 点 B 落在 E 处, AE 交 DC 于点 O , 若 $AO=5\text{cm}$, 则 AB 的长为 ()



- A. 6cm B. 7cm C. 8cm D. 9cm

【答案】C

【解析】

【分析】根据折叠前后角相等可证 $AO=CO$ ，在直角三角形 ADO 中，运用勾股定理求得 DO ，再根据线段的和差关系求解即可。

【详解】解：根据折叠前后角相等可知 $\angle BAC=\angle EAC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BAC=\angle ACD$ ，

$\therefore \angle EAC=\angle EAC$ ，

$\therefore AO=CO=5\text{cm}$ ，

在直角三角形 ADO 中， $DO=\sqrt{AO^2-AD^2}=3\text{cm}$ ，

$AB=CD=DO+CO=3+5=8\text{cm}$ 。

故选：C。

【点睛】本题考查矩形与折叠问题，解题过程中应注意折叠是一种对称变换，它属于轴对称，根据轴对称的性质，折叠前后图形的形状和大小不变，如本题中折叠前后角相等。

5. 下列条件中，不能判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 的是（ ）

A. $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$

B. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

C. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ ，且 $\angle B = \angle B'$

D. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ，且 $\angle C = \angle C'$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定规则逐一判断选项即可得到结果。

【详解】解： $\because$ 选项 A 中 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ，符合两角分别相等的判定规则， $\therefore$ A 可以判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；

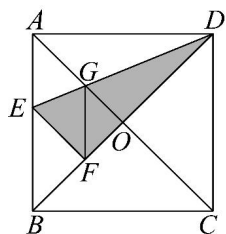
$\therefore$ 选项 B 中 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ ，符合三边成比例的判定规则， $\therefore$ B 可以判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；

$\therefore$ 选项 C 中 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ ，且相等角 $\angle B$ 是两组比例边的夹角，符合两边成比例且夹角相等的判定规则，

$\therefore$ C 可以判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；

$\therefore$ 选项 D 中 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ，相等的角 $\angle C = \angle C'$ 不是这两组成比例的边的夹角，不满足相似三角形的判定规则， $\therefore$ D 不能判定 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

6. 如图, 在正方形纸片 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 折叠正方形纸片 $ABCD$, 使 AD 落在 BD 上, 点 A 恰好与 BD 上的点 F 重合, 展开后, 折痕 DE 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 G , 连接 GF , 下列结论: ① $\angle AGD = 112.5^\circ$; ② $\frac{AD}{AE} = 2$; ③ $S_{\triangle AGD} = S_{\triangle OGD}$; ④ 四边形 $AEFG$ 是菱形; ⑤ $BE = 2OG$, 其中正确结论有 () 个



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】①由四边形 $ABCD$ 是正方形, 可得 $\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ$, 又由折叠的性质, 可求得 $\angle ADG$ 的度数; ②由 $AE = EF < BE$, 可得 $AD > 2AE$; ③由 $AG = GF > OG$, 可得 $\triangle AGD$ 的面积 $>$ $\triangle OGD$ 的面积; ④由折叠的性质与平行线的性质, 易得 $\triangle EFG$ 是等腰三角形, 即可证得 $AE = GF$, 易证得四边形 $AEFG$ 是菱形; ⑤由菱形性质, 等腰直角三角形的性质, 勾股定理, 即可得 $BE = 2OG$.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ,$$

$$\text{由折叠的性质可得: } \angle ADG = \frac{1}{2} \angle ADO = 22.5^\circ$$

故 $\angle AGD = 180^\circ - 45^\circ - 22.5^\circ = 112.5^\circ$, 故①正确.

$$\because \text{由折叠的性质可得: } AE = EF, \angle EFD = \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\angle AE = EF < BE,$$

$$\angle AE < \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} > 2,$$

$\therefore AD > 2AE$, 故②错误.

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\angle AG = FG > OG, \triangle AGD \text{ 与 } \triangle OGD \text{ 同高},$$

$$\therefore S_{\triangle AGD} > S_{\triangle OGD}, \text{ 故③错误.}$$

$$\because \angle EFD = \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\angle FEG = \angle AGE,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle FGE,$$

$$\angle FEG = \angle FGE,$$

$$\therefore EF = GF,$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\therefore AE = GF,$$

$$\therefore AE = EF = GF, \quad AG = GF,$$

$$\therefore AE = EF = GF = AG,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是菱形,

故四边形 $AEFG$ 是菱形, 故④正确.

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是菱形,

$$\angle OGF = \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OGF = \angle OFG = 45^\circ,$$

$$\therefore OF = OG,$$

$$\therefore EF = GF = \sqrt{OF^2 + OG^2} = \sqrt{2}OG,$$

同理可得 $BE = \sqrt{2}EF = \sqrt{2} \times \sqrt{2}OG = 2OG$. 故⑤正确.

故选: C.

【点睛】此题考查的是折叠的性质, 正方形的性质, 等腰直角三角形的性质以及菱形的判定与性质等知识. 此题综合性较强, 难度较大, 注意掌握折叠前后图形的对应关系, 注意数形结合思想的应用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 则这个多边形的边数为_____

【答案】6

【解析】

【分析】本题利用任意多边形外角和为定值 360° , 结合题目给出的内角和与外角和的数量关系, 再根据多边形内角和公式列方程求解即可得到边数.

【详解】设这个多边形的边数为 n ,

根据题意列方程得 $(n-2) \times 180^\circ = 2 \times 360^\circ$,

解得 $n = 6$.

8. 已知 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, 那么 $\frac{2a+b}{c}$ 的值是 _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查比例的知识，解题的关键是掌握比例的性质，根据题意，设 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ，依次求出 a ， b ， c 代入计算，即可.

【详解】 解： 设 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ，

$\therefore a = 3k$ ， $b = 4k$ ， $c = 5k$ ，

$$\therefore \frac{2a+b}{c} = \frac{2 \times (3k) + 4k}{5k} = \frac{10k}{5k} = 2.$$

故答案为： 2.

9. 已知线段 MN 的长为 4，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，那么较长线段 MP 的长是_____.

【答案】 $2\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的概念得到 $MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN$ ，把 $MN = 4$ 代入计算即可.

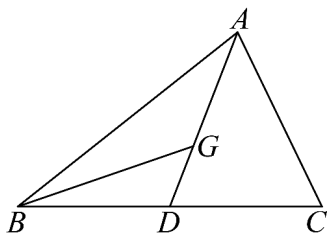
【详解】 解： $\because$ 线段 MN 的长为 4，点 P 是线段 MN 的黄金分割点， $MP > NP$ ，

$$\therefore MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5}-2,$$

故答案为： $2\sqrt{5}-2$.

【点睛】 本题考查了黄金分割的概念，理解黄金分割点的概念是解题的关键.

10. 如图，已知： G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $S_{\triangle ABC} = 12$ ，那么 $S_{\triangle GBD} =$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了三角形重心的性质，三角形的中线的性质，根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得出 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，可得 $S_{\triangle ABD} = 6$ ，根据重心的性质可得 $\frac{AG}{GD} = 2$ ，即可得出 $S_{\triangle GBD}$.

【详解】解：∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中线, } \frac{AG}{GD} = 2,$$

$$\therefore \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle GBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} = 2,$$

故答案为：2.

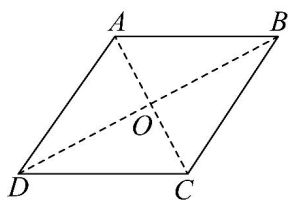
11. 菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 120^\circ$ ，边长为 4，则较长对角线长为_____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 AC 、 BD 交于点 O ，利用菱形对角线互相垂直平分且平分内角的性质，构造直角三角形，结合含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理，即可求出较长对角线的长度.

【详解】解：连接 AC 、 BD 交于点 O ，如图；



因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\text{所以 } AC \perp BD, \quad OB = OD = \frac{1}{2} BD, \quad OA = OC = \frac{1}{2} AC, \quad \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAD;$$

因为 $\angle BAD = 120^\circ$,

所以 $\angle BAO = 60^\circ$;

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$,

所以 $\angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$;

$$\text{所以 } AO = \frac{1}{2} AB;$$

因为菱形边长为 4，即 $AB = 4$,

所以 $AO = 2$;

由勾股定理得 $AO^2 + BO^2 = AB^2$ ，代入得 $2^2 + BO^2 = 4^2$,

解得 $BO = 2\sqrt{3}$ ，负根不合题意舍去；

所以 $BD = 2BO = 4\sqrt{3}$ ；

又因为 $AC = 2AO = 4 < 4\sqrt{3}$ ，所以较长对角线长为 $4\sqrt{3}$ 。

12. 若正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长为 6，则该正方形的面积为_____。

【答案】18

【解析】

【分析】正方形是矩形，也是菱形，可用菱形的面积计算方法求解。

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

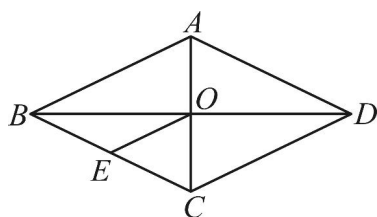
$\therefore AC = BD = 6$ ， $AC \perp BD$ 。

$\therefore S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ 。

故答案为：18。

【点睛】本题主要考查正方形的性质，牢记正方形的性质（正方形既是矩形也是菱形）是解题的关键。

13. 如图，菱形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， E 为 BC 的中点，菱形 $ABCD$ 周长为 24cm ，则 OE 的长为_____ cm 。



【答案】3

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质与三角形中位线定理的应用。先根据菱形周长求出边长，再结合中点条件，利用三角形中位线定理求出 OE 的长度。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD = DA$ ， O 是 AC 的中点。

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 24cm ，

$\therefore AB = BC = CD = DA = \frac{24}{4} = 6\text{cm}$ 。

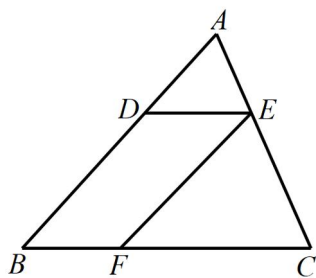
又 $\because E$ 为 BC 的中点,

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, OE 是中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}.$$

故答案为: 3.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 、 BC 上, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 如果 $DE:BC = 2:5$, 那么 $EF:AB$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 根据 $DE \parallel BC$ 得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$, 根据比例的性质可得 $\frac{CE}{AC} = \frac{3}{5}$, 再根据 $EF \parallel AB$, 即可得到答案;

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{3}{5},$$

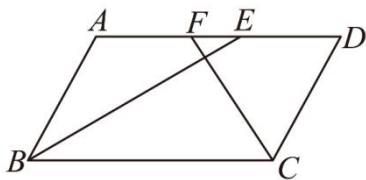
$\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{3}{5},$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题考查平行线截线段对应成比例, 解题的关键是根据比例性质求得 $\frac{CE}{AC} = \frac{3}{5}$.

15. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, BE 、 CF 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ 交 AD 于点 E 、点 F , 已知 $AB = 6$, $BC = 10$, 则 EF 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，解答本题的关键是根据平行线的性质和角平分线的定义得出 $\angle ABE = \angle AEB$ 。根据四边形 $ABCD$ 平行四边形可得 $AE \parallel BC$ ，根据平行线的性质和角平分线的定义可得出 $\angle ABE = \angle AEB$ ，继而可得 $AB = AE = 6$ ，同理得： $DF = CD = 6$ ，然后根据已知可求得 EF 的长度。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AE \parallel BC$ ， $AD = BC = 10$ ， $AB = CD = 6$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle EBC$ ，

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle EBC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$ ，

$\therefore AB = AE = 6$ ，

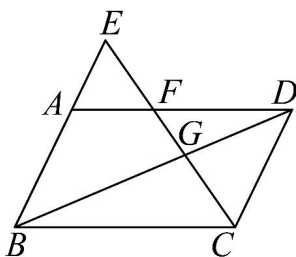
同理得： $DF = CD = 6$ ，

$\therefore EF = AE + DF - AD = 6 + 6 - 10 = 2$ 。

故答案为： 2。

16. 如图， E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BA 延长线上的一点， CE 交 AD 于点 F ， 交 BD 于点 G ，

$AE : AB = 1 : 2$ ， 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 。 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{CG} =$ _____。



【答案】 $\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$

【解析】

【分析】 此题考查了平面向量的知识以及平行四边形的性质、相似三角形的判定与性质。注意掌握平行四边形性质与平面向量的知识是解此题的关键。

根据 $AE:AB=1:2$ 求得 $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\vec{a}$, 再根据 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$, 求得 $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$, 然后根据平行四边形性质与相似三角形的判定与性质求得 $GC:EC=2:5$, 即可由 $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CE}$ 求解.

【详解】解: $\because AE:AB=1:2$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore CD \parallel EB,$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle DCG,$$

$$\therefore EG:CG = EB:CD = 3:2,$$

$$\therefore GC:EC = 2:5,$$

$$\therefore \overrightarrow{CG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CE} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$$

17. 如果三角形的其中两条中线是垂直的, 则称这个三角形为“优美三角形”, 两条垂直的中线的比值(较短中线与较长中线的比值)为“优美值”; 已知 $Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”, 且 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的“优美值”是_____;

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】该题考查了平行四边形的性质和判定, 勾股定理, 二次根式的性质, 分情况讨论是解题的关键.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点, 设 $AC = 2a, BC = 2b$, 根据 $Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”, 分为 $BE \perp CD$ 时, $AF \perp CD$ 时, $AF \perp BE$ 时三种情况分别画图求解即可.

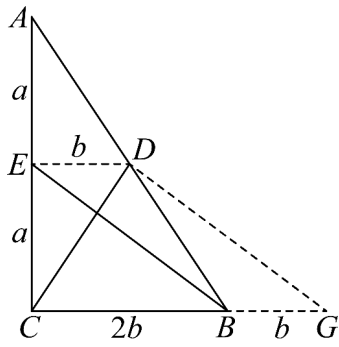
【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点,

设 $AC = 2a, BC = 2b$,

$\because Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”,

故分为 $BE \perp CD$ 时, $AF \perp CD$ 时, $AF \perp BE$ 时.

当 $BE \perp CD$ 时, 如图,



$$\therefore AE = CE = a, DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC = b,$$

过点 D 作 $DG \parallel BE$ ，延长 CB 交 DG 于点 G ，

$$\therefore DG \parallel BE, DE \parallel BG,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBG$ 是平行四边形，

$$\therefore BG = DE = b,$$

$$\therefore CG = 2b + b = 3b,$$

$$\therefore AC \perp BC, BE \perp CD, BE \parallel DG,$$

$$\therefore DG \perp CD, DE \perp CE,$$

$$\therefore DG^2 = BE^2 = CE^2 + BC^2 = a^2 + (2b)^2,$$

$$\therefore CD^2 = CE^2 + DE^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

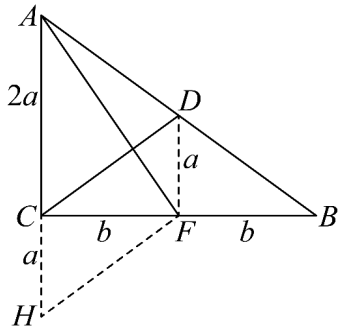
$$\therefore a^2 + b^2 + a^2 + (2b)^2 = (3b)^2,$$

$$\therefore a^2 = 2b^2,$$

$$\therefore CD^2 = 3b^2, BE^2 = 6b^2,$$

$$\therefore \frac{CD}{BE} = \sqrt{\frac{3b^2}{6b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 $AF \perp CD$ 时，如图，



$$\therefore CF = BF = b, DF \parallel AC, DF = \frac{1}{2}AC = a,$$

过点 F 作 $FH \parallel CD$, 延长 AC 交 FH 于点 H ,

$$\therefore DF \parallel CH, CD \parallel FH,$$

$\therefore$ 四边形 $DFHC$ 是平行四边形,

$$\therefore CH = DF = a,$$

$$\therefore AH = 2a + a = 3a,$$

$$\therefore AC \perp BC, AF \perp CD, FH \parallel CD,$$

$$\therefore DF \perp CB, FH \perp AF,$$

$$\therefore DC^2 = FH^2 = DF^2 + CF^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore AF^2 = AC^2 + CF^2 = (2a)^2 + b^2,$$

$$\therefore AF^2 + HF^2 = AH^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + b^2 + (2a)^2 = (3a)^2,$$

$$\therefore b^2 = 2a^2,$$

$$\therefore CD^2 = 3a^2, AF^2 = 6a^2,$$

$$\therefore \frac{CD}{AF} = \sqrt{\frac{3a^2}{6a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 $AF \perp BE$ 时, 如图,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

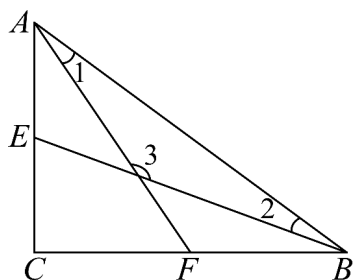
$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$\therefore \angle 3 > 90^\circ$,

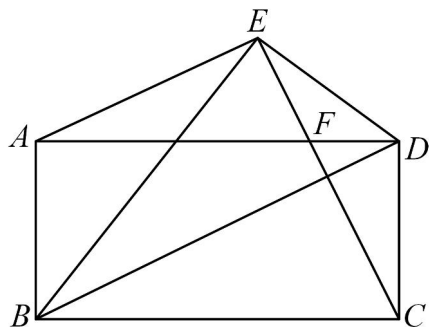
故与 $AF \perp BE$ 矛盾, 此种情况不存在.



综上, $\triangle ABC$ 的“优美值”是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 翻折后, 点 C 落在点 E 处. 联结 CE 交边 AD 于点 F . 如果 $DF=1$, $BC=4$, 那么 AE 的长等于_____.



【答案】 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】由折叠的性质可得 $Rt\triangle BCD \cong Rt\triangle BED$, 由矩形的性质可证明 $Rt\triangle DAB \cong Rt\triangle BCD$, 故可得 $Rt\triangle DAB = Rt\triangle BED$, 再证明 $Rt\triangle BCD \sim Rt\triangle CDF$ 求得 $CD=2$, 在 $Rt\triangle AEF$ 中由勾股定理可得解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\triangle BED$ 是由 $\triangle BCD$ 翻折得到,

$\therefore Rt\triangle BCD \cong Rt\triangle BED$, $CE \perp BD$,

$\therefore AD = BC = 4$, $AB = CD = ED$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD=BC$, $AB=CD$,

又 $BD=DB$

$\therefore Rt\triangle DAB \cong Rt\triangle BCD$

$\therefore Rt\triangle DAB \cong Rt\triangle BED$

$$\therefore AB = ED, \angle ABD = \angle EDB$$

$\therefore$ 四边形 ABDE 是等腰梯形,

$$\therefore CE \perp BD, AE \parallel BD,$$

$$\therefore CE \perp AE, \angle EAD = \angle ADB = \angle DBC$$

$$\therefore \angle DBC + \angle FCB = 90^\circ, \angle FBC + \angle FCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DBC = \angle FCD$$

$$\therefore Rt\triangle BCD \sim Rt\triangle CDF$$

$$\therefore \frac{FD}{CD} = \frac{CD}{BC}, \text{ 即 } \frac{1}{CD} = \frac{CD}{4}$$

$$\therefore CD = 2 \text{ 或 } -2 \text{ (舍去)}$$

$$\text{在 } Rt\triangle DCB \text{ 中, } \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle EAD = \angle DBC$$

$$\therefore \tan \angle EAD = \frac{1}{2}$$

$$\text{在 } Rt\triangle AEF \text{ 中, } EF = \frac{1}{2} AE$$

$$\text{由勾股定理得, } AE^2 = AF^2 - EF^2$$

$$\text{即 } AE^2 = (AD - FD)^2 - \left(\frac{1}{2} AE\right)^2$$

$$\therefore AE^2 = (4 - 1)^2 - \frac{1}{4} AE^2$$

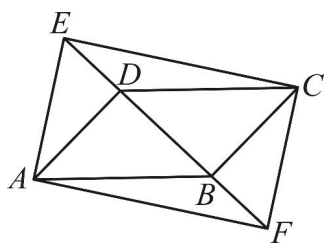
$$\text{解得: } AE = \frac{6}{5} \sqrt{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质、解直角三角形，勾股定理的运用以及折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

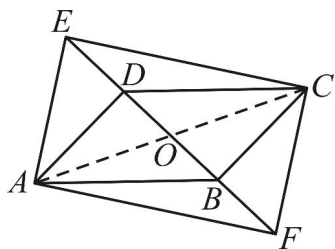
三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19 题 6 分, 20-23 题每题 8 分, 第 24-25 题 10 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 连结对角线 BD , 点 E 和点 F 是 $\square ABCD$ 外两点, 且在直线 BD 上, $DE = BF$. 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.



【答案】

证明：连接 AC 交 BD 于 O ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO = CO, BO = DO,$

$\therefore BF = DE,$

$\therefore BO + BF = DO + DE$, 即 $FO = EO$,

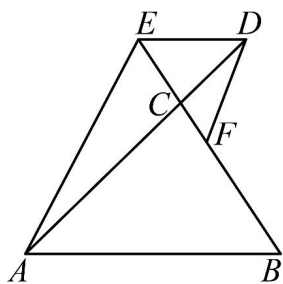
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定与性质，先根据平行四边形的性质得出 $AO = CO, BO = DO$ ，然后结合 $BF = DE$ 可得出 $FO = EO$ ，最后根据对角线互相平分的四边形是平行四边形即可得证.

【详解】 略

20. 如图， AD 与 BE 相交于点 $C, DE \parallel AB$ ，点 F 在线段 BC 上，且 $EC^2 = CF \cdot BC$ ，连接 DF, EA .



(1) 求证： $DF \parallel EA$;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，当 $BC = 2EC$ 时，求向量 $\overrightarrow{CD}$ (用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示).

【答案】 (1)

证明： $\because DE \parallel AB$,

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{EC}{BC},$$

$$\therefore EC^2 = CF \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{CF}{EC},$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{CF}{EC},$$

$$\therefore \angle ACE = \angle DCF,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CDF,$$

$$\therefore DF \parallel EA;$$

$$(2) \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量、相似三角形的判定与性质，平行线分线段成比例性质，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

(1) 根据平行线分线段成比例性质可得 $\frac{CD}{AC} = \frac{EC}{BC}$ ，再由 $EC^2 = CF \cdot BC$ 可得 $\frac{EC}{BC} = \frac{CF}{EC}$ ，从而得出 $\frac{CD}{AC} = \frac{CF}{EC}$ ，再证 $\triangle ACE \sim \triangle DCF$ ，可得 $\angle CAE = \angle CDF$ ，再由平行线的判定即可得出结论；

(2) 由 $BC = 2EC$ 得出 $\frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，可得出 $\frac{CD}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，再由 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ 可得 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ．进而可得答案．

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解： $\because BC = 2EC,$

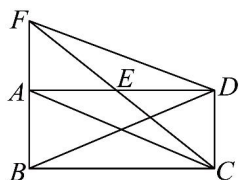
$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 AD 的中点，延长 CE ， BA 相交于点 F ，连接 AC ， BD ， DF ．



(1) 求证: $BD = DF$;

(2) 当 CF 平分 $\angle BCD$, 且 $BC = 6$ 时, 求 CD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 3

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得出相等的边和角, 证明 $\triangle FAE \cong \triangle CDE$, 得出相等的边, 证明四边形 $ACDF$ 是平行四边形, 即可得出结论;

(2) 根据角平分线的性质证明 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 根据等腰三角形的性质即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD, AD = BC, BD = AC$.

$\therefore \angle FAE = \angle CDE$.

$\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$\therefore AE = DE$.

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAE = \angle CDE, \\ AE = DE, \\ \angle FEA = \angle CED, \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAE \cong \triangle CDE (\text{ASA})$.

$\therefore CD = FA$.

又 $\because CD \parallel AF$,

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

$\therefore AC = DF$.

$\because AC = BD$,

$\therefore BD = DF$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BCD = \angle CDE = 90^\circ$.

$\therefore CF$ 平分 $\angle BCD$,

$\therefore \angle DCE = 45^\circ$.

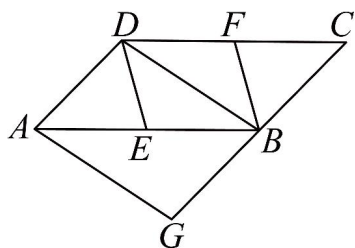
$\therefore \triangle CDE$ 是等腰直角三角形.

$\therefore CD = DE$.

$\therefore$ 点 E 是 AD 的中点,

$\therefore CD = DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = 3$.

22. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别为 AB, CD 的中点, BD 是对角线, $AG \perp DB$ 交 CB 的延长线于 G .



(1) 求证: $DE = BF$;

(2) 若四边形 $BEDF$ 是菱形, 则四边形 $AGBD$ 是什么特殊四边形? 并证明你的结论.

【答案】 (1) 见解析 (2) 矩形, 理由见解析

【解析】

【分析】 此题考查了平行四边形的性质和判定, 菱形的性质, 矩形的判定, 解题的关键是掌握以上知识点.

(1) 根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, 然后证明出四边形 $DEBF$ 是平行四边形, 即可得到 $DE = BF$;

(2) 首先证明出四边形 $AGBD$ 是平行四边形, 如图所示, 连接 DG , 由菱形得到 $DE = BE$, 然后证明出 $AB = DG$, 即可得到平行四边形 $AGBD$ 是矩形.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 在 $\square ABCD$ 中,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$

$\therefore E, F$ 分别为边 AB, CD 的中点

$\therefore BE = \frac{1}{2}AB$, $DF = \frac{1}{2}CD$

$\therefore BE = DF$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形

$\therefore DE = BF$;

【小问 2 详解】

矩形，理由如下：

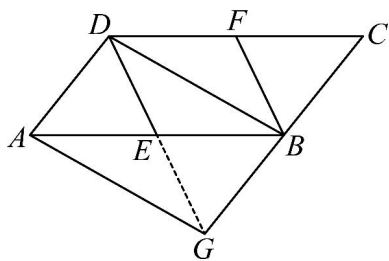
$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$\therefore AD \parallel BC$

$\because AG \parallel DB$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGBD$ 是平行四边形

如图所示，连接 DG



$\because E$ 为边 AB 的中点

$\therefore$ 点 E 在 DG 上

$\because$ 四边形 $BEDF$ 是菱形

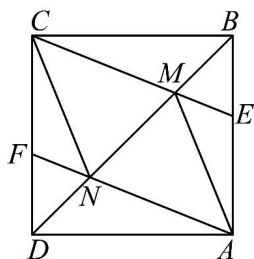
$\therefore DE = BE$

$\because AE = BE, DE = EG$

$\therefore AB = DG$

$\therefore$ 平行四边形 $AGBD$ 是矩形.

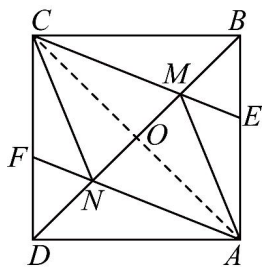
23. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上，且 $AF = CE$ ，对角线 BD 分别交 EC 、 AF 于点 M 、 N ，联结 AM 、 CN 。



(1) 求证：四边形 $AMCN$ 是菱形；

(2) 过点 C 作 $CP \perp CE$ 交 BD 的延长线于点 P ，如果 $CM^2 = MN \cdot NB$ ，求证： $\triangle NCD \sim \triangle NPC$ 。

【答案】(1) 证明：如图，连接 AC ，且交 BD 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ADF = \angle CBE = 90^\circ$, $AD = BC$, $\angle FDN = \angle EBM = 45^\circ$, $OA = OC$, $OB = OD$, $AC \perp BD$,

在 $Rt\triangle ADF$ 与 $Rt\triangle CBE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ AF = CE \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ADF \cong Rt\triangle CBE (HL)$,

$\therefore DF = BE$, $\angle AFD = \angle CEB$,

在 $\triangle DFN$ 与 $\triangle BEM$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle AFD = \angle CEB \\ DF = BE \\ \angle FDN = \angle EBM \end{cases},$$

$\therefore \triangle DFN \cong \triangle BEM (ASA)$,

$\therefore DN = BM$,

$\because OD = OB$,

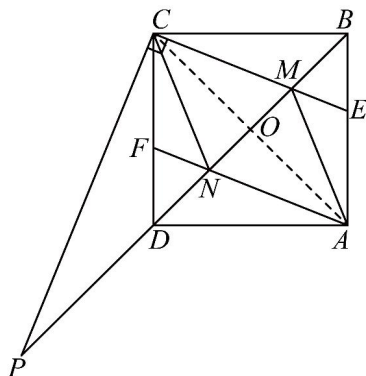
$\therefore OD - DN = OB - BM$,

$\therefore ON = OM$,

$\because OC = OD$, $AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是菱形;

(2) 证明: 如图, 由 (1) 知, 四边形 $AMCN$ 是菱形,



$$\begin{aligned}
&\therefore CM = CN, \\
&\therefore \angle CMN = \angle CNM, \\
&\therefore CM^2 = MN \cdot NB, \\
&\therefore \frac{CM}{MN} = \frac{BN}{CM}, \text{ 即 } \frac{CM}{MN} = \frac{BN}{CN}, \text{ 即可整理为: } \frac{CM}{BN} = \frac{MN}{CN} \\
&\therefore \angle CMN = \angle CNM, \\
&\therefore \triangle CMN \sim \triangle BNC, \\
&\therefore \angle MCN = \angle NBC = 45^\circ, \\
&\therefore CP \perp CE, \\
&\therefore \angle PCN = 90^\circ - \angle MCN = 45^\circ = \angle CDN, \\
&\therefore \angle CND = \angle PNC, \\
&\therefore \triangle NCD \sim \triangle NPC.
\end{aligned}$$

【解析】

【分析】(1) 连接 AC ，先证明 $Rt\triangle ADF \cong Rt\triangle CBE$ ，再证明 $\triangle DFN \cong \triangle BEM$ ，利用菱形的判定即可完成；

(2) 由菱形的性质及 $CM^2 = MN \cdot NB$ 可证明 $\triangle CMN \sim \triangle BNC$ ，从而可得 $\angle MCN = \angle NBC = 45^\circ$ ，再由垂直得 $\angle PCN = \angle CDN$ ，即可证明 $\triangle NCD \sim \triangle NPC$ 。

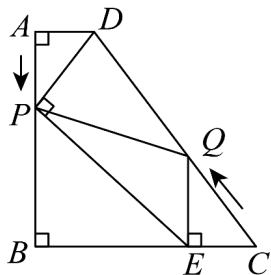
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

24. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = 1\text{cm}$ ， $AB = BC = 4\text{cm}$ ，动点 P 从点 A 出发，沿 AB 方向匀速运动，速度为 4cm/s ；同时，动点 Q 从点 C 出发，沿 CD 方向匀速运动，速度为 5cm/s ， $QE \perp BC$ 于点 E 。设运动时间为 ts ($0 < t < 1$)，解答下列问题：



(1) 当 t 为何值时，以 A ， D ， P 为顶点的三角形与 $\triangle CQE$ 相似？

(2) 是否存在某一时刻 t ，使 PQ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分？若存在，求出 t 的值；若不存

在, 请说明理由;

(3) 是否存在某一时刻 t , 使 $DP \perp PE$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) t 为 $\frac{3}{16}s$ 或 $\frac{1}{3}s$

(2) 不存在; 理由如下:

$$\because QE \parallel DF,$$

$$\therefore \triangle CQE \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{DF}{CD} = \frac{QE}{CQ} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore CQ = 5t \text{ cm},$$

$$\therefore QE = 4t \text{ cm},$$

$$\text{由勾股定理得 } CE = \sqrt{CQ^2 - QE^2} = 3t \text{ cm},$$

若 PQ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分, 则四边形 $PBCQ$ 的面积为梯形面积的一半,

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(1+4) \times 4 = 10 (\text{cm}^2),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}PBCQ} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形}ABCD} = 5 \text{ cm}^2,$$

$$\therefore PB = AB - AP = (4 - 4t) \text{ cm}, \quad BE = BC - CE = (4 - 3t) \text{ cm},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}PBCQ} = S_{\text{梯形}PBEQ} + S_{\triangle CQE} = 5 \text{ cm}^2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(4t + 4 - 4t)(4 - 3t) + \frac{1}{2} \times 3t \times 4t = 5,$$

$$\text{整理得 } 2t^2 - 2t + 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根,

$\therefore$ 不存在某一时刻, 使 PQ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分;

$$(3) \text{ 存在; } t = \frac{19 + \sqrt{105}}{32}s \text{ 或 } \frac{19 - \sqrt{105}}{32}s$$

【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 则易得四边形 $ABFD$ 是矩形, 再由勾股定理求得 CD , 求得 $\frac{QE}{CE}$

的值，再分两种情况考虑相似即可；

(2) 若 PQ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分，则四边形 $PBCQ$ 的面积为梯形面积的一半，用含 t 的代数式表示出四边形 $PBCQ$ 的面积，解关于 t 的方程，根据 t 的值是否存在即可作出判断；

(3) 证明 $\triangle APD \sim \triangle BEP$ ，利用比例式建立方程即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，

则 $\angle BAD = \angle ABC = \angle DFB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 是矩形，

$\therefore BF = AD = 1\text{cm}$ ， $DF = AB = 4\text{cm}$ ，

$\therefore CF = BC - BF = 3\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中， $CD = \sqrt{DF^2 + CF^2} = 5\text{cm}$ ，

$\because QE \perp BC$ ， $DF \perp BC$ ，

$\therefore QE \parallel DF$ ，

$\therefore \triangle CQE \sim \triangle CDF$ ，

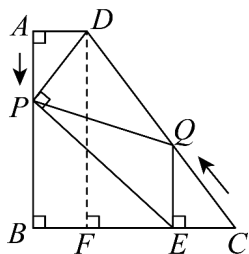
$\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{QE}{CE} = \frac{4}{3}$ ，

若 $\triangle APD \sim \triangle ECQ$ ，则 $\frac{AD}{AP} = \frac{QE}{CE} = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore AP = 4t\text{cm}$ ， $AD = 1\text{cm}$ ，

$\therefore \frac{1}{4t} = \frac{4}{3}$ ，

解得 $t = \frac{3}{16}$ ；



若 $\triangle ADP \sim \triangle ECQ$ ，则 $\frac{AP}{AD} = \frac{QE}{CE} = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore \frac{4t}{1} = \frac{4}{3}$ ，

解得 $t = \frac{1}{3}$;

综上, 当 t 为 $\frac{3}{16}s$ 或 $\frac{1}{3}s$ 时, 以 A, D, P 为顶点的三角形与 $\triangle CQE$ 相似;

【小问 2 详解】

解: 不存在; 理由略;

【小问 3 详解】

解: 存在;

当 $DP \perp PE$ 时, $\angle DPA + \angle EPB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPA + \angle PDA = 90^\circ$,

$\therefore \angle EPB = \angle PDA$,

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \triangle APD \sim \triangle BEP$,

$\therefore \frac{AP}{BE} = \frac{AD}{PB}$,

$\therefore \frac{4t}{4-3t} = \frac{1}{4-4t}$,

整理得 $16t^2 - 19t + 4 = 0$,

解得 $t_1 = \frac{19 + \sqrt{105}}{32}$, $t_2 = \frac{19 - \sqrt{105}}{32}$,

$\therefore$ 当 $t = \frac{19 + \sqrt{105}}{32}s$ 或 $\frac{19 - \sqrt{105}}{32}s$ 时, $DP \perp PE$.

25. 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$, 点 P 在边 AB 上.

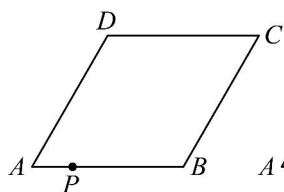


图1

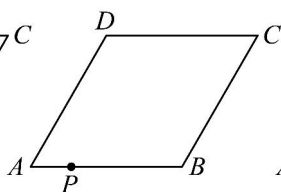


图2

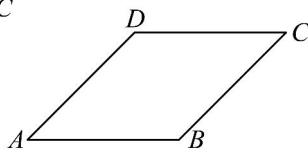


图3

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并加以证明;

(2) 以过点 P 的直线为轴, 将四边形 $ABCD$ 折叠, 使点 B, C 分别落在点 B', C' 上, 且 $B'C'$ 经过点 D , 折痕与四边形的另一交点为 Q .

①如图 2, 如果 $AB = AD$, $\angle C = 60^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 试求 $\frac{AP}{BP}$ 的值;

②如图 3, 如果 $AB = AD$, $\angle C = 45^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 请直接写出 $\frac{AP}{BP}$ 的值.

【答案】(1) 解: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 证明如下:

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle C + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$(2) \text{ ① } \frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \text{ ② } \frac{AP}{BP} = 1$$

【解析】

【分析】(1) 得出 $AB \parallel CD$ 即可得证;

(2) ①设 $B'P$ 与 AD 交于点 E , 设 $AP = a (a > 0)$, $BP = b (b > 0)$, 则 $CD = BC = AB = a + b$,

$EP = \sqrt{3}a$, 再得出 $C'Q \perp CD$, $B'D = B'E$, 然后分别求出 $C'Q$, DQ 的长, 根据

$CD = CQ + DQ = C'Q + DQ$ 建立等式, 化简即可;

②先得出点 B' 在直线 AD 上, 即点 A, B', D, C' 在同一条直线上, 再得出 $AP = B'P = BP$ 即可.

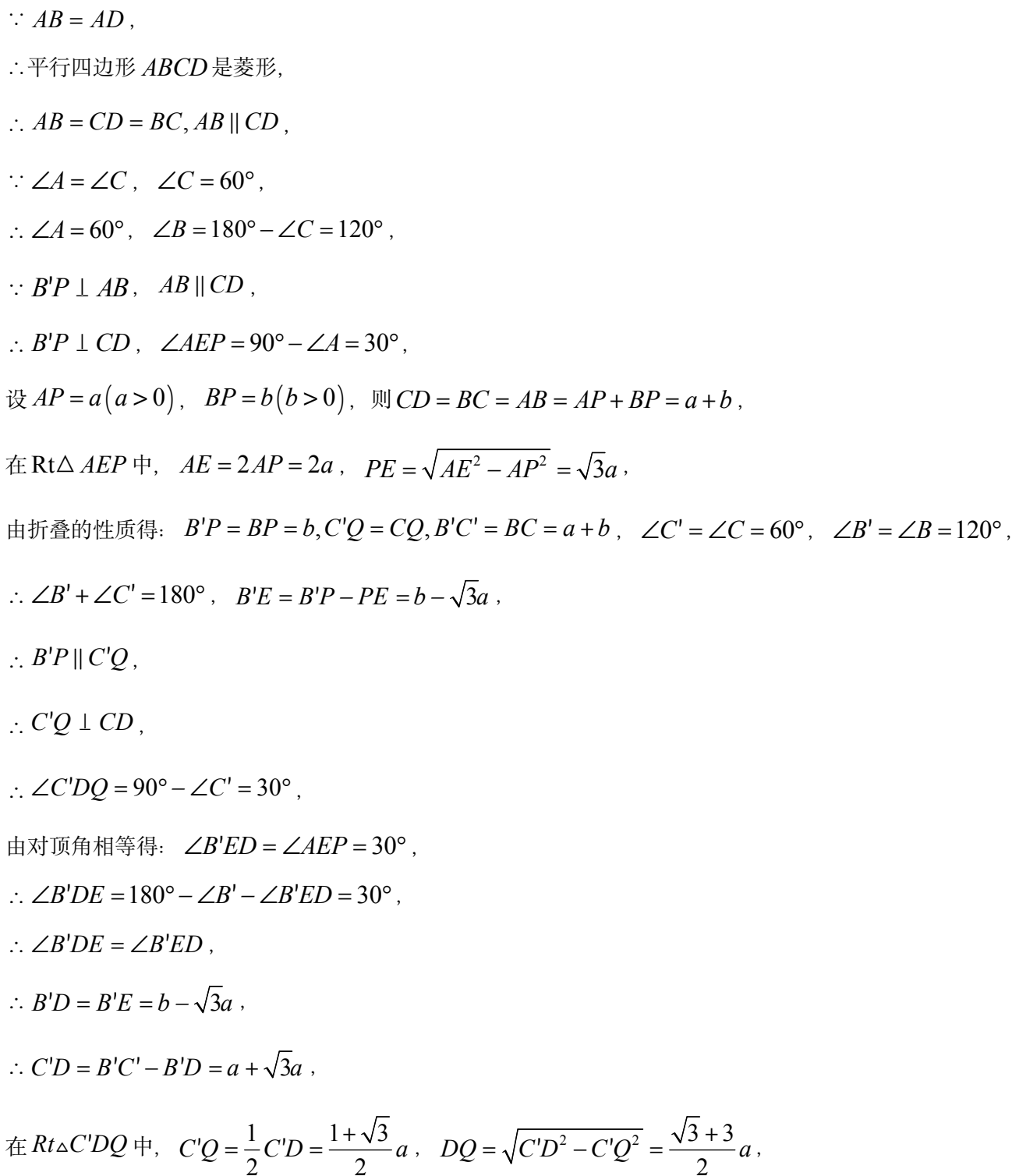
【小问 1 详解】

解: 略.

【小问 2 详解】

解: ①由题意, 画出图形如下:

设 $B'P$ 与 AD 交于点 E ,



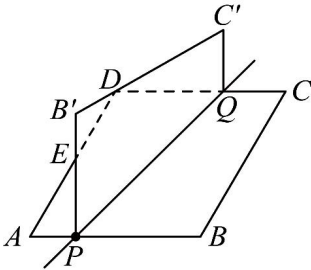
$$\therefore CD = CQ + DQ = C'Q + DQ,$$

$$\therefore a + b = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3} + 3}{2}a,$$

$$\text{整理得: } b = (\sqrt{3} + 1)a,$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{a}{b} = \frac{a}{(\sqrt{3} + 1)a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

②如图, 设 $B'P$ 与 AD 交于点 E ,



$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = CD = BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle C, \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 180^\circ - \angle C = 135^\circ,$$

$$\therefore B'P \perp AB,$$

$$\therefore \angle AEP = 90^\circ - \angle A = 45^\circ,$$

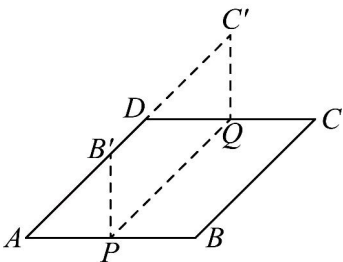
$$\therefore \angle DEP = 180^\circ - \angle AEP = 135^\circ,$$

由折叠的性质得: $\angle C'B'P = \angle B = 135^\circ$,

$$\text{又} \therefore \angle DEP = \angle C'B'P + \angle B'DE,$$

$$\therefore \angle B'DE = 0^\circ,$$

$\therefore$ 点 B' 在直线 AD 上, 即点 A, B', D, C' 在同一条直线上, 如图所示:



$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AB'P \text{ 中, } \angle AB'P = 90^\circ - \angle A = 45^\circ = \angle A,$$

$$\therefore AP = B'P,$$

由折叠的性质得: $B'P = BP,$

$$\therefore AP = BP,$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = 1.$$