

八下期中复习练习卷 4

一、选择题

1. 若一个多边形的外角和是它的内角和的 $\frac{1}{3}$ ，则这个多边形是 ()

- A. 五边形 B. 六边形 C. 七边形 D. 八边形

【答案】D

【解析】

【分析】根据多边形的内角和的计算公式与外角和是 360° 列出方程，解方程即可. 本题考查的是多边形的内角与外角，掌握 n 边形的内角和为 $(n-2)\times 180^\circ$ 、外角和是 360° 是解题的关键.

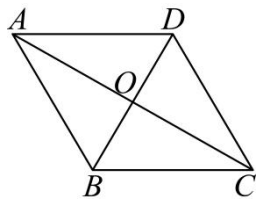
【详解】解：设这个多边形边数是 n ，

$$\text{则 } (n-2)\times 180^\circ = 3\times 360^\circ,$$

解得 $n=8$.

故选：D.

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 垂足为 O . 添加下列哪个条件, 不能使 $\square ABCD$ 成为正方形的是 ()



- A. $AC = BD$ B. $\angle ABC = 90^\circ$ C. $AD = BD$ D. $OA = OB$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平行四边形、菱形、正方形的判定定理，首先明确平行四边形、菱形、正方形的判定关系：平行四边形中，对角线互相垂直的是菱形；菱形要成为正方形，需满足有一个内角为直角或对角线相等. 本题先由 $AC \perp BD$ 得出 $\square ABCD$ 是菱形，再分析各选项能否让菱形变为正方形.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $AC \perp BD$ ，

$\therefore \square ABCD$ 是菱形.

若 $AC = BD$ ，菱形的对角线相等. 根据“对角线相等的菱形是正方形”，此时菱形 $ABCD$ 是正方形，故A不符合“不能使”的要求.

若 $\angle ABC = 90^\circ$ ，菱形的一个内角为直角. 根据“有一个角是直角的菱形是正方形”，此时菱形 $ABCD$ 是正方形，故B不符合“不能使”的要求.

若 $AD = BD$ ， AD 是菱形的边， BD 是对角线. 仅“边与对角线相等”无法推出菱形有直角或对角线相等，

因此不能保证菱形 $ABCD$ 是正方形，故 C 符合“不能使”的要求.

若 $OA = OB$ ，因菱形对角线互相平分 ($OA = OC$, $OB = OD$)，则 $AC = 2OA$, $BD = 2OB$ ，即 $AC = BD$. 结合“对角线相等的菱形是正方形”，此时菱形 $ABCD$ 是正方形，故 D 不符合“不能使”的要求.

故选 C

3. 下列关于四边形的说法中，正确的是 ()

- A. 一组对边相等的四边形是平行四边形 B. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形
C. 对角线互相垂直的四边形是菱形 D. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

【答案】B

【解析】

【分析】此题重点考查平行四边形的判定、矩形的判定、菱形的判定及正方形的判定，根据各选项的条件，结合平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理逐一分析，熟练掌握平行四边形及特殊的平行四边形的判定定理是解题的关键.

【详解】解：∵ 一组对边相等的四边形不一定是平行四边形，

∴ A 不符合题意；

∵ 对角线互相平分的四边形是平行四边形，对角线相等的平行四边形是矩形，

∴ 对角线互相平分且相等的四边形是矩形，

∴ B 符合题意；

∵ 对角线互相垂直的四边形不一定是菱形，

∴ C 不符合题意；

∵ 对角线互相平分的四边形是平行四边形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形，

∴ 对角线互相垂直平分的四边形是菱形，

∴ 对角线互相垂直平分的四边形不一定是正方形，

∴ D 不符合题意，

故选：B.

4. 已知点 $P(2a, 1-3a)$ 在第二象限，且点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之和为 6，则 a 的值为 ()

- A. -1 B. 1 C. -5 D. $\frac{7}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了点到坐标轴的距离，象限中点的符号问题，一元一次方程的应用.

根据第二象限点的横坐标是负数，纵坐标是正数，利用点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之和为 6，列出方程求解即可.

【详解】解： $\because$ 点 $P(2a, 1-3a)$ 在第二象限，

$$\therefore 2a < 0, \quad 1-3a > 0.$$

$\therefore$ 点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之和为 6，

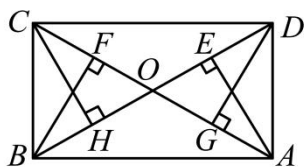
$$\therefore |2a| + |1-3a| = 6,$$

$$\therefore -2a + 1 - 3a = 6,$$

解得： $a = -1$.

故选 A.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线，过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线，如果四条垂线段拼成一个四边形，那么这个四边形为 ()



A. 平行四边形

B. 菱形

C. 矩形

D. 正方形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质、菱形的判定、三角形的面积计算，熟知菱形的判定是解答的关键. 先根据矩形的性质得到 $AC = BD$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABD}$ ，再根据三角形的面积公式得到

$BF = CH = DG = AE$ ，进而利用四条边相等的四边形是菱形可得结论.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AC = BD, \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABD},$$

$$\because AE \perp BD, \quad CH \perp BD, \quad BF \perp AC, \quad DG \perp AC,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BF = \frac{1}{2} BD \cdot CH = \frac{1}{2} AC \cdot DG = \frac{1}{2} BD \cdot AE,$$

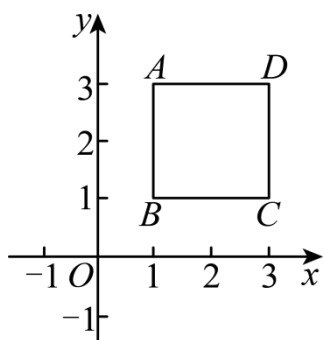
$$\therefore BF = CH = DG = AE,$$

$\therefore$ 四条垂线段拼成一个菱形，

故选：B.

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，顶点 A 的坐标为 $(1, 3)$ ， $AB \parallel y$ 轴且边长为 2，规定把正方形 $ABCD$ 先沿

x 轴翻折，再向左平移 1 个单位长度为一变换，连续经过 2026 次变换后，正方形 $ABCD$ 的顶点 B 的坐标为 ()



- A. $(-2025, -1)$ B. $(-2025, 1)$ C. $(-2026, -1)$ D. $(-2026, 1)$

【答案】B

【解析】

【分析】依次按要求变化后写出坐标，得出坐标与变化次数 n 的关系，然后求解即可.

【详解】解: $\because$ 点 $A(1, 3)$, $AB \parallel y$ 轴, 且边长为 2,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1, 1)$,

$\therefore$ 点 B 关于 x 轴对称的点为 $(1, -1)$, 向左平移 1 个单位长度后的坐标为 $(0, -1)$

同理可得, 第 2 次变换后的坐标为 $(-1, 1)$,

第 3 次变换后的坐标为 $(-2, -1)$,

第 4 次变换后的坐标为 $(-3, 1)$,

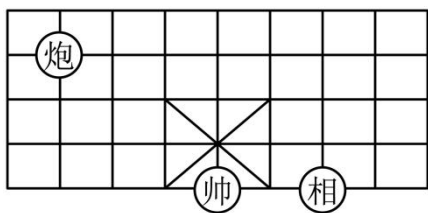
.....

$\therefore$ 当 n 为奇数时, 第 n 次变换后的坐标为 $(1-n, -1)$; 当 n 为偶数时, 第 n 次变换后的坐标为 $(1-n, 1)$,

$\therefore$ 连续经过 2026 次变换后, 正方形 $ABCD$ 的顶点 B 的坐标为 $(-2025, 1)$.

二、填空题

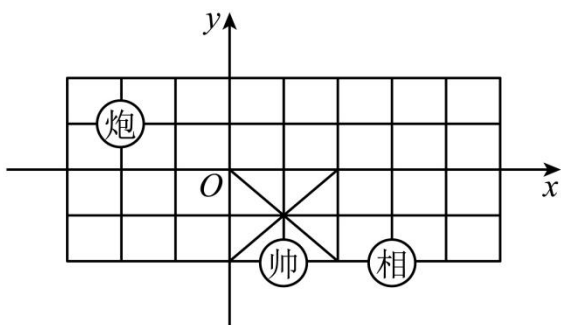
7. 如图, 是象棋棋盘的一部分. 若 (帅) 位于点 $(1, -2)$ 上, (相) 位于点 $(3, -2)$ 上, 则 (炮) 位于点上 _____ .



【答案】 $(-2, 1)$.

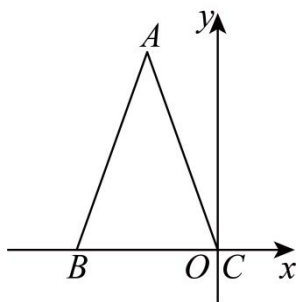
【解析】

【详解】试题分析：根据(帅)位于点 $(1, -2)$ 上，(相)位于点 $(3, -2)$ 上，确定坐标系的位置(如图)，从而确定(炮)位于点 $(-2, 1)$ 上.



考点：坐标确定位置.

8. 如图是腰长为6的等腰三角形放入平面直角坐标系中，已知点 B 的坐标为 $(-4, 0)$ ， $AB=AO$ ，则点 A 的坐标是_____.

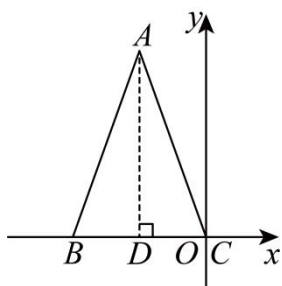


【答案】 $(-2, 4\sqrt{2})$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，勾股定理，坐标与图形性质，过点 A 作 $AD \perp OB$ 于 D ，由三线合一可得 $OD = \frac{1}{2}OB = 2$ ，再利用勾股定理求出 AD 即可求解，掌握等腰三角形的性质是解题的关键.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AD \perp OB$ 于 D ，则 $\angle ADO = 90^\circ$ ，



$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-4, 0)$,

$\therefore OB = 4$,

$\therefore AB = AO = 6$, $AD \perp OB$,

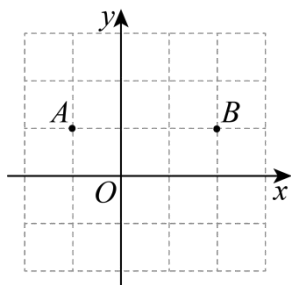
$\therefore OD = \frac{1}{2}OB = 2$,

$\therefore AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(-2, 4\sqrt{2})$,

故答案为: $(-2, 4\sqrt{2})$.

9. 如图所示, 在 5×5 的方格纸中, 每个小正方形的边长都是 1, 点 O, A, B 都在方格纸的交点 (格点) 上, 建立如图所示的平面直角坐标系, 在 x 轴下方的格点上找点 C , 使 ABC 的面积为 3, 则这样的点 C 共有 _____ 个.

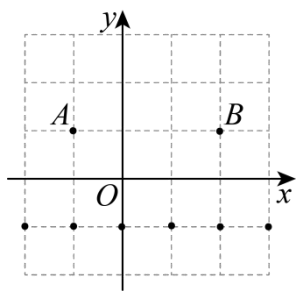


【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查平面直角坐标系, 熟练掌握平面直角坐标系中图形的面积是解题的关键, 根据点 A, B 的坐标判断出 $AB \parallel x$ 轴, 然后根据三角形的面积求出点 C 到 AB 的距离, 最后根据题意即可判断出点 C 的位置, 进而得到答案.

【详解】 解: 如图



由题可得: $AB = 3$, $S_{\triangle ABC} = 3$

设点 C 到 AB 的距离为 a ,

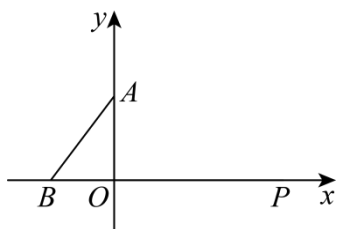
$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times a = 3,$$

$$\therefore a = 2,$$

$\therefore$ 点 C 到 AB 的距离是 2, 且在 x 轴下方, 并与 AB 平行的直线上的格点有 6 个,

故答案为: 6.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 为 $(0, 2)$, 点 B 为 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, 点 P 为 x 轴上一点, 将 $\triangle ABP$ 沿 AP 所在的直线翻折后, 使得点 B 的对应点 B' 恰好落在 y 轴上, 则 P 点坐标为_____.



【答案】 $(6, 0)$ 或 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了翻折的性质, 勾股定理等知识, 先由勾股定理求出 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{5}{2}$, 再根据翻折的性质得 $AB = AB' = \frac{5}{2}$, $BP = B'P$, 设 $P(a, 0)$, 分两种情况: 当点 P 在 x 轴的正半轴上时; 当点 P 在 x 轴的负半轴上时, 分别根据 $BP = B'P$ 列方程求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 A 为 $(0, 2)$, 点 B 为 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$,

$$\therefore OA = 2, OB = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{5}{2},$$

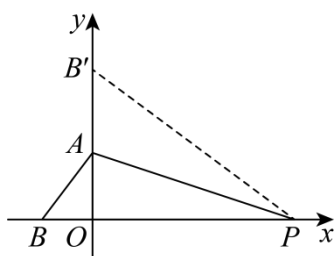
$\therefore$ 将 $\triangle ABP$ 沿 AP 所在的直线翻折后, 使得点 B 的对应点 B' 恰好落在 y 轴上,

$$\therefore AB = AB' = \frac{5}{2}, \quad BP = B'P,$$

设 $P(a, 0)$,

分以下两种情况:

当点 P 在 x 轴的正半轴上时, 如图:



$$\text{则 } OB' = OA + AB' = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}, \quad BP = B'P = BO + OP = \frac{3}{2} + a,$$

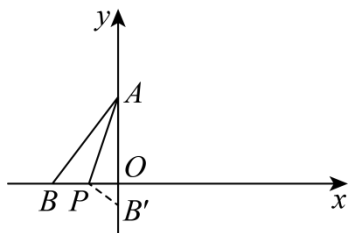
$$\therefore B'P^2 = OB'^2 + OP^2 = \frac{81}{4} + a^2,$$

$$\therefore \frac{81}{4} + a^2 = \left(\frac{3}{2} + a\right)^2,$$

解得 $a = 6$,

$\therefore P$ 点坐标为 $(6, 0)$;

当点 P 在 x 轴的负半轴上时, 如图:



$$\text{则 } OP = -a, \quad OB' = AB' - OA = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}, \quad BP = BO - OP = \frac{3}{2} + a, \quad B'P^2 = OB'^2 + OP^2 = \frac{1}{4} + a^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4} + a^2 = \left(\frac{3}{2} + a\right)^2,$$

解得 $a = -\frac{2}{3}$,

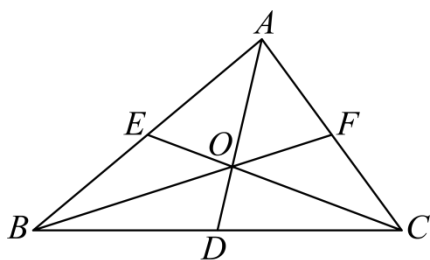
$\therefore P$ 点坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

综上所述, P 点坐标为 $(6, 0)$ 或 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

故答案为: $(6, 0)$ 或 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

11. 如图, $\triangle ABC$ 的中线 AD 、 BF 交于点 O , 连接 CO 并延长交 AB 于点 E , 如果 $S_{\triangle COD} = 5$, 那么

$S_{\triangle ABF} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 15

【解析】

【分析】由题意得 $AO:OD = 2:1$, $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 然后问题可求解.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 的中线 AD 、 BF 交于点 O , $S_{\triangle COD} = 5$,

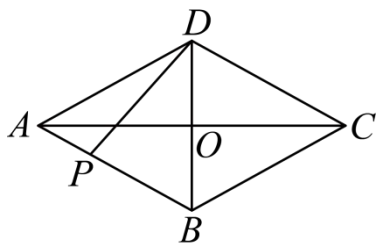
$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AO:OD = 2:1$, $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

$\therefore S_{\triangle AOC} = 2S_{\triangle COD} = 10$,

$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle DOC} = 15$.

12. 如图, 菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 O 点, $AC = 24$, $BD = 10$, 点 P 是边 AB 上的一个动点, 则 DP 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{120}{13}$

【解析】

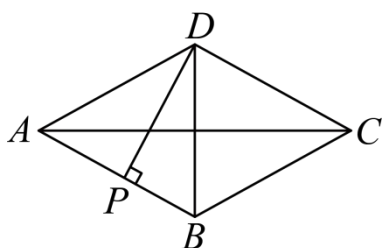
【分析】根据菱形的性质得出 OA ， OB 的长度，然后根据勾股定理求出 AB ，然后根据垂线段最短得到当 $DP \perp AB$ 时， DP 有最小值，然后利用菱形面积求解.

【详解】解：在菱形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ ， $OA = \frac{1}{2}AC = 12$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 5$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$\because$ 点 P 是边 AB 上的一个动点，

$\therefore$ 当 $DP \perp AB$ 时， DP 有最小值，如图，



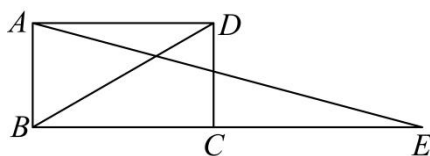
$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = AB \cdot DP,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 13DP$$

$$\therefore DP = \frac{120}{13},$$

$$\therefore DP \text{ 的最小值为 } \frac{120}{13}.$$

13. 如图，延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E ，使 $CE = BD$ ，连接 AE 。若 $\angle ADB = 30^\circ$ ，则 $\angle E =$ _____。

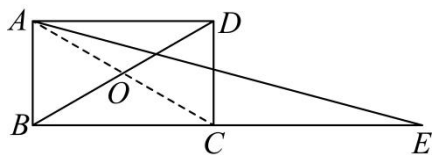


【答案】 15° ## 15 度

【解析】

【分析】连接 AC ，与 BD 交于点 O ，根据矩形的性质得出 $AD \parallel BE$ ， $AC = BD$ ， $AO = DO$ ，则 $\angle E = \angle DAE$ ， $\angle ADB = \angle CAD = 30^\circ$ 。结合 $BD = CE$ ，得出 $CE = CA$ ，则 $\angle E = \angle CAE$ ，再结合 $\angle CAD = 30^\circ$ 即可求解.

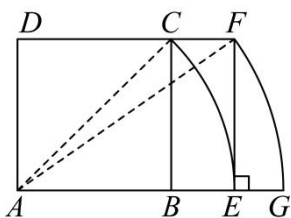
【详解】解：连接 AC ，与 BD 交于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore AD \parallel BE$, $AC = BD$, $AO = DO$,
 $\therefore \angle E = \angle DAE$, $\angle ADB = \angle CAD = 30^\circ$.
 又 $\because BD = CE$,
 $\therefore CE = CA$,
 $\therefore \angle E = \angle CAE$.
 $\therefore \angle CAD = \angle CAE + \angle DAE = \angle E + \angle E = 30^\circ$,
 $\therefore \angle E = 15^\circ$.

故答案为: 15°

14. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, 以 A 为圆心, AC 的长为半径画弧, 交 AB 的延长线于点 E , 过点 E 作 $EF \perp AE$ 交 DC 的延长线于点 F , 连接 AF , 以 A 为圆心, AF 的长为半径画弧, 交 AB 的延长线于点 G , 则 AG 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 由正方形的性质得到 $\angle D = \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $BC = AB = AD = 1$, 则可求出 AC 的长, 进而得到 AE 的长, 证明四边形 $AEFD$ 是矩形, 得到 $EF = AD = 1$, 利用勾股定理求出 AF 的长即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle D = \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $BC = AB = AD = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$,

由作图方法可得 $AG = AF$, $AE = AC = \sqrt{2}$;

$\because EF \perp AE$,

$\therefore \angle AEF = 90^\circ = \angle D = \angle BAD$,

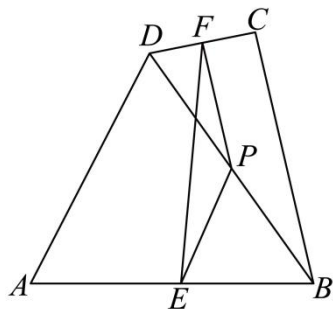
∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形,

∴ $EF = AD = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, 由勾股定理得 $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{3}$,

∴ $AG = \sqrt{3}$.

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, P 是对角线 BD 的中点, E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点, $AD = BC$, $\angle PEF = 19^\circ$, 那么 $\angle FPE$ 的度数为_____.



【答案】 142°

【解析】

【分析】由三角形中位线定理结合题意得出 $PE = PF$, 由等边对等角得出 $\angle PFE = \angle PEF = 19^\circ$, 再由三角形内角和定理计算即可得解.

【详解】解: ∵ P 是对角线 BD 的中点, E 是 AB 的中点,

∴ PE 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

∴ $PE = \frac{1}{2}AD$,

同理可得: $PF = \frac{1}{2}BC$,

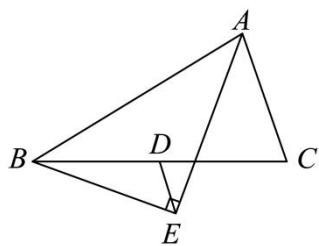
∵ $AD = BC$,

∴ $PE = PF$,

∴ $\angle PFE = \angle PEF = 19^\circ$,

∴ $\angle FPE = 180^\circ - \angle PFE - \angle PEF = 142^\circ$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AE 平分 $\angle BAC$, D 是 BC 的中点, $AE \perp BE$, $AB = 7$, $AC = 4$, 则 DE 的长度为_____.

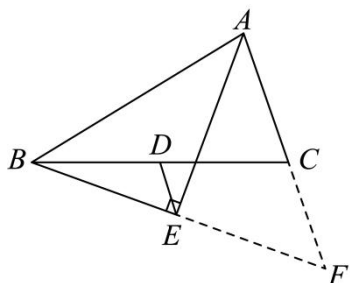


【答案】 $\frac{3}{2}$ 1.5 $1\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】延长 BE 、 AC 交于点 F ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ (ASA)，得到 $AB = AF = 7$ ， $BE = FE$ ，证明 DE 是 $\triangle BFC$ 的中位线，根据中位线的性质可得 DE 的长度.

【详解】解：如图所示，延长 BE 、 AC 交于点 F ，



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle FAE$ ，

$\because AE \perp BE$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle AEF = 90^\circ$ ，

$\because AE = AE$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE$ (ASA)，

$\therefore AB = AF = 7$ ， $BE = FE$ ，

又 $\because AC = 4$ ，

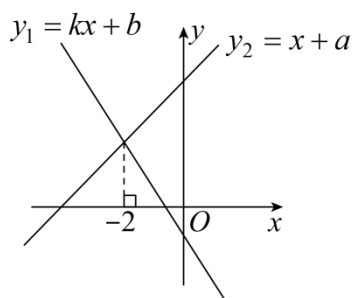
$\therefore CF = AF - AC = 7 - 4 = 3$ ，

$\because$ 点 D 是 BC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle BFC$ 的中位线，

$\therefore DE = \frac{1}{2}CF = \frac{3}{2}$.

17. 一次函数 $y_1=kx+b$ 与 $y_2=x+a$ 的图象如图，则 $kx+b > x+a$ 的解集是_____.



【答案】 $x < -2$

【解析】

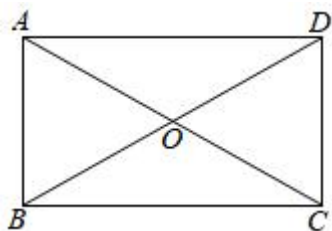
【分析】 不等式组 $kx+b > x+a$ 的解是一次函数 $y_2=x+a$ 的图象 $y_1=kx+b$ 下方的部分对应的 x 的取值范围，据此即可解答.

【详解】 解： 由图象得： 不等式组 $kx+b > x+a$ 的解集是 $x < -2$.

故答案为： $x < -2$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与一元一次不等式的关系： 从函数的角度看， 就是寻求使一次函数 $y=kx+b$ 的值大于（或小于） 0 的自变量 x 的取值范围； 从函数图象的角度看， 就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上（或下） 方部分所有的点的横坐标所构成的集合.

18. 如图， 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6, BC=8$ ， 对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， 将矩形 $ABCD$ 绕点 O 旋转得到矩形 $A_1B_1C_1D_1$ ， 若点 D_1 与点 C 重合， 边 B_1C_1 交边 BC 于点 E ， 则 CE 的长为_____.



【答案】 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】 根据旋转的性质和矩形的性质证明 $\triangle AEB \cong \triangle D_1EC_1$ ， 得到 $C_1E=BE=BC-CE$ ， 在 $\triangle D_1EC_1$ 中， 利用勾股定理列出方程， 解之即可.

【详解】 解： 由题意可得： 四边形 $ABCD$ ， 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为矩形，

$\therefore AB=CD=D_1C_1=6$ ， $\angle ABE=\angle D_1C_1E=90^\circ$ ，

又 $\because \angle AEB=\angle D_1EC_1$ ，

$\therefore \triangle AEB$ 和 $\triangle D_1EC_1$ 中，

$$\therefore AO = CO = OD = \frac{1}{2}AC = 4,$$

$$\because AF = \frac{1}{4}AC,$$

$$\therefore AF = FO,$$

$\because$ 点 E 是边 AD 的中点,

$\therefore EF$ 为 $\triangle AOD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}OD = 2.$$

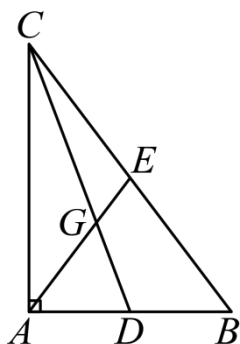
20. 已知: $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 5$, G 为 $\triangle ABC$ 重心, 求点 G 到 AC 的距离.

【答案】 1

【解析】

【分析】画出图形, 首先利用勾股定理求出 AC , 得到 $S_{\triangle ABC} = 6$, 然后根据重心的性质得到 $\frac{DG}{CG} = \frac{1}{2}$, 求出 $S_{\triangle ACG} = \frac{2}{3}S_{\triangle ACD} = 2$, 设点 G 到 AC 的距离为 h , 然后列方程求解即可.

【详解】解: 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 5$, AE 和 CD 交于点 G ,



$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 重心,

$$\therefore CD, AE \text{ 是 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 的中线, } \frac{DG}{CG} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 3$$

$$\therefore S_{\triangle ACG} = \frac{2}{3}S_{\triangle ACD} = 2$$

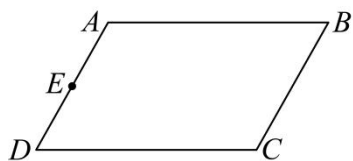
设点 G 到 AC 的距离为 h

$$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot h = 2, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4h = 2$$

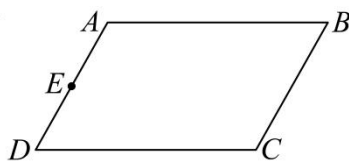
$$\therefore h = 1$$

∴点 G 到 AC 的距离为 1.

21. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, 请仅用一把无刻度的直尺按要求画图 (保留作图痕迹, 不写作法).



图(1)



图(2)

(1) 如图 (1), 画出 BC 的中点 F , 请写出画法并证明 (即证明点 F 是 BC 的中点).

画法: _____;

证明:

(2) 如图 (2), 画出 CD 的中点 G . (不写画法也无需证明)

【答案】 (1) 作图见解析, 画法见解析, 证明见解析

(2) 作图见解析

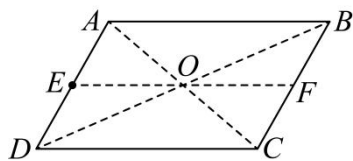
【解析】

【分析】 (1) 连接 $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD , 交于点 O , 连接 EO 并延长, 与 BC 交点即为点 F , 然后证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA) 即可;

(2) 连接 AC, BD 交于点 O , 连接 CE 交 BD 于点 T , 连接 AT 并延长交 CD 即为点 G , 可得 T 为 $\triangle ACD$ 的重心, 再由重心的定义可得 G 为 CD 中点.

【小问 1 详解】

解: 如图, 连接 $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD , 交于点 O , 连接 EO 并延长, 与 BC 交点即为点 F ,



图(1)

证明: $\because \square ABCD$,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC, AO = CO,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle FCO$$

$\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{ASA})$$

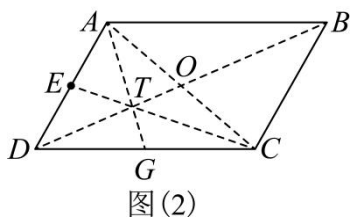
$$\therefore AE = CF$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC,$$

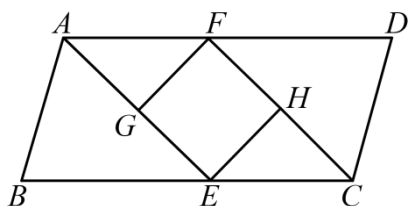
$\therefore$ 点 F 是 BC 的中点;

【小问 2 详解】

解: 如图, 点 G 即为所求.



22. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E , $\angle DCB$ 的平分线交 AD 于点 F , 点 G, H 分别是 AE 和 CF 的中点.



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 连接 EF , 若 $EF = AF$, 请判断四边形 $GEHF$ 的形状, 并证明你的结论.

【答案】(1) 见解析 (2) 矩形, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle BAE \cong \triangle DCF (\text{ASA})$, 得到 $AE = FC$, 然后证明出 $AE \parallel FC$, 即可得到四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 连接 EF , 首先得到 $AE = FC$, 然后结合 $AE \parallel FC$ 得到四边形 $GEHF$ 是平行四边形, 然后利用三线合一得到 $FG \perp AE$, 即可得到四边形 $FGEH$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, \angle BAD = \angle DCB, \angle B = \angle D,$$

$\because \angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E , $\angle DCB$ 的平分线交 AD 于点 F ,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAD, \angle BCF = \angle DCF = \frac{1}{2}\angle DCB,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCF = \angle DAE = \angle BCF ,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = FC$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB$$

$$\therefore \angle BCF = \angle AEB$$

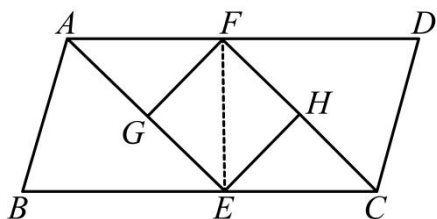
$$\therefore AE \parallel FC$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: 四边形 $FGEH$ 是矩形, 证明如下:

如图, 连接 EF ,



$\because$ 点 G 、 H 分别为 AE 、 CF 的中点,

$$\therefore GE = \frac{1}{2} AE, \quad FH = \frac{1}{2} FC$$

$$\because AE = FC$$

$$\therefore GE = FH$$

$$\because AE \parallel FC$$

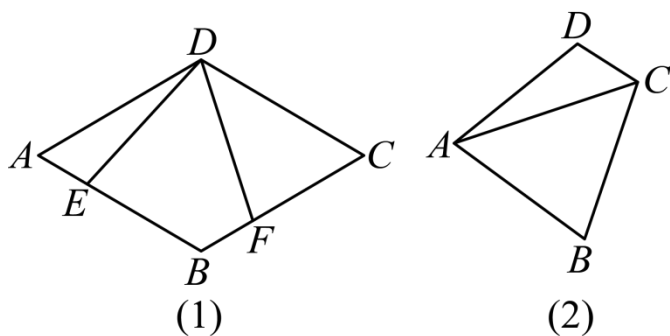
$\therefore$ 四边形 $GEHF$ 是平行四边形

$\because EF = AF$, 点 G 为 AE 的中点

$$\therefore FG \perp AE$$

$\therefore$ 四边形 $FGEH$ 是矩形.

23. 我们规定: 一组邻边相等且对角互补的四边形叫做完美四边形.



(1) 在以下四种四边形中，一定是完美四边形的是_____ (请填序号)；

①平行四边形②菱形③矩形④正方形

(2) 如图 (1)，菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， E 、 F 分别是 AB 、 BC 上的点，且 $AE = BF$ ，求证：四边形 $DEBF$ 是完美四边形；

(3) 如图 (2)，四边形 $ABCD$ 为完美四边形，且 $AB = AD$ ，连接 AC 。

①求证： CA 平分 $\angle DCB$ ；

②当 $\angle BAD = 90^\circ$ 时， $CD = 1$ ， $BC = 3$ ，请直接写出 AC 的长。

【答案】(1) ④ (2) 见解析

(3) ①见解析，② $AC = 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据完美四边形的定义和四种多边形的性质即可判断；

(2) 连接 BD ，先证 $\triangle ABD$ 是等边三角形，得 $AD = BD$ ，再证 $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ (SAS)，得 $DE = DF$ ， $\angle AED = \angle BFD$ ，然后得到 $\angle BFD + \angle DEB = 180^\circ$ ，从而得证；

(3) ①延长 CB 至点 E ，使 $BE = CD$ ，连接 AE ，证明 $\triangle ADC \cong \triangle ABE$ (SAS)，得 $\angle ACD = \angle E$ ， $AC = AE$ ，继而知 $\angle ACE = \angle E$ ，从而得 $\angle ACD = \angle ACE$ ，即可得证；

②由①得， $\triangle ADC \cong \triangle ABE$ (SAS)，可得 $AC = AE$ ， $\angle EAB = \angle CAD$ ， $CD = BE = 1$ ，求出 $\angle CAE = \angle DAB = 90^\circ$ ，然后利用勾股定理即可求解。

【小问 1 详解】

解：①平行四边形的邻边不一定相等，故不是完美四边形；

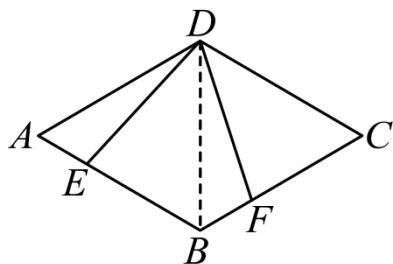
②菱形的对角不一定互补，故不是完美四边形；

③矩形邻边不一定相等，故不是完美四边形；

④正方形任意一组邻边相等且对角互补，故是完美四边形；

【小问 2 详解】

证明：如图，连接 BD ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = AD$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\because \angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形， $\angle ABC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$ ，

$\therefore AD = BD$

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ = \angle A$ ，

$\because AE = BF$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDF$ (SAS)，

$\therefore DE = DF$ ， $\angle AED = \angle BFD$ ，

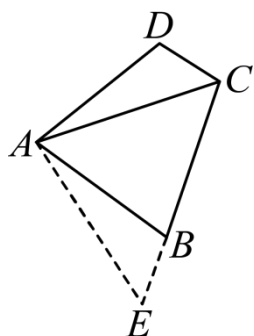
$\because \angle AED + \angle DEB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BFD + \angle DEB = 180^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是完美四边形.

【小问 3 详解】

①证明：延长 CB 至点 E ，使 $BE = CD$ ，连接 AE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为完美四边形

$\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ$ ，

$\because \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

$$\text{又} \because AB = AD, \quad BE = CD$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACD = \angle E, \quad AC = AE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle E,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACE,$$

$$\therefore CA \text{ 平分 } \angle DCB;$$

$$\text{②由①得, } \triangle ADC \cong \triangle ABE (\text{SAS})$$

$$\therefore AC = AE, \quad \angle EAB = \angle CAD, \quad CD = BE = 1,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle BAC = \angle CAD + \angle BAC, \quad CE = CB + BE = 3 + 1 = 4$$

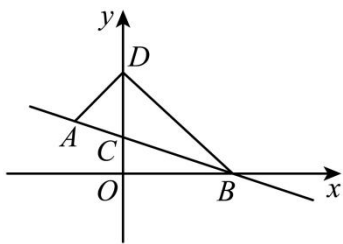
$$\therefore \angle CAE = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE^2 + AC^2 = CE^2$$

$$\therefore 2AC^2 = 4^2,$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{2}.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 AB 过点 $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$, 交 y 轴于点 C , 点 $D(0, n)$ 在点 C 上方, 连接 AD, BD .



(1) 求直线 AB 的解析式;

(2) 当 $\triangle ABD$ 的面积是 2 时, 求 n 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 以点 B, C, D, E 为顶点组成的四边形为平行四边形, 直接写出点 E 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

(2) 2 (3) $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(-2, \frac{8}{3}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 由待定系数法求解即可;

(2) 先求点 C 坐标, 然后由 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$ 建立方程求解;

(3) 先画出图形, 再根据平行四边形的性质以及平移的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设直线 AB 的解析式为: $y = kx + b$,

把点 $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$ 代入得,

$$\begin{cases} -k + b = 1 \\ 2k + b = 0 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases},$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

【小问 2 详解】

解: 对于 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{2}{3}$

$$\therefore C \text{ 点坐标为 } \left(0, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore CD = n - \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$$

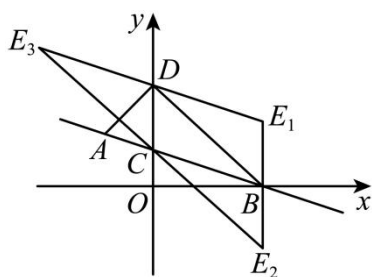
$$\therefore \frac{1}{2} \times \left(n - \frac{2}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{2} \times \left(n - \frac{2}{3}\right) \times 2 = 2,$$

$$\therefore \frac{3}{2}n - 1 = 2,$$

$$\therefore n = 2;$$

【小问 3 详解】

解: 如图,



当 $\square CDE_1B$ 时, $BE_1 = CD = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $BE_1 \parallel CD$, 则 $E_1\left(2, \frac{4}{3}\right)$;

当 $\square DCE_2B$ 时, 同理可求 $E_2\left(2, -\frac{4}{3}\right)$;

当 $\square BDE_3C$ 时, 则 $BD \parallel CE_3, BD = CE_3$,

$\therefore B(2,0), D(0,2), C\left(0, \frac{2}{3}\right)$,

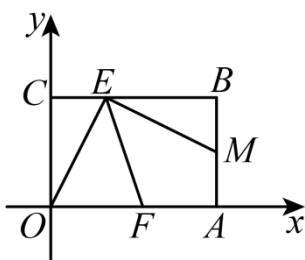
$\therefore$ 点 B 向点 D 的平移方式与点 C 向点 E_3 的平移方式一样,

$\therefore$ 点 B 向点 D 的平移方式为向左平移 2 个单位, 向上平移 2 个单位,

$\therefore$ 点 $C\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 向左平移 2 个单位, 向上平移 2 个单位得到 $E_3\left(-2, \frac{8}{3}\right)$

综上, 点 E 的坐标为 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(-2, \frac{8}{3}\right)$.

25. 矩形 $OABC$, 点 $A(3,0)$, 点 $C(0,2)$, 点 M 为射线 AB 上的动点 (点 M 与点 A 不重合), 将矩形沿某一直线对折, 使点 O 与点 M 重合, 折痕与边 BC 交于点 E , 与边 OA 交于点 F .



(1) 如图, 若 $OE \perp ME$, 求 AM 的长;

(2) 若四边形 $OFME$ 为平行四边形, 求点 E 的坐标;

(3) 当点 M 在边 AB 上时, 设 $AM = x$, $CE = y$, 求 y 与 x 之间的函数表达式和 x 的取值范围;

(4) 当 $\triangle OEF$ 是等腰三角形时, 直接写出 AM 的长.

【答案】 (1) 1 (2) $E\left(\frac{5}{6}, 2\right)$

(3) $y = \frac{x^2 - 4x + 9}{6} (0 < x < 2)$

(4) $4 - \sqrt{7}$ 或 2 或 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle CEO \cong \triangle BME$ (AAS), 得到 $BM = CE$, $BE = OC = 2$, 则 $BM = CE = BC - BE = 1$, 据此可得 $AM = AB - BM = 1$;

(2) 可证明点 M 与点 B 重合; 由折叠的性质可得 $EO = EB$, 设 $CE = t$, 则 $EO = EB = 3 - t$, 由勾股定理得 $t^2 + 2^2 = (3 - t)^2$, 解方程即可得到答案;

(3) 可求出 $BE = BC - CE = 3 - y$, $BM = AB - AM = 2 - x$, 根据勾股定理和 $OE = EM$, 得到 $4 + y^2 = (3 - y)^2 + (2 - x)^2$, 据此可得答案;

(4) 分三种情况: $OF = EF$, $EO = EF$, $OF = OE$, 分别画出示意图, 讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(3, 0)$, 点 $C(0, 2)$,

$$\therefore OA = 3, OC = 2,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore AB = OC = 2, BC = OA = 3, \angle B = \angle OCB = 90^\circ,$$

由折叠的性质可得 $OE = EM$,

$$\therefore OE \perp ME,$$

$$\therefore \angle OEM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle BME = 90^\circ - \angle BEM,$$

$$\therefore \triangle CEO \cong \triangle BME \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BM = CE, BE = OC = 2,$$

$$\therefore BM = CE = BC - BE = 1,$$

$$\therefore AM = AB - BM = 1;$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

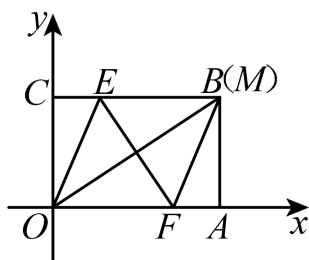
$\therefore CB \parallel OA$ ，即 $EB \parallel OF$ ，

$\therefore$ 四边形 $OFME$ 为平行四边形，

$\therefore OF \parallel EM$ ，

$\therefore BC \parallel EM$ ，即 E 、 B 、 M 三点共线，

$\therefore$ 点 M 与点 B 重合；



由折叠的性质可得 $EO = EB$ ，

设 $CE = t$ ，则 $EO = EB = 3 - t$ ，

在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中，由勾股定理得 $CE^2 + OC^2 = OE^2$ ，

$$\therefore t^2 + 2^2 = (3 - t)^2,$$

$$\text{解得 } t = \frac{5}{6},$$

$$\therefore CE = \frac{5}{6},$$

$$\therefore E\left(\frac{5}{6}, 2\right);$$

【小问 3 详解】

解： $\because AM = x$ ， $CE = y$ ，

$$\therefore BE = BC - CE = 3 - y, \quad BM = AB - AM = 2 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中，由勾股定理得 $OE^2 = OC^2 + CE^2 = 4 + y^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中，由勾股定理得 $EM^2 = BE^2 + BM^2 = (3 - y)^2 + (2 - x)^2$ ，

由折叠的性质可得 $OE = EM$ ，

$$\therefore OE^2 = EM^2,$$

$$\therefore 4 + y^2 = (3 - y)^2 + (2 - x)^2,$$

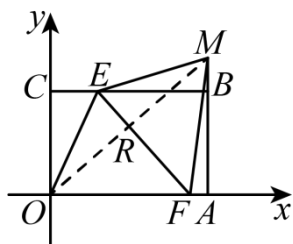
$$\therefore 4 + y^2 = 9 - 6y + y^2 + 4 - 4x + x^2,$$

$$\therefore y = \frac{x^2 - 4x + 9}{6} (0 < x < 2);$$

【小问 4 详解】

解：如图所示，当 $OF = EF$ 时，

连接 OM 交 EF 于点 R ，



由轴对称的性质可得 $EF \perp OM$, $OM = 2OR$,

$$\therefore OF = EF,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle OEF,$$

由矩形的性质可得 $BC \parallel OA$, $OC \perp BC$,

$$\therefore \angle OEC = \angle EOF,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle OEF,$$

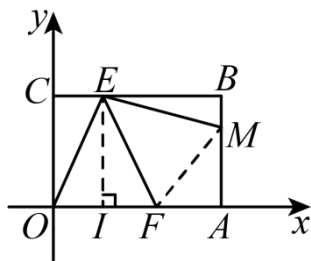
又 $\because OC \perp BC$, $OR \perp EF$,

$$\therefore OR = OC = 2,$$

$$\therefore OM = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中, $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{7}$;

如图所示，当 $EO = EF$ 时，过点 E 作 $EI \perp OA$ 于点 I ，连接 FM ，则四边形 $OCEI$ 是矩形，



$$\therefore CE = OI,$$

$$\because EO = EF, \quad EI \perp OA,$$

$$\therefore OF = 2OI = 2CE,$$

$$\therefore AF = 3 - 2CE,$$

由折叠的性质可得 $MF = OF = 2CE$,

在 $\text{Rt}\triangle AMF$ 中, 由勾股定理可得 $AF^2 + AM^2 = MF^2$,

$$\therefore \text{由 (3) 得 } (3-2y)^2 + x^2 = (2y)^2,$$

$$\therefore 9 - 12y + 4y^2 + x^2 = 4y^2,$$

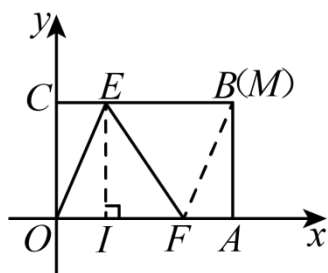
$$\therefore y = \frac{x^2 + 9}{12},$$

$$\therefore \frac{x^2 + 9}{12} = \frac{x^2 - 4x + 9}{6},$$

解得 $x = 4 - \sqrt{7}$ 或 $x = 4 + \sqrt{7}$ (舍去),

$$\therefore AM = 4 - \sqrt{7};$$

如图所示, 当 $OF = OE$ 时,



由折叠的性质可得 $OE = EM, OF = FM$,

$$\therefore OE = EM = OF = FM,$$

$\therefore$ 四边形 $OEMF$ 是菱形,

$\therefore$ 菱形也是平行四边形,

$\therefore$ 由 (2) 可知此时点 M 与点 B 重合,

$$\therefore AM = 2$$

综上所述, AM 的长为 $4 - \sqrt{7}$ 或 2 或 $\sqrt{7}$.