

上海市静安区 2025-2026 学年下学期八年级期中数学试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分)

1. 从某多边形的一个顶点引出的所有对角线，把这个多边形分成了 6 个三角形，则此多边形是 ()

- A. 九边形 B. 八边形 C. 七边形 D. 六边形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了多边形的对角线. 根据 n 边形从一个顶点出发可引出 $(n-3)$ 条对角线，可组成 $(n-2)$ 个三角形，依此可得 n 的值.

【详解】解：设这个多边形是 n 边形，

由题意得， $n-2=6$ ，

解得： $n=8$ ，

即这个多边形是八边形，

故选：B.

2. 在平面直角坐标系中，点 A 在第二象限，距离 x 轴 2 个单位长度，距离 y 轴 3 个单位长度，则点 A 的坐标为 ()

- A. $(2,3)$ B. $(-2,3)$ C. $(-3,2)$ D. $(3,-2)$

【答案】C

【解析】

【分析】平面直角坐标系中的点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值，点到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值，结合第二象限点的符号特征求解即可.

【详解】解：设点 A 的坐标为 (x,y) ，

$\because$ 点 A 距离 x 轴 2 个单位长度，

$$\therefore |y|=2,$$

$$\therefore y=\pm 2,$$

$\because$ 点 A 距离 y 轴 3 个单位长度，

$$\therefore |x|=3,$$

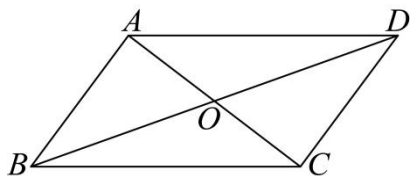
$$\therefore x=\pm 3,$$

∴ 点 A 在第二象限,

∴ 点 A 的横坐标为负数, 纵坐标为正数,

∴ $x = -3, y = 2$, 即点 A 的坐标为 $(-3, 2)$.

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O . 下列条件不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()



A. $AB = DC, AD = BC$

B. $AB \parallel DC, AD = BC$

C. $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCD$

D. $OA = OC, OB = OD$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定方法, 熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键. 由平行四边形的判定方法分别对各个选项进行判断即可.

【详解】 解: A、∵ $AB = DC, AD = BC$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 A 不符合题意;

B、∵ $AB \parallel DC, AD = BC$,

∴ 四边形 $ABCD$ 不一定是平行四边形, 也可能是等腰梯形, 故选项 B 符合题意,

C、∵ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$.

∵ $\angle BAD = \angle BCD$,

∴ $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,

∴ $AD \parallel BC$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 C 不符合题意;

D、∵ $OA = OC, OB = OD$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

4. 下列命题, 是真命题的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形
D. 对角线相等的菱形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据菱形、矩形、正方形的判定定理逐一判断命题真假即可.

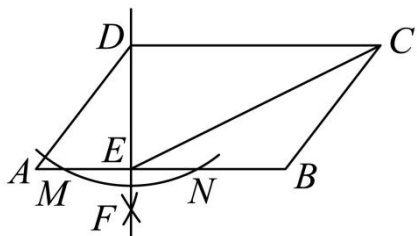
【详解】解：A、 $\because$ 对角线互相垂直的平行四边形才是菱形，仅对角线互相垂直的四边形不一定是菱形， $\therefore$ A 是假命题.

B、 $\because$ 对角线相等的平行四边形才是矩形，仅对角线相等的四边形不一定是矩形，例如等腰梯形对角线相等但不是矩形， $\therefore$ B 是假命题.

C、 $\because$ 对角线互相垂直平分且相等的四边形才是正方形，仅对角线互相垂直平分的四边形是菱形， $\therefore$ C 是假命题.

D、 $\because$ 菱形的对角线互相垂直平分，若对角线相等，则该四边形既是菱形又是矩形，满足正方形的判定条件， $\therefore$ 对角线相等的菱形是正方形，D 是真命题.

5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ，以点 D 为圆心作弧，交 AB 于点 M 、 N ，分别以点 M 、 N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 为半径作弧，两弧交于点 F ，作直线 DF 交 AB 于点 E ，若 $\angle BCE = \angle DCE$ ， $AD=5$ ，则 DE 长是 ()



- A. 3
B. 4
C. $2\sqrt{5}$
D. $\frac{12}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得 $AD=BC=5$ ， $AB \parallel CD$ ，进而结合已知证明 $\angle BCE = \angle BEC$ ，由等腰三角形的判定和性质得到 $BE=BC=5$ ， $AE=AB-BE=3$ ，再根据勾股定理求出 DE 。

【详解】解：在 $\square ABCD$ 中，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AD=BC=5$ ，

$\therefore \angle DCE = \angle CEB$ ，

又 $\because \angle BCE = \angle DCE$ ，

$$\therefore \angle BCE = \angle BEC,$$

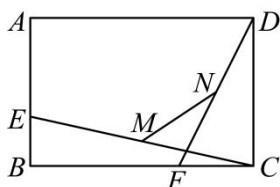
$$\therefore BE = BC = 5,$$

$$\therefore AE = AB - BE = 8 - 5 = 3,$$

由作图可知 $DE \perp AB$ ，即 $\angle AED = 90^\circ$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中， } DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 边上靠近点 B 的三等分点，点 F 是 BC 边上靠近点 C 的三等分点，连接 EC ， FD ， M ， N 分别是 EC ， FD 的中点，连接 MN ，若 $AB = 6$ ， $BC = 9$ ，则 MN 的长为 ()



A. $\sqrt{13}$

B. $2\sqrt{13}$

C. $2\sqrt{10}$

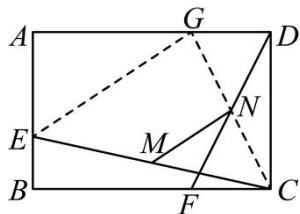
D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】连接 CN 并延长交 AD 于点 G ，连接 EG ，根据中点定义，矩形的性质得到 $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，再证 $\triangle GND \cong \triangle CNF$ ，得到 $GN = CN$ ，根据三角形的中位线定理和勾股定理即可得到结论.

【详解】解：如图，连接 CN 并延长交 AD 于点 G ，连接 EG



$\because M, N$ 分别是 EC, FD 的中点,

$$\therefore DN = FN,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC, BC = AD, \angle A = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDN = \angle CFN,$$

$$\therefore \angle GND = \angle CNF,$$

$$\therefore \triangle GND \cong \triangle CNF (ASA),$$

$\therefore GN = CN$ ，即 N 是 CG 的中点.

$\therefore MN$ 是 $\triangle CEG$ 的中位线.

$$\therefore MN = \frac{1}{2}EG.$$

$\because$ 点 E 是 AB 边上靠近点 B 的三等分点, 点 F 是 BC 边上靠近点 C 的三等分点, $AB = 6$, $BC = 9$,

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AB = 4, CF = GD = \frac{1}{3}BC = 3, AG = AD - DG = 6.$$

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, $AE^2 + AG^2 = EG^2$

$$\therefore EG = \sqrt{AE^2 + AG^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}.$$

$$\therefore MN = \sqrt{13}.$$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 七边形的内角和是_____度.

【答案】 900

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形内角和定理. 应用多边形的内角和公式计算即可.

【详解】 解: 七边形的内角和 $= (n-2) \times 180^\circ = (7-2) \times 180^\circ = 900^\circ$,

故答案为: 900.

8. 已知点 $A(1,0)$, $B(-3,-1)$, 则线段 AB 的长为_____

【答案】 $\sqrt{17}$

【解析】

【分析】 本题考查了两点之间的距离公式: 已知在平面直角坐标系中有两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 则这两点间的距离公式为 $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, 熟练掌握两点之间的距离公式是解题关键. 根据两点之间的距离公式求解即可得.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(1,0)$, $B(-3,-1)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{17}.$$

故答案为: $\sqrt{17}$.

9. 点 $A(m,2)$ 与点 $B(3,n)$ 关于 x 轴对称, 则 $m+n =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据关于 x 轴对称的点的横坐标相同, 纵坐标互为相反数求出 $m = 3$, $n = -2$, 再计算 $m+n$ 的值

即可.

【详解】解: $\because$ 点 $A(m, 2)$ 与点 $B(3, n)$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore m = 3, \quad n = -2,$$

$$\therefore m + n = 3 + (-2) = 1.$$

10. 如果一个四边形的两条对角线的长都是 4cm , 那么顺次联结这个四边形的各边中点所得的四边形的周长等于_____ cm .

【答案】8

【解析】

【分析】此题主要是三角形中位线定理的运用. 根据三角形的中位线定理即可求得所得四边形的各边长度都是原四边形的对角线的一半, 从而求解.

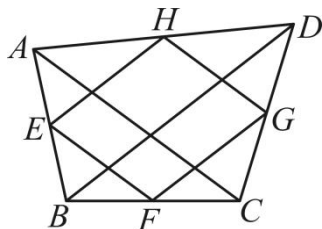
【详解】解: 如图所示, E, F, G, H 分别是 $ABCD$ 四边的中点, $AC = BD = 4$,

$\therefore EF, FG, GH, EH$ 分别是 ABC, BCD, ADC, ABD 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 2, FG = \frac{1}{2}BD = 2, GH = \frac{1}{2}AC = 2, EH = \frac{1}{2}BD = 2,$$

$\therefore$ 顺次连接这个四边形各边的中点所得四边形的周长等于 $2 \times 4 = 8\text{cm}$.

故答案为: 8.



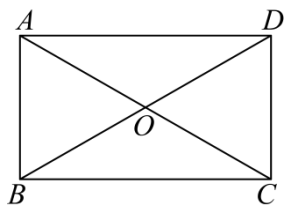
11. 矩形的两条对角线的夹角为 60° , 较短的边长为 6cm , 则较长的边长为_____ cm .

【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】画出图形, 根据矩形的性质得出 $OA = OB = OC = OD$, 根据 $\angle AOB = 60^\circ$ 得出 AOB 是等边三角形, 即可证明 $AC = 2AB = 12\text{cm}$, 利用勾股定理求出 BC 的长即可得答案.

【详解】解: 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , $\angle AOB = 60^\circ$, $AB = 6\text{cm}$,



$$\therefore OA = OB = OC = OD,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

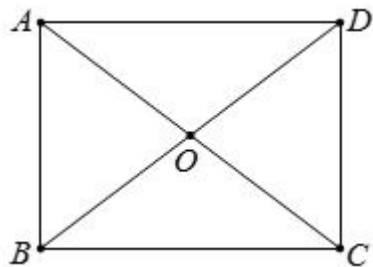
$\therefore OA = OB = OC = AB = 6\text{cm}$, $AC = 2AB = 12\text{cm}$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$.

12. 如图, 矩形 $ABCD$ 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 若 $\angle AOD = 110^\circ$, 则 $\angle OAB =$ _____ $^\circ$.



【答案】 55

【解析】

【详解】 试题解析: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore OA = OB$,

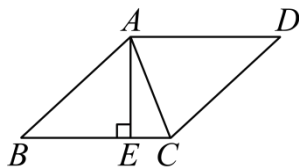
$\therefore \angle OAB = \angle OBA$,

$\because \angle AOD = 110^\circ$, $\angle AOD = \angle OAB + \angle OAB$,

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 55^\circ$.

13. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{5}$, 对角线 $AC = 2$, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E , 则 AE 的长为

_____.



【答案】 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先根据勾股定理得 $AB^2 - BE^2 = AE^2 = AC^2 - CE^2$, 再结合菱形的性质, 得 $BE = \sqrt{5} - CE$, 然后

代入数值解得 $CE = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 最后由勾股定理列式计算, 即可作答.

【详解】解：∵ $AE \perp BC$ 于点 E ,

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 - BE^2 = AE^2 = AC^2 - CE^2,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形, } AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore BC = AB = \sqrt{5},$$

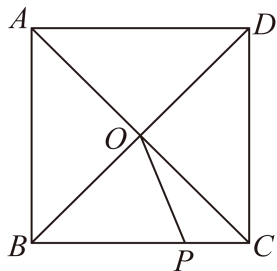
$$\therefore BE = \sqrt{5} - CE,$$

$$\therefore (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5} - CE)^2 = 2^2 - CE^2$$

$$\text{解得 } CE = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

14. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 对角线 AC , BD 交于点 O , P 为边 BC 上一点, 且 $BP = OB$, 则 CP 的长为 _____.



【答案】 $2 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据正方形的性质结合勾股定理求得 $BD = 2\sqrt{2}$, 进而可得 $OB = OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$, 结合已知可得 $BP = \sqrt{2}$, 根据 $CP = BC - BP$, 即可求解.

【详解】解: ∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 对角线 AC , BD 交于点 O ,

$$\therefore BC = DC = 2, \angle BCD = 90^\circ, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, 由勾股定理得: } BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OB = OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2},$$

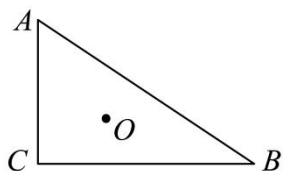
$$\therefore BP = OB,$$

$$\therefore BP = \sqrt{2},$$

$$\therefore CP = BC - BP = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore CP \text{ 的长为 } 2 - \sqrt{2}.$$

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果 $AB = 10$, 那么点 C 与点 O 的距离为_____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了三角形重心的性质和直角三角形斜边的中线等于斜边的一半, 连接 CO , 延长 CO 交 AB 于 D , 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半求出 CD , 再利用重心的性质求 OC .

【详解】解: 连接 CO , 延长 CO 交 AB 于 D ,

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心,

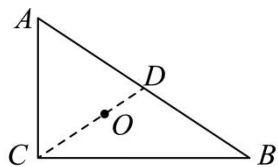
$$\therefore D \text{ 是 } AB \text{ 的中点, } OC = \frac{2}{3}CD,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 10,$$

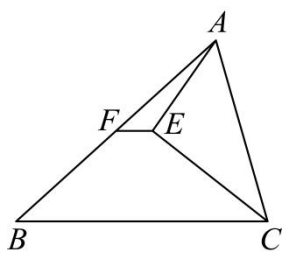
$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore OC = \frac{2}{3}CD = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 与点 } O \text{ 的距离为 } \frac{10}{3}.$$



16. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACE = \angle ECB$, $AE \perp EC$, F 是边 AB 的中点, $AE = 3$, $EC = 4$, $BC = 7$, 那么 FE 的长是_____.



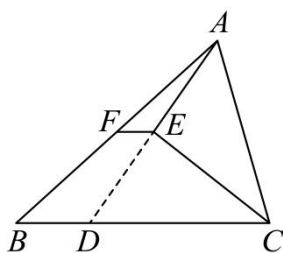
【答案】1

【解析】

【分析】本题考查三角形中位线定理，勾股定理以及全等三角形的判定和性质，解题的关键是通过延长 AE 构造全等三角形，得出线段关系，再利用中位线定理求解.

延长 AE 交 BC 于点 D ，先证 $\triangle AEC \cong \triangle DEC$ ，得到 $AC = CD$ 的长度，利用勾股定理求得 AC 的长度，再结合 E 为 AD 中点， F 是 AB 中点，利用中位线定理求 FE .

【详解】延长 AE 交 BC 于点 D ，



$$\therefore \angle AEC = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp EC,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle ECB \\ EC = EC \\ \angle AEC = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore AC = CD, \quad AE = DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = 3$, $EC = 4$,

$$\therefore AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD + CD$$

$$\therefore BD = BC - CD = 7 - 5 = 2$$

$$\because AE = DE,$$

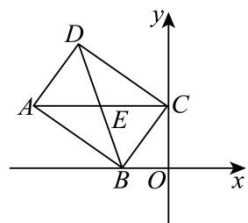
$\therefore E$ 为 AD 的中点,

又 $\because F$ 是边 AB 的中点,

$$\therefore FE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

故答案为: 1.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 E , $B(-1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$, 如果 AC 平行于 x 轴, 那么点 D 的坐标为_____.



【答案】 $(-3, 2\sqrt{3})$

【解析】

【分析】先根据矩形的性质得到 $AE = EC = BE = ED$, 设 $E(x, \sqrt{3})$, 利用两点间距离公式求出点 E 的坐标, 再根据中点公式得到点 D 的坐标.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AE = EC = BE = ED,$$

$\because AC$ 平行于 x 轴, $C(0, \sqrt{3})$,

$\therefore A, E$ 纵坐标都是 $\sqrt{3}$.

设 $E(x, \sqrt{3})$,

$$\therefore EC = -x,$$

$$\because BE = \sqrt{(-1-x)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2},$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} = -x,$$

解得 $x = -2$,

$$\therefore E(-2, \sqrt{3}).$$

$$\because BE = ED,$$

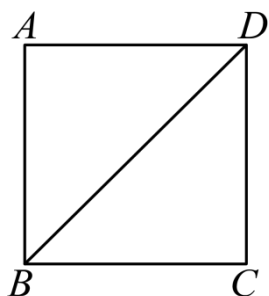
设 $D(m, n)$,

$$\text{由中点公式: } \frac{-1+m}{2} = -2, \quad \frac{0+n}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore m = -3, \quad n = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore D(-3, 2\sqrt{3}).$$

18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, M 是对角线 BD 所在直线上的一个动点, 点 N 是平面内一点. 若四边形 $MCND$ 为平行四边形, 且 $MN = 8$, 则 BM 的值为 _____.



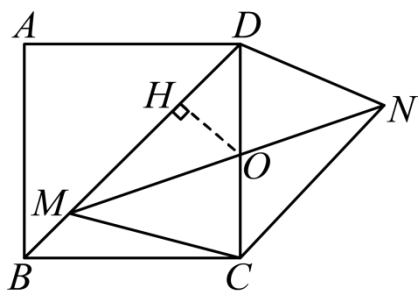
【答案】 $3\sqrt{2} - \sqrt{14}$ 或 $3\sqrt{2} + \sqrt{14}$

【解析】

【分析】由平行四边形 $MCND$ 的性质, 得对角线 MN 与 CD 互相平分, 交点为中点 O , 即 O 是 CD 中点, 且 $OM = \frac{1}{2}MN = 4$. 过 O 作 $OH \perp BD$ 于 H , 先在等腰直角 $\triangle ODH$ 中求出 $OH = DH = \sqrt{2}$; 再在 $\text{Rt}\triangle OHM$ 中, 由勾股定理算出 $MH = \sqrt{14}$. 分类讨论当 M 在线段 BD 上时, 当 M 在 BD 延长线上时可解答.

【详解】解: 依题意有以下两种情况:

①当点 M 在对角线 BD 上时, 设 MN 交 CD 于点 O , 过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H , 如图所示:



$$\therefore \angle OHD = \angle OHM = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 且 $AB = 4$, BD 为对角线,

$$\therefore AD = CD = AB = 4, \quad \angle A = 90^\circ, \quad \angle BDC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形,

$$\text{由勾股定理得: } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$\because$ 四边形 $MCND$ 为平行四边形, $MN = 8$,

$$\therefore OD = OC = \frac{1}{2}CD = 2, \quad OM = ON = \frac{1}{2}MN = 4,$$

在 $\triangle OHD$ 中, $\angle OHD = 90^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle OHD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore DH = OH,$$

由勾股定理得: $OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{2}DH$,

$$\therefore DH = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}OD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2},$$

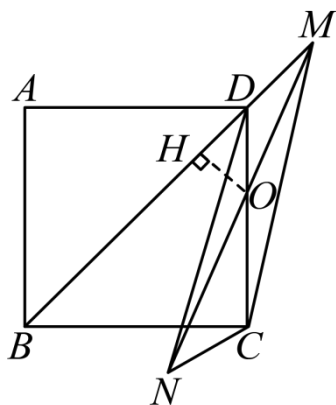
在 $\triangle OHM$ 中, $\angle OHM = 90^\circ$,

由勾股定理得: $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{14}$,

$$\therefore DM = DH + MH = \sqrt{2} + \sqrt{14},$$

$$\therefore BM = BD - DM = 4\sqrt{2} - (\sqrt{2} + \sqrt{14}) = 3\sqrt{2} - \sqrt{14}.$$

②当点 M 在 BD 的延长线上时, 设 MN 交 CD 于点 O , 过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H , 如图所示:



同理可得: $BD = 4\sqrt{2}$, $OD = 2$, $OM = 4$,

在等腰直角 $\triangle OHD$ 中, $DH = OH = \sqrt{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle OHM$ 中, 由勾股定理得: $MH = \sqrt{14}$

$$\therefore DM = MH - DH = \sqrt{14} - \sqrt{2},$$

$$\therefore BM = BD + DM = 4\sqrt{2} + \sqrt{14} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{14},$$

综上所述: BM 的值为 $3\sqrt{2} - \sqrt{14}$ 或 $3\sqrt{2} + \sqrt{14}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19~21 题, 每题 8 分, 第 22~24 题, 每题 10 分, 第 25 题 12 分, 共 66 分)

19. 一个多边形的内角和是外角和的 5 倍，求这个多边形的边数.

【答案】这个多边形的边数是 12

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程，然后求解即可.

【详解】解：设多边形的边数为 n ,

由题意得， $(n-2) \cdot 180^\circ = 5 \times 360^\circ$,

解得 $n = 12$.

故这个多边形的边数是 12.

【点睛】本题考查了多边形的内角与外角，熟记内角和公式和外角和定理并列方程是解题的关键.

20. 在平面直角坐标系中，点 $A(2,6)$ ， $B(-4,4)$ ， $C(4,0)$ ，通过计算判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【答案】 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

【解析】

【详解】解： $\because$ 点 $A(2,6)$ ， $B(-4,4)$ ， $C(4,0)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{5},$$

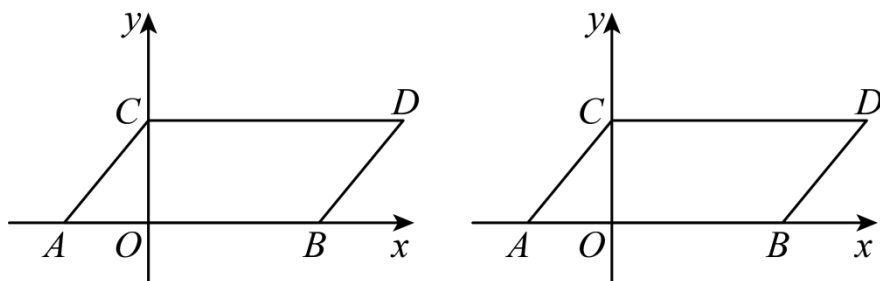
$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (0-6)^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AC^2 + AB^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 = 80, \quad BC^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

21. 如图，在平面直角坐标系中，点 A, B 的坐标分别是 $(-2,0)$ ， $(4,0)$ ，现同时将点 A, B 分别向上平移 2 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度，得到 A, B 的对应点 C, D . 连接 AC, BD, CD .



备用图

(1) 写出点 C, D 的坐标，并求出四边形 $ABDC$ 的面积.

(2) 在 x 轴上是否存在一点 E ，使得 $\triangle DEC$ 的面积是 $\triangle DEB$ 面积的 3 倍？若存在，请求出点 E 的坐标；若

不存在，请说明理由.

【答案】 (1) $C(0,2)$, $D(6,2)$, 四边形 $ABDC$ 的面积为 12

(2) 存在, 点 E 坐标为 $(2,0)$ 或 $(6,0)$

【解析】

【分析】 (1) 利用平移方式求出点 C 、 D 的坐标, 根据平移的性质可得四边形 $ABDC$ 是平行四边形, 利用平行四边形的面积公式求解面积即可;

(2) 根据 $\triangle DEC$ 的面积是 $\triangle DEB$ 面积的 3 倍求出 $BE = 2$, 然后分两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

解: 根据平移方式可得, 点 C 的坐标为 $(-2+2, 0+2)$ 即 $C(0,2)$, 点 D 的坐标为 $(4+2, 0+2)$ 即 $D(6,2)$,

$$\therefore OC = |2| = 2,$$

$\because$ 点 A , B 的坐标分别是 $(-2,0)$, $(4,0)$,

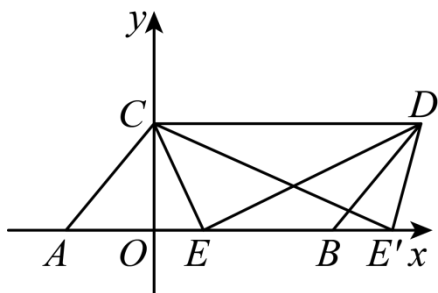
$$\therefore AB = |4 - (-2)| = 6,$$

由平移的性质知, 四边形 $ABDC$ 是平行四边形,

$$\therefore \text{四边形 } ABDC \text{ 的面积为 } AB \cdot OC = 6 \times 2 = 12;$$

【小问 2 详解】

解: 由题知,



$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6, \quad S_{\triangle DEB} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot 2 = BE.$$

因为 $\triangle DEC$ 的面积是 $\triangle DEB$ 面积的 3 倍,

$$\text{所以 } 6 = 3BE,$$

$$\text{则 } BE = 2.$$

因为点 B 坐标为 $(4,0)$,

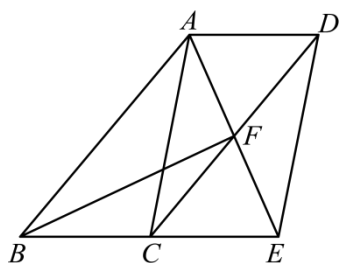
$$\text{则 } 4 - 2 = 2, 4 + 2 = 6,$$

所以点 E 坐标为 $(2,0)$ 或 $(6,0)$.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle BAD$ 的角平分线 AE 交 CD 于点 F , 交 BC 的延长线于点 E .

(1) 求证: $BE = CD$;

(2) 若 BF 恰好平分 $\angle ABE$, 连接 AC 、 DE , 求证: 四边形 $ACED$ 是平行四边形.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $AB = CD$, $\angle DAE = \angle AEB$, 利用 AE 平分 $\angle BAD$, 推出 $\angle BAE = \angle AEB$, 得到 $BE = AB$, 即可得到结论;

(2) 根据 $BE = AB$, BF 平分 $\angle ABE$, 得到 $AF = EF$, 证明 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$, 推出 $DF = CF$, 即可得到结论.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB$$

$$\therefore BE = AB$$

$$\therefore BE = CD$$

(2) $\because BE = AB$, BF 平分 $\angle ABE$

$$\therefore AF = EF$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle AEB \\ AF = EF \\ \angle AFD = \angle EFC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ECF$$

$$\therefore DF = CF$$

$$\text{又 } \because AF = EF$$

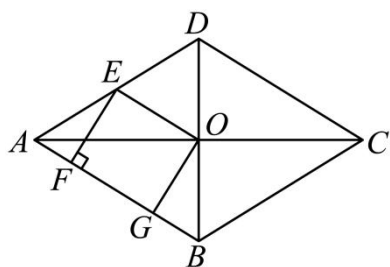
∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形.

【点睛】此题考查平行四边形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，等腰三角形三线合一的性质，熟记各知识点并应用解决问题是解题的关键.

23. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , E 是 AD 的中点, 点 F, G 在 AB 上, $EF \perp AB$, $OG \parallel EF$.

(1) 求证: 四边形 $OEFG$ 是矩形;

(2) 若 $AD=10$, $EF=4$, 求 OE 和 BG 的长.



【答案】(1)见解析; (2) $OE=5$, $BG=2$.

【解析】

【分析】(1)先证明 EO 是 $\triangle DAB$ 的中位线, 再结合已知条件 $OG \parallel EF$, 得到四边形 $OEFG$ 是平行四边形, 再由条件 $EF \perp AB$, 得到四边形 $OEFG$ 是矩形;

(2)先求出 $AE=5$, 由勾股定理进而得到 $AF=3$, 再由中位线定理得到 $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AD=5$, 得到 $FG=5$, 最后 $BG=AB-AF-FG=2$.

【详解】解: (1)证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ 点 O 为 BD 的中点,

∵ 点 E 为 AD 中点,

∴ OE 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

∴ $OE \parallel FG$,

∵ $OG \parallel EF$, ∴ 四边形 $OEFG$ 为平行四边形

∵ $EF \perp AB$, ∴ 平行四边形 $OEFG$ 为矩形.

(2) ∵ 点 E 为 AD 的中点, $AD=10$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 5$$

∵ $\angle EFA=90^\circ$, $EF=4$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB=AD=10,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $OEFG$ 为矩形,

$$\therefore FG = OE = 5,$$

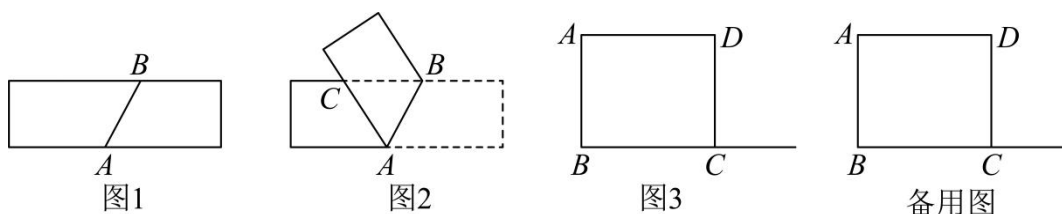
$$\therefore BG = AB - AF - FG = 10 - 3 - 5 = 2.$$

故答案为: $OE=5$, $BG=2$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质和判定, 菱形的性质、勾股定理等知识点, 解题的关键是掌握特殊四边形的性质和判定属于中考常考题型, 需要重点掌握.

24. 综合与实践: 折纸中的数学

折纸是我国传统的民间艺术, 也是同学们喜欢的手工活动之一, 幸运星、纸飞机、千纸鹤、密信等折纸活动在生活中都是广为流传的, 通过折纸我们可以得到许多美丽的图形, 同时折纸的过程还蕴含着丰富的数学知识, 折纸往往从长方形纸片开始, 下面就让我们带着数学的眼光来探究一下有关长方形纸片的折叠问题, 看看折叠长方形纸片蕴含着哪些丰富的数学知识.



(1) 折纸1: 如图1, 在一张长方形纸片上任意画一条线段 AB , 将纸片沿线段 AB 折叠 (如图2).

问题1: 重叠部分的 ABC 的形状_____ (是、不是) 等腰三角形.

问题2: 若 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, 则重叠部分 ABC 的面积为_____ cm^2 .

(2) 折纸2: 如图3, 长方形纸片 $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 6$, 若点 M 为射线 BC 上一点, 将 $\triangle ABM$ 沿着直线 AM 折叠, 折叠后点 B 的对应点为 B' , 当点 B' 恰好落在 BC 的垂直平分线上时, 求 BM 的长.

【答案】 (1) 问题1: 是; 问题2: $2\sqrt{21}$

(2) BM 的长为15或 $\frac{5}{3}$

【解析】

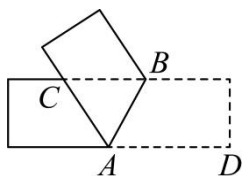
【分析】 (1) 据折叠得 $\angle BAC = \angle BAD$, 据长方形对边平行得 $\angle BAD = \angle CBA$, 故 $\angle BAC = \angle CBA$, 进而证明等腰三角形; 根据等腰三角形三线合一, 作 $CE \perp AB$, 由勾股定理算出 CE , 然后计算三角形面积;

(2) 分两种情况讨论, 当 M 在外部: 由垂直平分线、折叠得 $B'N = 4$, 再根据角相等, 推得正切值相等, 列方程求 BM ; 当 M 在内部: 由垂直平分线、折叠得 $B'N = 4$, 进而求得 $B'H = 1$, 然后由勾股定理列方程求 BM .

【小问1详解】

问题 1: 解: 是, 理由如下.

如图, 根据折叠的性质, 可得 $\angle BAC = \angle BAD$,



$\because$ 纸片为长方形,

$\therefore BC \parallel AD$,

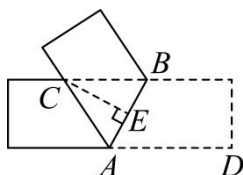
$\therefore \angle BAD = \angle CBA$,

$\therefore \angle BAC = \angle CBA$,

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

故答案为: 是.

问题 2: 解: 如图, 过点 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 于点 E ,



$\because \angle BAC = \angle CBA$,

$\therefore CA = CB$,

$\because CE \perp AB$,

$\therefore E$ 为 AB 中点,

$\because AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$,

$\therefore BE = AE = 2\text{cm}$,

$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{cm}$,

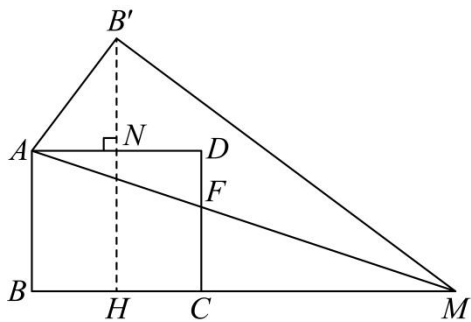
$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}\text{cm}^2$.

故答案为: $2\sqrt{21}$.

【小问 2 详解】

解: ① 如图, 点 M 在矩形外部, BC 的中垂线交 AD 于点 N , 交 BC 于点 H , 则 $\angle ANB' = \angle MHB' = 90^\circ$,

$NH = AB = 5$,



根据折叠的性质, $AB = AB' = 5$, $\angle ABM = \angle AB'M = 90^\circ$,

$\because BC = 6$,

$$\therefore AN = BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore B'N = \sqrt{AB'^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle B'AN = \frac{B'N}{AN} = \frac{4}{3}, \quad B'H = B'N + NH = 4 + 5 = 9,$$

$\because \angle B'AN + \angle AB'N = 90^\circ$, $\angle HB'M + \angle AB'N = 90^\circ$,

$\therefore \angle B'AN = \angle HB'M$,

$$\therefore \tan \angle B'AN = \tan \angle HB'M = \frac{MH}{B'H} = \frac{4}{3},$$

设 $MC = x$, 则 $MH = 3 + x$,

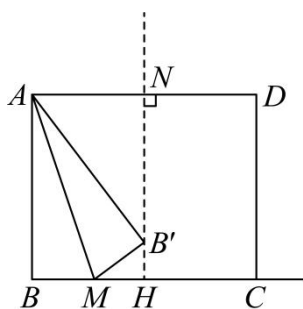
$$\therefore \frac{3+x}{9} = \frac{4}{3},$$

解得 $x = 9$, 即 $MC = 9$,

则 $BM = BC + MC = 6 + 9 = 15$;

② 如图, 点 M 在矩形内部, BC 的中垂线交 AD 于点 N , 交 BC 于点 H , 则 $\angle ANB' = \angle MHB' = 90^\circ$,

$$NH = AB = 5, \quad AN = BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$



根据折叠的性质，可知 $\angle ABM = \angle AB'M = 90^\circ$ ， $AB = AB' = 5$ ，

$$\therefore NB' = \sqrt{AB'^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore B'H = NH - NB' = 5 - 4 = 1,$$

设 $BM = x$ ，则 $MB' = x$ ， $MH = 3 - x$ ，

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MHB' \text{ 中， } MH^2 + B'H^2 = MB'^2,$$

$$\text{可得 } (3-x)^2 + 1^2 = x^2,$$

化简得 $6x = 10$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3}, \text{ 即 } BM = \frac{5}{3}.$$

综上， $BM = 15$ 或 $BM = \frac{5}{3}$ 。

答：BM 的长为 15 或 $\frac{5}{3}$ 。

【点睛】本题考查长方形的性质、折叠的性质、等腰三角形的判定、勾股定理的应用，明确折叠前后对应边相等、对应角相等，运用分类讨论思想是解题关键。

25. 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 于点 E 。

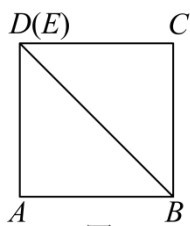


图1

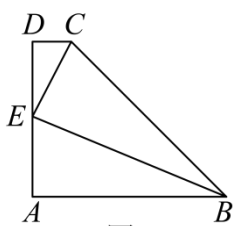
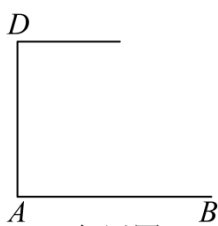


图2



备用图

(1) 如图1，如果点 E 与点 D 重合， $AD = AB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2) 如果 $AB = 5$ ， $AD = 4$ ，

①如图2， $BC = 4\sqrt{2}$ 时，求 $\angle EBC$ 的度数；

②当 BEC 是直角三角形时，求 DE 的长。

【答案】(1) 证明见解析

(2) ① 22.5° ; ② $\frac{3}{2}$ 或 2

【解析】

【分析】(1) 先证明四边形 $ABCD$ 是矩形, 进而根据 $AD = AB$ 即可求证;

(2) ①过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 可得四边形 $AFCD$ 是矩形, 得 $CF = AD = 4$, 再利用勾股定理得 $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = 4$, 即得 $\triangle BFC$ 是等腰直角三角形, 得到 $\angle CBF = 45^\circ$, 再根据角平分线的定义即可求解; ②分 $\angle ECB = 90^\circ$ 和 $\angle CEB = 90^\circ$ 两种情况, 利用矩形的性质和勾股定理解答即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle A = 90^\circ$, $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle A = 90^\circ,$$

$$\because AD = AB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

又 $\because AD = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形;

【小问 2 详解】

①解: 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ,

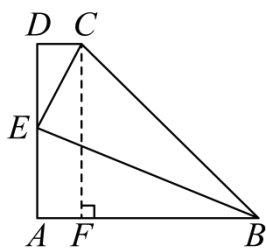


图2

$$\because AB \parallel CD, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle A = 90^\circ,$$

$$\because CF \perp AB,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle CFB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是矩形,

$$\therefore CF = AD = 4,$$

$$\therefore BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = 4,$$

$$\therefore BF = CF,$$

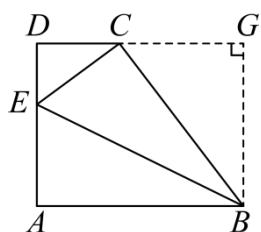
$\therefore \triangle BFC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CBF = 45^\circ,$$

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle FBC = 22.5^\circ;$$

②当 $\angle ECB = 90^\circ$ 时, 如图所示, 过点 B 作 $BG \perp DC$ 的延长线于点 G ,



$$\therefore \angle A = \angle D = \angle G = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是矩形,

$$\therefore BG = AD = 4, \quad DG = AB = 5,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ, \quad \angle ECB = 90^\circ,$$

$$\therefore EA \perp BA, \quad EC \perp BC,$$

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore EC = EA,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 和 $\text{Rt}\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} BE = BE \\ AE = CE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle CEB (\text{HL}),$$

$$\therefore CB = AB = 5,$$

设 $DE = x$, 则 $CE = AE = AD - DE = 4 - x$,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CBG \text{ 中, } CG = \sqrt{BC^2 - BG^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore CD = DG - CG = 5 - 3 = 2,$$

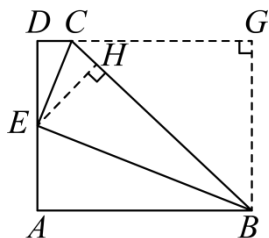
在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中, $DE^2 + CD^2 = CE^2$,

$$\therefore x^2 + 2^2 = (4 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore DE = \frac{3}{2};$$

当 $\angle CEB = 90^\circ$ 时, 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H ,



设 $\angle ABE = \alpha$, 则 $\angle EBC = \alpha$, $\angle AEB = 90^\circ - \alpha$,

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AEB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$$\therefore EH \perp BC,$$

$$\therefore \angle HEB = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle CEB - \angle HEB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle HEC,$$

$\therefore EC$ 是 $\angle DEH$ 的角平分线,

$$\therefore CD \perp ED, CH \perp EH,$$

$$\therefore CD = CH,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 和 $\text{Rt}\triangle HEC$ 中,

$$\begin{cases} CE = EC \\ CD = CH \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEC \cong \text{Rt}\triangle HEC (\text{HL}),$$

$$\therefore ED = EH,$$

又 $\because EB$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线, $EA \perp AB$, $EH \perp BC$,

$$\therefore EA = EH,$$

$$\therefore ED = EA,$$

$$\therefore AD = 4,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AD = 2;$$

综上, 当 $\triangle BEC$ 是直角三角形时, DE 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 2.

【点睛】 本题考查了矩形的判定和性质, 正方形的判定, 等腰直角三角形的判定和性质, 勾股定理, 角平

分线的性质等，正确作出辅助线是解题的关键.