

初二（下）数学期中考卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 一次函数 $y = x + 1$ 的图像不经过的象限是()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

【分析】 此题考查了一次函数图象，熟练掌握一次函数图象及其性质是解题的关键.

根据 k 、 b 的符号判断即可.

【详解】 $\because k = 1 > 0$, $b = 1 > 0$,

$\therefore$ 一次函数中 y 随 x 的增大而增大，且与 y 轴交于正半轴，

$\therefore$ 一次函数 $y = x + 1$ 的图像经过第一象限、第二象限、第三象限，

$\therefore$ 图象不经过第四象限，

故选： D .

2. 已知点 $A(m, n)$ 在第二象限，则点 $B(m - 3, -n)$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 C

【解析】

【分析】 先根据点 A 所在象限得到 m 、 n 的取值范围，再推导点 B 横纵坐标的符号，即可判断点 B 所在象限.

【详解】 解： $\because$ 点 $A(m, n)$ 在第二象限，第二象限内点的横坐标小于 0，纵坐标大于 0.

$\therefore m < 0$, $n > 0$.

$\therefore m - 3 < 0$, $-n < 0$.

$\therefore$ 第三象限内点的横坐标和纵坐标都小于 0.

$\therefore$ 点 $B(m - 3, -n)$ 在第三象限.

3. 已知 $f(x) = 2x - 1$ ，那么 $f(-1)$ 的值是 ()

- A. 1 B. 3 C. -3 D. -1

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查的是求函数值，将 $x = -1$ 代入解析式是解题的关键.

将 $x = -1$ 代入，然后依据有理数的运算法则进行计算即可.

【详解】解: $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

故选: C.

4. 下列说法错误的是 ()

A. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

B. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形

C. 每组邻边都相等的四边形是菱形

D. 四个角都相等的四边形是矩形

【答案】B

【解析】

【详解】解: A. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 符合平行四边形的判定定理, 说法正确, 不符合题意.

B. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 不是正方形, 说法错误, 符合题意.

C. 每组邻边都相等的四边形, 四条边都相等, 符合菱形的判定定理, 说法正确, 不符合题意.

D. 四边形内角和为 360° , 四个角相等时每个角均为 90° , 四个角都是直角的四边形是矩形, 说法正确, 不符合题意.

5. 已知反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 经过平移后可以得到函数 $y = \frac{1}{x} - 1$, 关于新函数 $y = \frac{1}{x} - 1$, 下列结论正确的是 ()

A. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大

B. 该函数的图象与 y 轴有交点

C. 该函数图象与 x 轴的交点为 $(1, 0)$

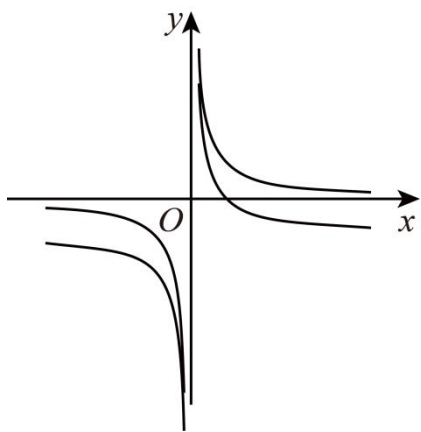
D. 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是 $0 < y \leq 1$

【答案】C

【解析】

【分析】函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 的图象是由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向下平移 1 个单位长度后得到的, 根据两个函数的图像, 可排除 A, B, C 选项, 将 $y=0$ 代入函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 可得到函数与 x 轴交点坐标为 $(1, 0)$, 故 C 选项正确.

【详解】解: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 与函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 的图象如下图所示:



函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 的图象是由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向下平移 1 个单位长度后得到的，

A、由图象可知函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ ，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，选项说法错误，与题意不符；

B、函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 的图象是由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向下平移一个单位后得到的，所以函数与 y 轴无交点，选项说法错误，与题意不符；

C、将 $y=0$ 代入函数 $y = \frac{1}{x} - 1$ 中得， $0 = \frac{1}{x} - 1$ ，解得 $x=1$ ，故函数与 x 轴交点坐标为 $(1,0)$ ，选项说法正确，与题意相符；

D、当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $y = 1 \div \frac{1}{2} - 1 = 1$ ，有图像可知当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时， y 的取值范围是 $y \geq 1$ ，故选项说法错误，与题意不符；

故选：C.

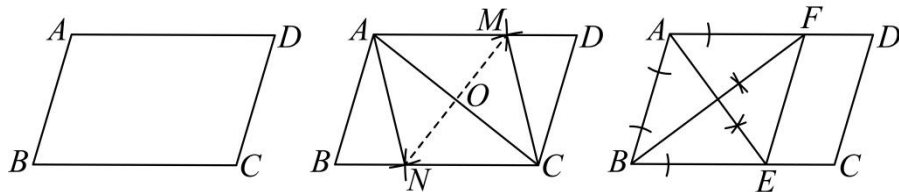
【点睛】本题考查反比例函数的图象，以及函数图象的平移，函数与数轴的交点求法，能够画出图象，并掌握数形结合的方法是解决本题的关键.

6. 如图，在给定的一张平行四边形纸片上作一个菱形. 甲、乙两人的作法如下：

甲：连接 AC ，作 AC 的垂直平分线 MN 分别交 AD ， AC ， BC 于 M ， O ， N ，连接 AN ， CM ，则四边形 $ANCM$ 是菱形.

乙：分别作 $\angle A$ ， $\angle B$ 的平分线 AE ， BF ，分别交 BC ， AD 于 E ， F ，连接 EF ，则四边形 $ABEF$ 是菱形.

根据两人的作法可判断 ()



A. 甲正确，乙错误

B. 乙正确，甲错误

C. 甲、乙均正确

D. 甲、乙均错误

【答案】C

【解析】

【详解】甲和乙的作法都正确：

理由是：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$.

$\therefore \angle DAC = \angle ACN$.

$\because MN$ 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AO = CO$.

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle CON$ 中，

$\because \angle MAO = \angle NCO$, $AO = CO$, $\angle AOM = \angle CON$,

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle CON$ (ASA),

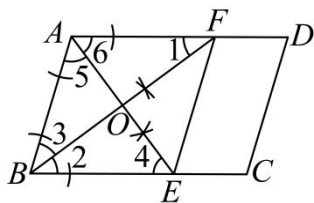
$\therefore MO = NO$.

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 是平行四边形.

$\because AC \perp MN$,

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 是菱形.

如图，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle 6 = \angle 4$.

$\because BF$ 平分 $\angle ABC$, AE 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$, $\angle 5 = \angle 6$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$, $\angle 5 = \angle 4$.

$\therefore AB = AF$, $AB = BE$.

$\therefore AF = BE$.

$\because AF \parallel BE$, 且 $AF = BE$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

$\because AB = AF$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABEF$ 是菱形.

故选 C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 直线 $y = 5x - 6$ 向上平移 5 个单位得到的图像解析式为_____.

【答案】

$$y = 5x - 1$$

【解析】

【分析】根据一次函数平移“上加下减”的规律解答即可.

【详解】解: 将直线 $y = 5x - 6$ 向上平移 5 个单位,

根据平移规律可得新直线解析式为 $y = 5x - 6 + 5$,

整理得 $y = 5x - 1$.

8. 若一次函数 $y = 2x + k + 4$ 的图像在 y 轴上的截距是 5, 则 $k =$ _____.

【答案】

1

【解析】

【分析】根据一次函数 $y = mx + b$ ($m \neq 0$) 的图像在 y 轴上的截距为常数项 b , 结合已知截距为 5, 列出关于 k 的一元一次方程求解即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = 2x + k + 4$ 的图像在 y 轴上的截距是 5

$$\therefore k + 4 = 5,$$

解得 $k = 1$.

9. 点 $A(a-1, a+2)$ 在 x 轴上, 则点 A 的坐标为_____

【答案】 $(-3, 0)$

【解析】

【分析】在 x 轴上的点的纵坐标为 0, 据此求出 a 的值, 即可得到点 A 的坐标.

【详解】解: $\because$ 点 $A(a-1, a+2)$ 在 x 轴上,

$$\therefore a + 2 = 0,$$

$$\therefore a = -2,$$

$$\therefore a - 1 = -2 - 1 = -3,$$

∴点 A 的坐标为 $(-3, 0)$.

10. 已知正 n 边形的一个外角是 45° , 则 $n =$ _____

【答案】 8

【解析】

【分析】 根据正多边形的外角和的特征即可求出多边形的边数.

【详解】 解: $n = 360^\circ \div 45^\circ = 8$.

所以 n 的值为 8.

故答案为: 8.

【点睛】 本题考查多边形的外角和的特征, 解题的关键是掌握多边形的外角和等于 360° , 是基础题型.

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = x^\circ$, $\angle C = (120 - 3x)^\circ$, 那么 $\angle D =$ _____ 度.

【答案】 150

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可知: $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$, 得到 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, 根据已知条件得出方程, 求出 x 值, 即可得到 $\angle D$.

【详解】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$,

∴ $\angle A + \angle D = 180^\circ$,

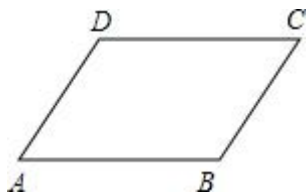
∵ $\angle A = x^\circ$, $\angle C = (120 - 3x)^\circ$,

∴ $x^\circ = 120^\circ - 3x^\circ$,

解得: $x = 30^\circ$,

∴ $\angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,

故答案为: 150.



【点睛】 本题考查平行四边形的性质, 解题关键是熟练掌握平行四边形的性质, 学会用方程思想思考问题, 属于中考常考题型.

12. 已知点 $A(1-a, 5)$, $B(3, b)$ 关于 y 轴对称, 则 $a+b =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数，据此求出 a 和 b 的值，再计算 $a+b$ 即可.

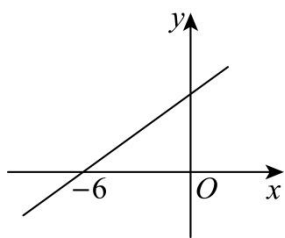
【详解】解：∵点 $A(1-a, 5)$ ， $B(3, b)$ 关于 y 轴对称，

$$\therefore 1-a = -3, \quad b = 5,$$

解得 $a = 4$,

$$\therefore a+b = 4+5 = 9.$$

13. 如图是一次函数 $y = kx + b$ 的图像，那么不等式 $kx + b < 0$ 的解集是_____.



【答案】

$$x < -6$$

【解析】

【详解】解：当 $x < -6$ 时， $y < 0$,

$\therefore$ 不等式 $kx + b < 0$ 的解集为 $x < -6$.

14. 新定义： $[a, b]$ 为一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 为实数)的“关联数”. 若“关联数” $[3, m-5]$ 所对应的一次函数是正比例函数，则 m 的值是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】根据新定义写出对应一次函数，利用正比例函数的定义得到常数项为0，列方程求解即可得到 m 的值.

【详解】解：根据新定义可知，“关联数” $[3, m-5]$ 对应的一次函数为 $y = 3x + (m-5)$ ，其中 $a = 3 \neq 0$ ，符合一次函数定义.

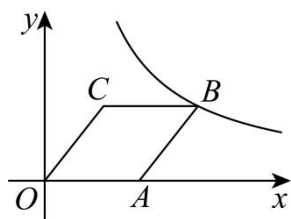
$\therefore$ 该一次函数是正比例函数，

$$\therefore m-5 = 0,$$

解得： $m = 5$.

15. 如图，菱形 $OABC$ 的顶点 C 的坐标为 $(3, 4)$ ，顶点 A 在 x 轴的正半轴上.反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图

象经过顶点 B，则 k 的值为__.



【答案】 32

【解析】

【分析】 根据点 C 的坐标以及菱形的性质求出点 B 的坐标，然后利用待定系数法求出 k 的值.

【详解】 $\because C(3, 4)$,

$$\therefore OC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore CB = OC = 5,$$

则点 B 的横坐标为 $3+5=8$,

故 B 的坐标为: $(8, 4)$,

将点 B 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 得,

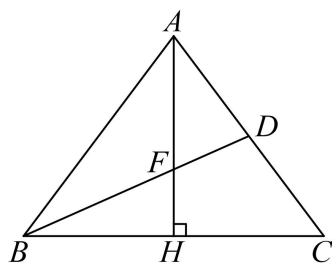
$$4 = \frac{k}{8},$$

解得: $k=32$.

故答案为 32.

【点睛】 本题考查了菱形的性质以及利用待定系数法求反比例函数解析式，解答本题的关键是根据菱形的性质求出点 B 的坐标.

16. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10, BC = 12, AH \perp BC$, 直线 BD 是边 AC 上的中线, 与 AH 交于点 F , 则 AF 的长为_____



【答案】 $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】 根据等腰三角形三线合一的性质得出 AH 是 BC 边上的中线, 利用勾股定理求出 AH 的长, 根据

面积法求解即可.

【详解】解: $\because AB = AC = 10$, $AH \perp BC$,

$\therefore H$ 为 BC 的中点,

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

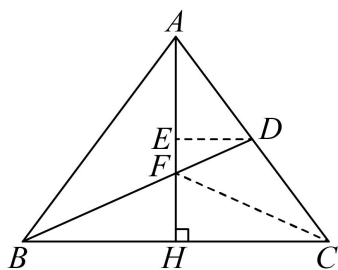
在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 由勾股定理得 $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

设 $AF = x$, 则 $FH = 8 - x$,

$$\because D \text{ 为 } AC \text{ 中点}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 24,$$

连接 CF ,



$$\text{则 } S_{\triangle BCF} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BCD} = 24,$$

取 AH 中点 E , 连接 DE ,

则 DE 是 $\triangle ACH$ 中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CH = 3, \quad \angle AED = \angle AHC = 90^\circ,$$

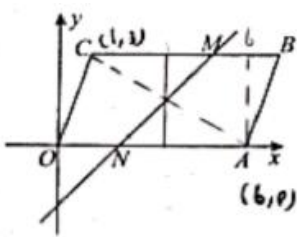
$$\therefore S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} \times AF \times DE = \frac{3}{2}x,$$

$$\because S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} \times BC \times FH = 48 - 6x,$$

$$\therefore 48 - 6x + \frac{3}{2}x = 24,$$

$$\text{解得: } x = \frac{16}{3}.$$

17. 如图, 已知 $\square ABCO$ 中, $A(6, 0)$, $C(1, 3)$, 直线 $y = kx - 1$ 与 BC , OA 分别交于 M , N , 且将 $\square ABCO$ 的面积分成相等的两部分, 则 k 的值是_____



【答案】

$$\frac{5}{7}$$

【解析】

【分析】据平行四边形是中心对称图形，过对称中心的直线平分平行四边形的面积，可知直线 $y = kx - 1$ 必经过平行四边形 $OABC$ 的对称中心，平行四边形的对称中心即为对角线 AC 的中点，利用中点坐标公式求出该点坐标，将其代入直线解析式即可求出 k 的值.

【详解】解：∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，直线 $y = kx - 1$ 将 $\square ABCO$ 的面积分成相等的两部分，

∴ 直线 $y = kx - 1$ 经过平行四边形 $OABC$ 的对称中心，即对角线 AC 的中点，

∵ $A(6,0)$ ， $C(1,3)$ ，

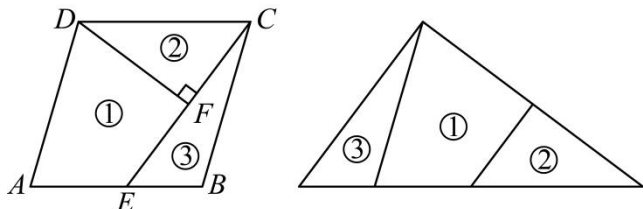
∴ 平行四边形 $OABC$ 的对称中心坐标为 $\left(\frac{6+1}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$ ，即 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，

把点 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 代入 $y = kx - 1$ 得：

$$\frac{3}{2} = \frac{7}{2}k - 1,$$

解得： $k = \frac{5}{7}$.

18. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 5，点 E 在边 AB 上，连结 CE ，过点 D 作 $DF \perp CE$ 于点 F ， CE ， DF 将菱形分割成三部分后，恰好可以拼成一个直角三角形，若 $EC = DF + 2$ ，则线段 AE 的长度为_____.

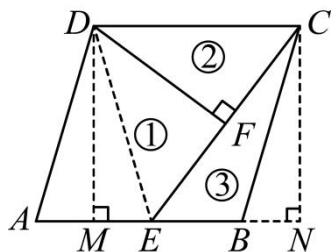


【答案】 $\frac{14}{5}$

【解析】

【分析】由题意可得 $CF = EF$ ，连接 DE ，过点 D, C 分别作 $DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，垂足为点 M, N ，设 $DF = 2x$ ， $AM = a$ ，由 $DF \perp CE$ ，得到 $DC = DE = DA = 5$ ，那么有三线合一可得 $AM = ME = a$ ，则 $CF = EF = x + 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，由勾股定理建立方程求出 $x = 2$ ，则 $CE = 6$ ，可得四边形 $DMNC$ 为矩形，则由双勾股定理可得 $DE^2 - ME^2 = AM^2 = CN^2 = CE^2 - EN^2$ ，继而建立方程求出 a ，即可求解 AE 。

【详解】解：由题意得可得 $CF = EF$ ，连接 DE ，过点 D, C 分别作 $DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，垂足为点 M, N ，



设 $DF = 2x$ ， $AM = a$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = CD = BC = AB = 5$ ， $AD \parallel BC, CD \parallel AB$ ，

$\because CF = EF$ ， $DF \perp CE$ ，

$\therefore DC = DE = DA = 5$ ，

$\because DM \perp AB$ ，

$\therefore AM = ME = a$

$\because EC = DF + 2 = 2x + 2$ ，

$\therefore CF = EF = x + 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，由勾股定理得 $DF^2 + FC^2 = DC^2$ ，

$\therefore (2x)^2 + (x + 1)^2 = 5^2$ ，

解得： $x = 2$ 或 $x = -\frac{12}{5}$ （舍）

$\therefore CE = 6$ ，

$\because CD \parallel AB$ ， $DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，

$\therefore \angle DMN = \angle N = \angle NCD = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $DMNC$ 为矩形，

$\therefore CD = MN = 5$ ，

$$\therefore EN = 5 - a,$$

$$\because DE^2 - ME^2 = AM^2 = CN^2 = CE^2 - EN^2$$

$$\therefore 5^2 - a^2 = 6^2 - (5 - a)^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{7}{5},$$

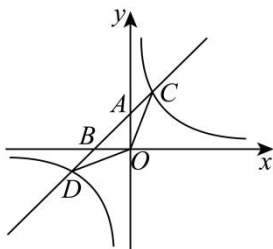
$$\therefore AE = 2a = \frac{14}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{14}{5}.$$

【点睛】本题考查了矩形的判定与性质，菱形的性质，勾股定理，解一元二次方程，等腰三角形的性质等知识点，难度较大，正确构造辅助线是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 64 分)

19. 如图，直线 $y_1 = x + b$ 交 x 轴于点 B ，交 y 轴于点 $A(0, 2)$ ，与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图像交于 $C(1, m)$ ， $D(n, -1)$ ，连接 OC 、 OD .



(1) 求 k 的值;

(2) $\triangle COD$ 的面积.

【答案】(1) 3 (2) 4

【解析】

【分析】(1) 先由点 $A(0, 2)$ 求出 $b = 2$ ，进而求出 C 、 D 的坐标，再将点 C 的坐标代入 $y_2 = \frac{k}{x}$ ，即可得 k 的值;

(2) 根据 $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}OA \cdot (|x_C| + |x_D|)$ 求解.

【小问 1 详解】

解：直线 $y_1 = x + b$ 交 y 轴于点 $A(0, 2)$,

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{直线 } y_1 = x + 2,$$

$\therefore$ 点 $C(1, m)$, $D(n, -1)$ 在 $y_1 = x + 2$ 上,

$$\therefore m = 1 + 2 = 3, \quad n + 2 = -1,$$

$$\therefore n = -3,$$

$$\therefore C(1, 3), \quad D(-3, -1),$$

$\therefore$ 点 $C(1, 3)$ 在 $y_2 = \frac{k}{x}$ 上,

$$\therefore k = 1 \times 3 = 3;$$

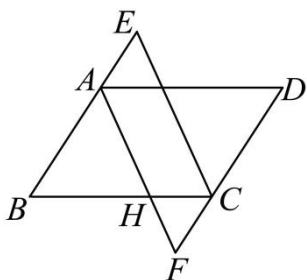
【小问 2 详解】

解: $\therefore A(0, 2)$,

$$\therefore OA = 2,$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} OA \cdot (|x_C| + |x_D|) = \frac{1}{2} \times 2 \times (1 + 3) = 4.$$

20. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BA, DC 的延长线上, 且 $BE = DF$. 连接 AF , 交 BC 于点 H , 连接 EC . 求证: 四边形 $EAFC$ 是平行四边形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质得到 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, 则可证明 $AE = CF$, 据此可证明结论.

【详解】 证明: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore BE - AB = DF - CD, \quad \text{即 } AE = CF,$$

$$\text{又 } \therefore AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $EAFC$ 是平行四边形.

21. 已知正五边形 $ABCDE$, 请仅用无刻度的直尺作图, 并完成相应的任务 (保留作图痕迹, 不写作法).

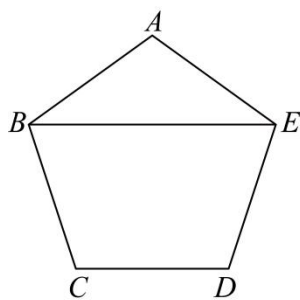


图1

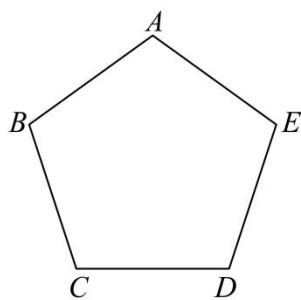


图2

【初步感知】

(1) 如图 1，请直接写出 $\angle ABE$ 的度数；

【实践探究】

(2) 请在图 2 中作出以 BE 为对角线的菱形 $ABME$ ，并证明你的结论；

【拓展延伸】

(3) 请在图 2 正五边形 $ABCDE$ 的基础上再设计一个新的正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 。（不需要证明）

【答案】 (1) $\angle ABE = 36^\circ$ ；(2) 见解析；(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查作图-复杂作图，菱形的判定，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题。

- (1) 利用正五边形与等腰三角形的性质求解；
 (2) 连接 BD ， CE 交于点 M ，四边形 $ABME$ 即为所求；
 (3) 各边延长线的交组成的五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 即为所求。

【详解】 解： $\because AB = AE$ ， $\angle A = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ；$$

故答案为： 36° ；

(2) 如图 1 所示，连接 BD 、 CE 相交于点 M ，菱形 $ABME$ 为所求图形，

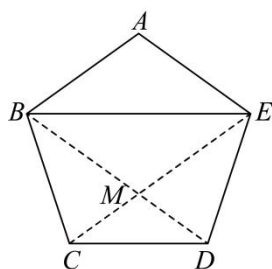


图1

证明：在正五边形 $ABCDE$ 中，每个内角都相等且等于 108° ，每条边都相等，

可得 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ，从而 $\angle ABE = \angle CBD$

$$\therefore AE = AB, \quad \angle BAE = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC - \angle ABE - \angle CBD = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DBE,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

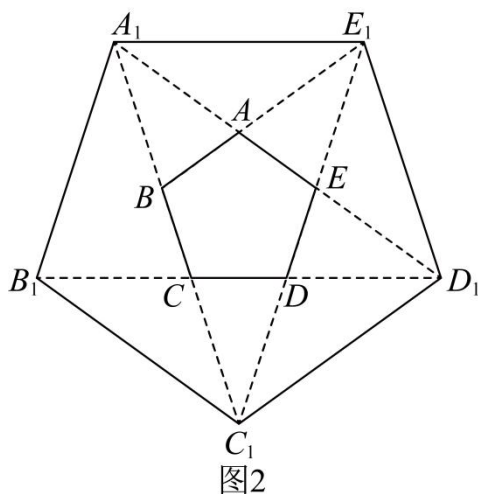
同理可证: $AB \parallel CE$.

$\therefore$ 四边形 $ABME$ 为平行四边形,

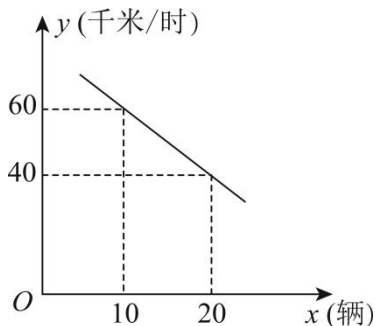
又 $AE = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABME$ 为菱形.

(3) 如图, 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 即为所求.



22. 某地区交通管理部门通过对道路流量的大数据分析可知, 某高架路上车辆的平均速度 y (千米/时) 与高架路上每百米车的数量 x (辆) 的关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不必写 x 的取值范围);

(2) 如果某时刻监测到这一高架路上车辆的平均速度为 30 千米/时.

①求该时刻高架路上每百米车的数量;

②如果车辆的平均速度小于 20 千米/时, 将严重拥堵, 需启动限流措施. 而此刻开始这一高架路上每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆, 为了避免严重拥堵, 那么最晚几分钟需启动限流措施?

【答案】(1) $y = -2x + 80$

(2) ①25 辆; ②为了避免严重拥堵, 那么最晚 20 分钟需启动限流措施.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) ①根据 (1) 所求函数解析式, 令函数值为 30, 求出 x 的值即可得到答案; ②令函数值小于 20 求出 x 的取值范围, 再根据每百米车辆数每 4 分钟增加 1 辆和现在每百米车的数量为 25 辆列式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{由题意得, } \begin{cases} 10k + b = 60 \\ 20k + b = 40 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 80 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x + 80$;

【小问 2 详解】

解: ①在 $y = -2x + 80$ 中, 当 $y = 30$ 时, 则 $-2x + 80 = 30$, 解得 $x = 25$,

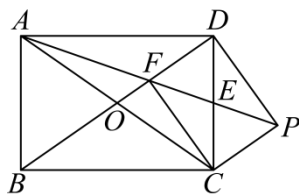
$\therefore$ 该时刻高架路上每百米车的数量为 25 辆;

②当 $-2x + 80 < 20$ 时, 解得 $x > 30$,

$$(30 - 25) \times 4 = 20 \text{ 分钟},$$

答: 为了避免严重拥堵, 那么最晚 20 分钟需启动限流措施.

23. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 E 是 CD 的中点, 连接 AE 交 BD 于点 F , 延长 AE 到点 P , 使 $FP = AF$, 连接 CF , CP , DP .



(1) 求证: 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $CFDP$ 是矩形, 且 $AD = \sqrt{2}$, 求 AB 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) AB 的长度为 1

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质推出 OF 是 $\triangle ACP$ 的中位线, 利用 ASA 证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$, 根据全等三角形的性质得到 $EF = EP$, 结合 $DE = CE$, 即可判定四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 根据矩形的性质得到 $EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD$, $FP = CD$, 根据勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore FP = AF,$$

$\therefore OF$ 是 $\triangle ACP$ 的中位线,

$$\therefore OF \parallel CP,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle PCE,$$

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE,$$

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle FDE = \angle PCE \\ DE = CE \\ \angle DEF = \angle CEP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEP (\text{ASA}),$$

$$\therefore EF = EP,$$

又 $\because DE = CE$,

$\therefore$ 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB, \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

若四边形 $CFDP$ 是矩形, 则

$$EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD, \quad FP = CD,$$

$$\because AF = FP,$$

$$\therefore AE = AF + EF = \frac{3}{2}CD,$$

$$\therefore AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \left(\frac{3}{2}CD\right)^2,$$

$$\therefore AD^2 = 2CD^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}CD \text{ 或 } AD = -\sqrt{2}CD \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AD = \sqrt{2},$$

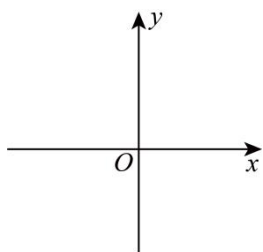
$$\therefore CD = AB = 1.$$

【点睛】此题考查了矩形的性质，三角形中位线的性质，平行四边形的判定，勾股定理，全等三角形的判定与性质，利用矩形的性质证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$ 是解题的关键.

24. 已知直线 $y = kx + b$ (其中 $kb \neq 0$)，我们把直线 $y = bx + k$ 称为直线 $y = kx + b$ 的“轮换直线”. 例如:

直线 $y = 3x + 2$ 的“轮换直线”是直线 $y = 2x + 3$.

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l_1: y = x + m$ ($m \neq 1$) 的“轮换直线”是直线 l_2 ， l_1 交 y 轴于点 A ， l_2 交 y 轴于点 B ， l_1 和 l_2 相交于点 M .



备用图

(1) 如果直线 l_1 经过点 $(-1, -3)$.

①求直线 l_1 、 l_2 的表达式和点 M 的坐标;

②点 N 是平面内一点，如果四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM \parallel BN$ ，求点 N 的坐标.

(2) 将 AM 绕点 A 顺时针旋转 90° ，点 M 的对应点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上. 小明说: “直线 l_3 一定经过一个定点.” 你认为他的说法是否正确? 如果正确，请求这个定点; 如果不正确，请说明理由.

【答案】(1) ① $M(1, -1)$; ② $N(-2, -1)$

(2) 正确，直线 l_3 过定点 $(0, -1)$

【解析】

【分析】(1) ①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$ ，求出 m 的值，进而得到直线 l_2 的表达式，联立直线 l_1 、 l_2 的表达式，即可求出 M 的坐标；②根据四边形 $AMBN$ 是等腰梯形，且 $AM \parallel BN$ ，得到 N 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上，且 $BM = AN$ ，求出直线 BN 的解析式，设 $N(t, t+1)$ ，根据 $BM = AN$ ，利用两点间距离公式建立方程求解即可；

(2) 根据题意得到直线 l_2 的表达式为： $y = mx + 1$ ，求出 $A(0, m), B(0, 1)$ ，联立直线 l_1 、 l_2 的表达式，求出 $M(1, 1+m)$ ，如图，过点 M, M_1 作 y 轴的垂线，垂足分别为 G, H ，证明 $\triangle GAM \cong \triangle HM_1A$ (AAS)，得到 $M_1(1, m-1)$ ，根据点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上，求出直线 l_3 的解析式为： $y = mx - 1$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，即可得出直线 l_3 过定点 $(0, -1)$ 。

【小问1详解】

解：①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$ ，则 $-3 = -1 + m$ ，

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的表达式为: } y = x - 2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的表达式为: } y = -2x + 1,$$

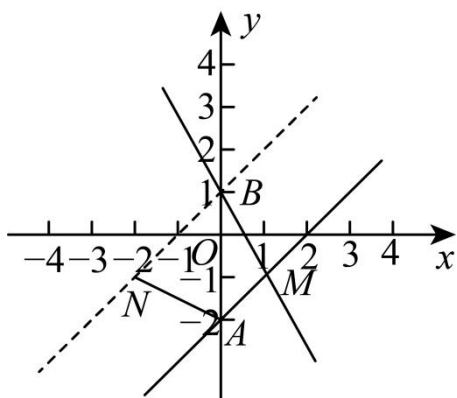
$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y_A = 0 - 2 = -2, y_B = -2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$\therefore A(0, -2), B(0, 1),$$

$$\text{联立直线 } l_1、l_2 \text{ 的表达式, 则 } \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ 即 } M(1, -1),$$

②如图,



$\because$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$,

$\therefore N$ 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上, 且 $BM = AN$,

设直线 BN 的解析式为 $y = x - n$,

将点 $B(0, 1)$ 代入得: $1 = 0 - n$,

解得: $n = -1$,

$\therefore$ 直线 BN 的解析式为 $y = x + 1$,

设点 $N(t, t + 1)$,

由图形可得 $t < 0$,

$$\therefore \sqrt{(0-t)^2 + [-2-(t+1)]^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2},$$

$$\therefore 2t^2 + 6t + 9 = 5,$$

解得: $t = -1$ 或 $t = -2$,

$$\text{当 } t = -1 \text{ 时, } N(-1, 0), \text{ 此时 } BN = \sqrt{(0+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1-0)^2 + [(-1)+2]^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore AM \parallel BN$,

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是平行四边形,

$\therefore AN \parallel BM$,

则四边形 $AMBN$ 不是梯形, 故舍去,

$$\text{当 } t = -2, \quad N(-2, -1),$$

$$\text{同理: } BN = \sqrt{(0+2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1-0)^2 + [(-1)+2]^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore AM \parallel BN$, AN 与 BM 不平行,

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形,

故 $t = -2$, 则 $N(-2, -1)$;

【小问2 详解】

解：根据题意：直线 l_2 的表达式为： $y = mx + 1$ ，

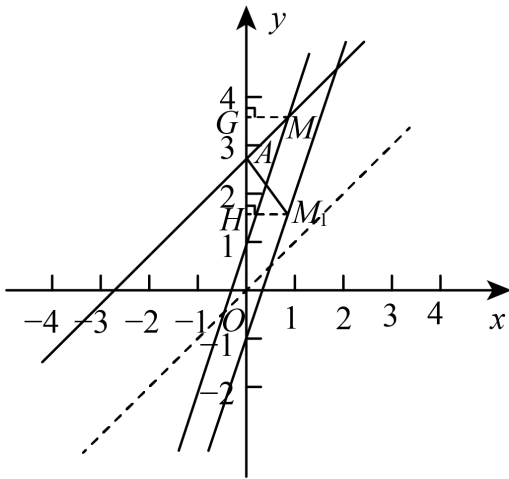
令 $x = 0$ ，则 $y_A = 0 + m = m, y_B = m' \cdot 0 + 1 = 1$ ，

$\therefore A(0, m), B(0, 1)$ ，

联立直线 l_1 、 l_2 的表达式，则 $\begin{cases} y = x + m \\ y = mx + 1 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + m \end{cases}$ ，即 $M(1, 1 + m)$ ，

如图，过点 M, M_1 作 y 轴的垂线，垂足分别为 G, H ，



则 $\angle MGA = \angle M_1HA = 90^\circ$ ， $G(0, 1 + m)$ ，

$\backslash GM = 1, AG = OG - OA = 1$ ，

由旋转的旋转得： $AM = AM_1$ ， $\angle MAM_1 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GAM + \angle HAM_1 = \angle GAM + \angle GMA$ ，

$\therefore \angle HAM_1 = \angle GMA$ ，

$\therefore \triangle GAM \cong \triangle HM_1A$ (AAS)，

$\backslash GM = AH = 1, AG = HM_1 = 1$ ，

$\therefore M_1(1, m - 1)$ ，

$\therefore$ 点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上，

设直线 l_3 的解析式为: $y = mx + n$, 则 $m - 1 = m + n$,

解得: $n = -1$,

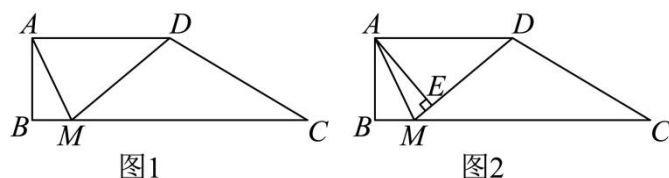
$\therefore$ 直线 l_3 的解析式为: $y = mx - 1$,

当 $x = 0$ 时, $y = -1$,

$\therefore$ 直线 l_3 过定点 $(0, -1)$.

【点睛】 本题考查的是一次函数综合题, 旋转的性质, 需要掌握待定系数法确定函数关系式, 函数图象上点的坐标特征, 全等三角形的判定与性质, 两条直线平行及交点等相关知识, 属新定义型题目.

25. 已知, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 10$, $AD = 5$, M 是 BC 边上的任意一点, 连接 DM , 连接 AM .



- (1) 若 AM 平分 $\angle BMD$, 求 BM 的长;
 (2) 过点 A 作 $AE \perp DM$, 交 DM 所在直线于点 E .

- ① 设 $BM = x$, $AE = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;
 ② 连接 BE , 当点 E 是 DM 的中点时, 求 BE 的长.

【答案】 (1) 满足条件的 BM 的值为 1 或 9;

(2) ① $y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34}$; ② $BE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $ABHD$ 是矩形, 则 $AD = BH = 5$, $AB = DH = 3$, 分两种情形求解即可解决问题;

(1) ① 作 $MH \perp AD$ 于 H 利用面积法构建函数关系式即可;

② 延长 AE 交 BC 于点 N , 证 $\triangle ADE \cong \triangle NME$, 得 $MN = AD = 5$, 再由 AE 垂直平分 DM , 知 $AM = AD = 5$, 又 $AB = 3$, 则 $BM = 4$, 据此得 $BN = 9$, $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = 3\sqrt{10}$, 根据 $BE = \frac{1}{2}AN$

可得答案.

【小问 1 详解】

$$\therefore AD = BH = 5, \quad AB = DH = 3,$$
$$\therefore \angle AMB = \angle AMD = \angle DAM \text{ ,}$$

$$\therefore DA = DM = 5,$$

$$\therefore MH = \sqrt{DM^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BM = BH - MH = 1;$$

$$\therefore BM' = BH + HM' = 9;$$

【小问 2 详解】

在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中, $DM = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AE,$$

$$\therefore 5 \times 3 = y \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 34} ,$$

$$\therefore y = \frac{15\sqrt{x^2 - 10x + 34}}{x^2 - 10x + 34};$$

② 如图 3, 延长 AE 交 BC 于点 N ,

