

上海市民办至德 22025-2026 学年第二学期八年级期中考试数学试卷

2025 年第二学期期中考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 已知点 $P(3, m)$ 和 $Q(n, 4)$ 关于 x 轴对称, 则 $m + n$ 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

【答案】B

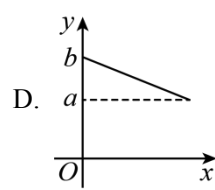
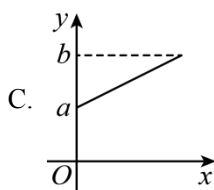
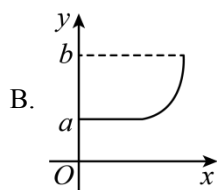
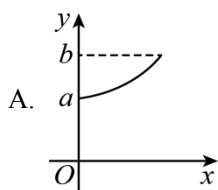
【解析】

【分析】利用平面直角坐标系中关于 x 轴对称的点的坐标规律求出 m 和 n 的值, 再计算 $m + n$ 即可.

【详解】解: 根据关于 x 轴对称的点的坐标规律可得 $n = 3$, $m = -4$,

$$\therefore m + n = -4 + 3 = -1.$$

2. 如图, 瓶子里水位高度为 a , 乌鸦喝不着水, 于是乌鸦衔来一个个小石子放入瓶中, 水位上升至瓶口 b 处, 乌鸦喝到了水. 设放入瓶中的石子个数为 x , 水位高度为 y , 假设每一颗石子的体积一样, 下列图象中最符合情境的大致图象是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】分析 y 随 x 的变化而变化的趋势, 由于原来水位较低, 乌鸦衔来一个个小石子放入瓶中, 水位将会上升, 结合下面容器截面面积大于上面, 由此即可作出判断.

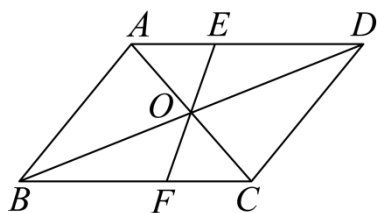
【详解】 $\because$ 乌鸦衔来一个个小石子放入瓶中, 水位将会上升, 但是下面容器截面面积大于上面,

$\therefore$ 水位上升的幅度较慢, 后面水位上升的较快,

$\therefore$ A 符合题意, B, C, D 不符合题意.

故选: A.

3. 如图, EF 过平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点 O , 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 若平行四边形 $ABCD$ 的周长为 18, 且四边形 $EFCD$ 的周长为 12, 则 EF 的长是 ()



A. 5

B. 4

C. 3

D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】利用平行四边形的性质, 易证 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$ (ASA), 从而得出 $AE = CF$, $DE = BF$, 再结合周长即可得解.

【详解】解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$, $AB = CD$, $OA = OC$,

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$,

在 $\triangle OAE$ 和 $\triangle OCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ (ASA),

$\therefore AE = CF$,

$\therefore AD - AE = BC - CF$, 即 $DE = BF$,

$\therefore AE + AB + BF = CF + CD + DE$,

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 18,

$\therefore CF + CD + DE = 9$,

$\because$ 四边形 $EFCD$ 的周长为 12,

$\therefore EF + CF + CD + DE = 12$,

$\therefore EF = 3$.

4. 下列命题中, 假命题是 ()

A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

B. 有一组对角是直角且一组对边相等的四边形是矩形

- C. 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形
D. 对角线互相垂直且有一组邻边相等的四边形是菱形

【答案】D

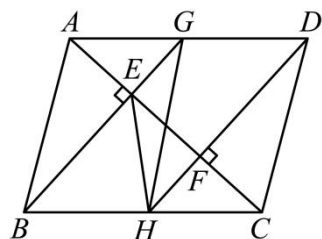
【解析】

【分析】本题考查特殊四边形的判定，根据平行四边形矩形正方形菱形的判定定理，逐一判断各命题的真假即可.

- 【详解】A、对角线互相平分的四边形是平行四边形，这是平行四边形的判定定理，故 A 是真命题；
B、有一组对角是直角且一组对边相等的四边形，可证明是平行四边形且有直角，因此是矩形，故 B 是真命题；
C、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，对角线相等的菱形是正方形，故 C 是真命题；
D、仅对角线互相垂直且有一组邻边相等，不能判定四边形是菱形，菱形需要对角线互相垂直平分，或是一组邻边相等的平行四边形，存在满足条件但不是菱形的反例，故 D 是假命题.

故选：D.

5. 图，AC 是 $\square ABCD$ 的对角线，过点 B 作 $BG \perp AC$ 交 AD 于点 G，垂足为 E，过点 D 作 $DH \perp AC$ 交 BC 于点 H，垂足为 F，连接 GH、EH. 则下列结论：① $BE = DF$ ；② 四边形 GBHD 是平行四边形；③ $\angle GAC = \angle DHC$ ；④ GH 平分 $\square ABCD$ 的周长，其中正确的是（ ）



- A. ②③④ B. ①②③ C. ①②④ D. ①③④

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质和判定，平行四边形的性质和判定，通过相关性质逐一判断即可，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

- 【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，
 $\therefore \angle BAC = \angle DCA$ ，
 $\because BG \perp AC$ ， $DH \perp AC$ ，
 $\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$ (AAS) ①正确;

$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$,

$\therefore BG \parallel DH$,

又 $\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $GBHD$ 是平行四边形; ②正确;

$\therefore \angle GAC = \angle ACH$,

$\therefore \angle GAC$ 、 $\angle DHC$ 不一定相等; ③错误;

$\therefore$ 四边形 $GBHD$ 是平行四边形, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BH = DG, AB = CD, AD = BC$,

$\therefore AG = HC$,

$\therefore AG + AB + BH = HC + CD + DG$; ④正确.

6. 在平面直角坐标系中, 对于点 $P(x, y)$, 我们把点 $P(-y+1, x+1)$ 叫做点 P 的伴随点, 已知点 A_1 的伴随点为 A_2 , 点 A_2 的伴随点为 A_3 , 点 A_3 的伴随点为 A_4 ... 这样依次得到点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. 经过这样的变换后得到的点 A_{2024} 的坐标为 $(2, 3)$, 则初始点 A_1 的坐标为 ()

A. $(2, 3)$

B. $(-2, 3)$

C. $(2, -1)$

D. $(-2, -1)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据伴随点定义推导可得点的坐标每 4 个为一个周期循环, 由 2024 能被 4 整除得 $A_{2024} = A_4$, 设出 A_1 坐标, 按定义求出 A_4 坐标, 列方程求解即可.

【详解】解: $\because$ 点 $P(x, y)$ 的伴随点为 $(-y+1, x+1)$, 设 $A_1(x, y)$,

$\therefore$ 按定义依次计算得:

$$A_2(-y+1, x+1),$$

$$A_3(-x-1+1, -y+1+1) = (-x, -y+2),$$

$$A_4(y-2+1, -x+1) = (y-1, -x+1),$$

$$A_5(x-1+1, y-1+1) = (x, y) = A_1,$$

$\therefore$ 点的坐标每 4 个为一个周期循环,

$\therefore 2024 \div 4 = 506$, 刚好整除,

$$\therefore A_{2024} = A_4,$$

$$\therefore A_{2024} \text{ 的坐标为 } (2, 3),$$

$$\therefore \text{可得方程组: } \begin{cases} y-1=2 \\ -x+1=3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases},$$

$$\therefore A_1 \text{ 的坐标为 } (-2, 3).$$

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 如果正比例函数的图象经过点 $Q(2, -3)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 且 $x_1 < x_2$, 那么 y_1 和 y_2 的大小关系是_____.

【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 先设出正比例函数的一般形式, 代入已知点的坐标求出比例系数 k , 再根据 k 的符号判断函数的增减性, 最后根据 $x_1 < x_2$ 比较 y_1 与 y_2 的大小.

【详解】 解: 设正比例函数的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$

将 $Q(2, -3)$ 代入解析式得, $2k = -3$

$$\text{解得 } k = -\frac{3}{2} < 0$$

根据正比例函数的性质, 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小

$$\therefore x_1 < x_2$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

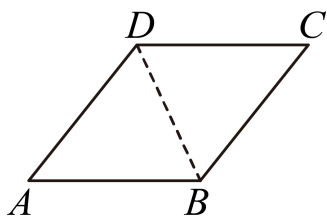
8. 菱形的一个外角为 120° , 边长为 10 厘米, 则此菱形较短的对角线的长等于_____厘米.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质, 邻补角的性质, 等边三角形的判定与性质, 正确求出菱形的内角度数, 判断较短对角线与邻边的关系是解题关键.

【详解】 解: 已知菱形的一个外角为 120° , 根据邻补角的性质, 可得该外角相邻的内角为 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, 设菱形 $ABCD$ 的边长为 10 厘米, $\angle BAD = 60^\circ$, 连接 BD , 如图所示:



∵菱形的四条边相等,

$$\therefore AB = AD = 10 \text{ 厘米}$$

又∵ $\angle BAD = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore BD = AB = 10 \text{ 厘米},$$

∵菱形 60° 内角所对的对角线为菱形较短的对角线,

∴此菱形较短的对角线的长等于10厘米.

9. 若 n 边形共有 35 条对角线, 则该多边形内角和为_____.

【答案】 1440°

【解析】

【分析】 根据 n 边形共有对角线 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条, 即可列出方程: $\frac{n(n-3)}{2} = 35$, 求出 n 的值, 再根据多边形

的内角和为: $(n-2) \times 180^\circ$, 可求出其内角和.

【详解】 解: ∵ n 边形共有 35 条对角线,

$$\therefore \frac{n(n-3)}{2} = 35,$$

解得 $n = 10$ 或 $n = -7$ (舍去),

故这个多边形是十边形, 内角和为:

$$(n-2) \times 180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ.$$

故答案为: 1440° .

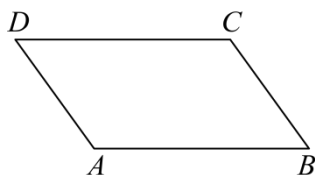
10. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 70^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为_____.

【答案】 125°

【解析】

【分析】 利用平行四边形对边平行得到邻角互补, 结合平行四边形对角相等的性质, 根据已知条件列方程求解 $\angle A$, 即可得到 $\angle C$ 的度数.

【详解】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,



$$\therefore AD \parallel BC, \angle C = \angle A, \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A - \angle B = 70^\circ,$$

$$\therefore 2\angle A = 250^\circ,$$

$$\text{解得 } \angle A = 125^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle A = 125^\circ.$$

11. 已知 ABC 三个顶点的坐标为 $A(-1,3)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(2,2)$ ，则三角形的形状为_____.

【答案】 等腰直角三角形

【解析】

【分析】 先利用两点间距离公式计算出 ABC 三边的平方，再结合勾股定理逆定理和边的数量关系判断三角形形状.

【详解】 解: $\because A(-1,3)$, $B(0,1)$, $C(2,2)$,

$$\therefore AB^2 = (-1-0)^2 + (3-1)^2 = 1+4=5,$$

$$BC^2 = (0-2)^2 + (1-2)^2 = 4+1=5,$$

$$AC^2 = (-1-2)^2 + (3-2)^2 = 9+1=10,$$

$$\text{可得 } AB^2 = BC^2, \text{ 即 } AB = BC,$$

$$\text{又} \because AB^2 + BC^2 = 5+5=10=AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

12. 探究课上，小明画出 ABC ，他想利用尺规作图找一点 D ，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 以下三种作图方法中，正确的有_____. (填序号).

①以 A 为圆心， BC 长为半径画弧；以 C 为圆心， AB 长为半径画弧，两弧交于点 D .

②连接 AC ，取 AC 中点 O ，连接 BO 并延长至 D ，使 $OD = OB$.

③过点 B 作 $BD \parallel AC$ ，过点 C 作 $CD \parallel AB$ ，两直线交于点 D .

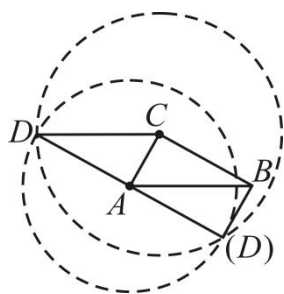
【答案】 ①②

【解析】

【分析】 根据平行四边形的判定定理，分别判断三种作图方法得到的四边形是否满足平行四边形的判定条

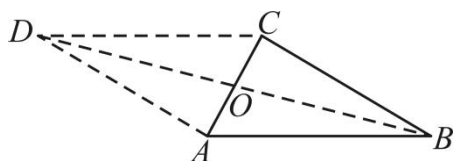
件即可.

【详解】①由作图可得 $AD = BC$, $AB = CD$,



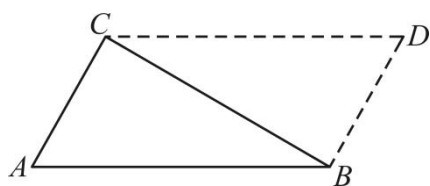
根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故①正确;

②由作图可得 $AO = OC$, $OD = OB$,



根据对角线互相平分的四边形是平行四边形, 可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故②正确;

③由作图可得四边形 $ABDC$ 是平行四边形, 故③错误.



故答案为: ①②.

13. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知对角线 $AC \perp BD$, 顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点, 得到四边形 $EFGH$;

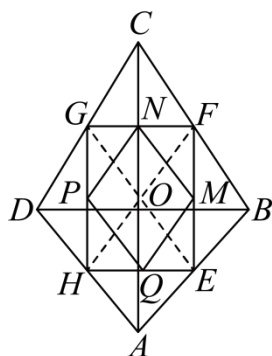
再顺次连接四边形 $EFGH$ 各边中点, 得到四边形 $MNPQ$. 则四边形 $MNPQ$ 的形状为_____.

【答案】菱形

【解析】

【分析】先确定第一次连接各边中点得到的四边形 $EFGH$ 的形状, 再推导四边形 $MNPQ$ 的形状即可.

【详解】解: 在四边形 $ABCD$ 中, E , F , G , H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点,



根据三角形中位线定理, 得 $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$, $GH \parallel AC$, $GH = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore EF \parallel GH$, $EF = GH$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

又 $\because AC \perp BD$, $EH \parallel BD$,

$\therefore EF \perp EH$, 即 $\angle HEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形,

$\therefore$ 矩形 $EFGH$ 的对角线相等, 即 $EG = FH$,

$\because M, N, P, Q$ 分别是矩形 $EFGH$ 各边的中点,

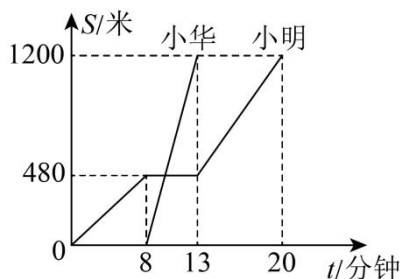
根据三角形中位线定理, 可得 $MN = \frac{1}{2}EG$, $NP = \frac{1}{2}FH$, $PQ = \frac{1}{2}EG$, $QM = \frac{1}{2}FH$,

$\because EG = FH$,

$\therefore MN = NP = PQ = QM$,

由四边相等的平行四边形是菱形, 即四边形 $MNPQ$ 是菱形.

14. 小华和小明是同班同学, 也是邻居, 某日早晨, 小明 7:40 先出发去学校, 走了一段后, 在途中停下吃了早餐, 后来发现上学时间快到了, 就跑步到学校; 小华离家后直接乘公共汽车到了学校, 如图是他们从家到学校已走的路程 S (米) 和所用时间 t (分钟) 的关系图, 则下列说法中正确的是_____.



①小明家和学校距离1200米

②小华乘公共汽车的速度是240米/分

③小明从家到学校的平均速度为80米/分

【答案】 ①②

【解析】

【分析】 通过图像可得小明家距离学校1200米, 小华家也是, 得知距离时间即可算出速度.

【详解】 解: ①、由图可得小明家距离学校1200米,

②、小华从家到学校用时5分钟, 距离为1200米路程除以时间可得速度, 即 $1200 \div 5 = 240$ 米每分钟,

③、平均速度是路程除以总时间, 为60米/分.

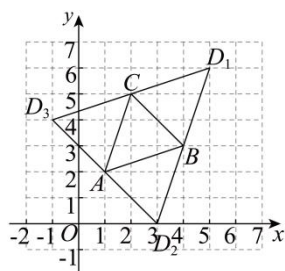
15. 在平面直角坐标系中, 已知平行四边形的三个顶点坐标分别是 $A(1,2)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$, 则平行四边形第四个顶点 D 的坐标_____.

【答案】 $(5,6)$ 或 $(3,0)$ 或 $(-1,4)$

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质, 画出可能的三种情况, 即可得出答案.

【详解】 解: 在平面直角坐标系中, 已知平行四边形的三个顶点坐标分别是 $A(1,2)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$, 分别过 $\triangle ABC$ 三个顶点作对边平行线, 交点即为点 D , 如图,



当四边形 $ABDC$ 是平行四边形时, 即图中 $D_1(x,y)$, 此时 BC 中点坐标为 $\left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, AD 中点坐标

为 $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$,

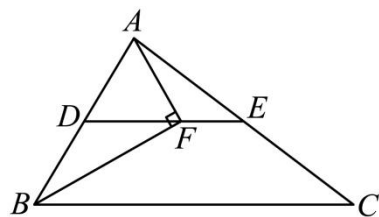
$\therefore \frac{4+2}{2} = \frac{1+x}{2}, \frac{3+5}{2} = \frac{2+y}{2}$, 解得 $x=5, y=6$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(5,6)$,

同理可得其他两个点 D 的坐标为 $(3,0)$, $(-1,4)$,

故答案为: $(5,6)$ 或 $(3,0)$ 或 $(-1,4)$.

16. 如图, DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 点 F 在 DE 上, 已知 $AB=12$, $BC=18$, 且 $EF=3$. 若 $\angle CBF=35^\circ$, 则 $\angle ABF=$ _____°.



【答案】 35

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理求出 DE 的长及 $DE \parallel BC$ ，进而求出 DF 的长，结合 D 为 AB 中点可得 $BD = DF$ ，利用等腰三角形的性质及平行线的性质即可求解。

【详解】 $\because DE$ 为 ABC 的中位线，

$$\therefore DE \parallel BC \text{ 且 } DE = \frac{1}{2}BC = 9,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle CBF = 35^\circ, \quad DF = DE - EF = 9 - 3 = 6,$$

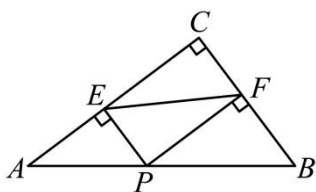
$\because D$ 为 AB 中点，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 6,$$

$$\therefore DF = BD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle DFB = 35^\circ.$$

17. 如图，在 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，点 P 为斜边 AB 上一动点，过点 P 作 $PE \perp AC$ ， $PF \perp BC$ ，垂足分别为点 E 、 F ，连接 EF ，则线段 EF 的最小值为_____。



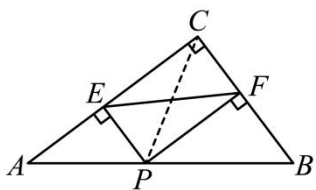
【答案】 2.4

【解析】

【分析】连接 PC ，当 $CP \perp AB$ 时， PC 最小，利用三角形面积解答即可。

本题主要考查的是矩形的判定与性质，关键是根据矩形的性质和三角形的面积公式解答。

【详解】解：解：连接 PC ，



$$\because PE \perp AC, \quad PF \perp BC,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle PFC = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ECFP$ 是矩形，

$$\therefore EF = PC,$$

$\therefore$ 当 PC 最小时， EF 也最小，

即当 $CP \perp AB$ 时， PC 最小，

$$\therefore AC=4, BC=3,$$

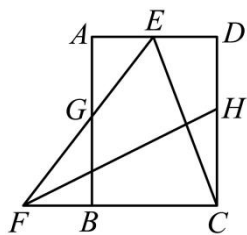
$$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5,$$

$$\therefore PC \text{ 的最小值为: } \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$$

$$\therefore \text{线段 } EF \text{ 长的最小值为 } 2.4,$$

故答案为: 2.4.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $BC=6$, 点 E 是 AD 上一点, 且 $DE=2$, CE 的垂直平分线交 CB 的延长线于点 F , 交 CD 于点 H , 连接 EF 交 AB 于点 G . 若 G 是 AB 的中点, 则 AB 的长是_____.

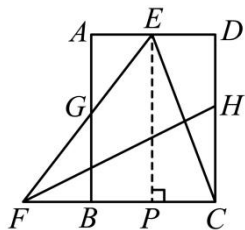


【答案】6

【解析】

【分析】过点 E 作 $EP \perp BC$ 于点 P , 证四边形 $ABPE$ 为矩形, 得出 $BP=AE$, $EP=AB$, 再证 $\triangle AEG \cong \triangle BFG$, 得出 $BF=AE$, 由垂直平分线性质的 $EF=FC$, 在 $\text{Rt}\triangle EFP$ 中利用勾股定理求解即可.

【详解】解: 过点 E 作 $EP \perp BC$ 于点 P ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle A = \angle ABC = 90^\circ, AD = BC = 6, AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABPE$ 为矩形,

$$\therefore BP = AE, EP = AB,$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\therefore AE = AD - DE = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore BP = 4,$$

$\therefore G$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AG = BG,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle BFG,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle BFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle BFG \\ \angle AGE = \angle BGF \\ AG = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BFG (AAS),$$

$$\therefore BF = AE = 4,$$

$$\therefore FP = FB + BP = 4 + 4 = 8, \quad FC = FB + BC = 4 + 6 = 10,$$

$\therefore FH$ 垂直平分 CE ,

$$\therefore EF = FC = 10,$$

在 $\text{Rt}\triangle EFP$ 中, $EP^2 + FP^2 = EF^2$,

$$\therefore EP^2 + 8^2 = 10^2,$$

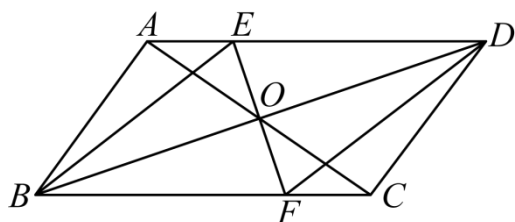
$$\text{解得 } EP_1 = 6, \quad EP_2 = -6 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore AB = EP = 6.$$

【点睛】 本题主要考查了矩形的性质, 全等三角形的性质和判定, 勾股定理, 垂直平分线的定理, 熟练掌握相关知识点是解决本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , 过点 O 作 $EF \perp BD$, 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 连接 BE 、 DF . 求证:



$$(1) \quad OE = OF;$$

(2) 四边形 $BEDF$ 是菱形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质证明 $\triangle ODE \cong \triangle OBF$ 即可得出结论;

(2) 先证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形, 再利用线段垂直平分线的性质证明邻边相等.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore OB = OD, AD = BC,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle OBF, \angle OED = \angle OFB,$$

$$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OBF (\text{AAS}),$$

$$\therefore OE = OF;$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 得 $OE = OF, OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

又 $\because EF \perp BD$,

$\therefore EF$ 垂直平分线段 BD ,

$$\therefore BE = DE,$$

$\therefore$ 平行四边形 $BEDF$ 是菱形.

20. 已知 $y = (k-2)x^{k^2-3}$, 且 y 是关于 x 的正比例函数.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式;

(2) 已知点 $A(1,0)$, 点 B 在该函数图象上, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 4, 求点 B 的坐标.

【答案】(1) $y = -4x$

(2) 点 B 的坐标为 $(2, -8)$ 或 $(-2, 8)$

【解析】

【分析】(1) 根据正比例函数的定义, 得到 x 的次数为 1, 系数不为 0, 求解 k 的值后代入即可得到函数关系式;

(2) 先确定 OA 的长度, 利用三角形面积公式求出点 B 纵坐标的绝对值, 再代入函数解析式求出横坐标, 即可得到点 B 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because y = (k-2)x^{k^2-3}$ 是 y 关于 x 的正比例函数,

$$\therefore \begin{cases} k^2 - 3 = 1 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases},$$

由 $k^2 - 3 = 1$ 得 $k^2 = 4$,

解得 $k = \pm 2$

又 $\because k - 2 \neq 0$, 即 $k \neq 2$,

$\therefore k = -2$

代入得 $y = -4x$;

【小问 2 详解】

由题意得, O 为坐标原点, $A(1,0)$,

$\therefore OA = 1$,

设点 B 的坐标为 (m,n) ,

$\because S_{\triangle OAB} = 4$,

$\therefore \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |n| = 4$, 代入 $OA = 1$ 得 $\frac{1}{2} \times 1 \times |n| = 4$,

解得 $|n| = 8$, 即 $n = 8$ 或 $n = -8$,

当 $n = 8$ 时, 代入 $y = -4x$ 得 $8 = -4m$,

解得 $m = -2$, 此时 $B(-2,8)$;

当 $n = -8$ 时, 代入 $y = -4x$ 得 $-8 = -4m$,

解得 $m = 2$, 此时 $B(2,-8)$.

综上, 点 B 的坐标为 $(2,-8)$ 或 $(-2,8)$.

21. “阅读材料: 新型节能灯的省电秘密”

为了响应低碳生活, 某实验室研发了一种新型智能节能灯. 已知该节能灯开启的时间 x (小时) 与它相比普通灯泡累计节省的电量 y (度) 成正比例关系, 即 $y = kx$ ($k \neq 0$). 这里的 k 代表该节能灯每小时节省电量的效率 (度/小时), 在实验记录中, 研究人员发现: 当这盏灯连续开启的时间设定为 $2k$ 小时, 它累计节省的电量恰好是 $(-k+6)$ 度.

问题:

(1) 求出该节能灯节省电量 y 与开启时间 x 的函数解析式.

(2) 如果实验目标是累计节省 30 度电, 请问该节能灯需要连续开启多少小时?

【答案】(1) $y = \frac{3}{2}x$

(2) 20 小时

【解析】

【分析】(1) 将题目给出的 x 和 y 代入正比例函数关系式, 求出 k 的值, 结合实际意义舍去不符合的 k 的值, 即可得到函数解析式;

(2) 将目标节省电量 $y = 30$ 代入所求解析式, 计算得到开启时间 x 即可.

【小问 1 详解】

解: 已知 y 与 x 满足 $y = kx (k \neq 0)$,

由题意得, 当 $x = 2k$ 时, $y = -k + 6$,

将 x 、 y 代入函数式得 $k \cdot 2k = -k + 6$,

整理得 $2k^2 + k - 6 = 0$,

$$\therefore (2k - 3)(k + 2) = 0,$$

$$\therefore 2k - 3 = 0 \text{ 或 } k + 2 = 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{3}{2} \text{ 或 } k = -2,$$

$\because$ 节能灯节省电量的效率 k 应为正数,

$$\therefore k = -2 \text{ 舍去,}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{该节能灯节省电量 } y \text{ 与开启时间 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{3}{2}x;$$

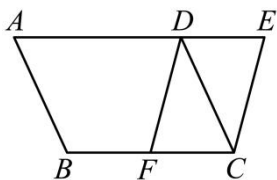
【小问 2 详解】

$$\text{解: 将 } y = 30 \text{ 代入 } y = \frac{3}{2}x \text{ 得 } \frac{3}{2}x = 30,$$

$$\text{解得: } x = 20,$$

答: 该节能灯需要连续开启 20 小时.

22. 如图, 将 $\square ABCD$ 的 AD 边延长至点 E , 使 $DE = \frac{1}{2}AD$, 连接 CE , F 是 BC 边的中点, 连接 FD .



(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 若 $AD = 8$, $\angle A = 60^\circ$, $CE = 4$,

①请判断 $\triangle CDE$ 的形状, 并求出 $\triangle CDE$ 的面积.

②直接写出 $\square ABCD$ 的面积_____.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $\triangle CDE$ 是等边三角形, $\triangle CDE$ 的面积为 $4\sqrt{3}$; ② $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质得到 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 再由已知条件证明 $CF = DE$, 据此可证明结论;

(2) ①过点 C 作 $CH \perp DE$ 于点 H , 由平行四边形的性质和平行线的性质得到 $\angle CDE = \angle A = 60^\circ$, 证明 $DE = CE$, 即可证明 $\triangle CDE$ 是等边三角形, 得到 $EH = \frac{1}{2}DE = 2$, 则 $CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = 2\sqrt{3}$, 即可得到 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot CH$; ②由 $S_{\text{平行四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot CH$ 可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$\because F$ 是 BC 边的中点,

$\therefore CF = \frac{1}{2}BC$,

$\because DE = \frac{1}{2}AD$,

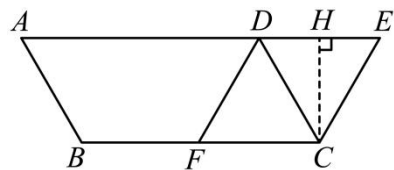
$\therefore CF = DE$,

又 $\because CF \parallel DE$,

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: ①如图所示, 过点 C 作 $CH \perp DE$ 于点 H ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CDE = \angle A = 60^\circ$,

$\because AD = 8$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = 4 = CE$,

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore CH \perp DE$,

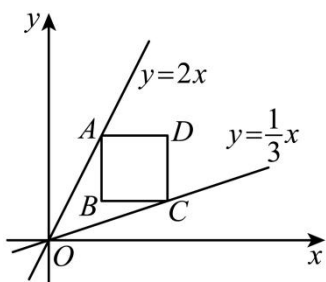
$$\therefore EH = \frac{1}{2}DE = 2,$$

$$\therefore CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot CH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 (2) } \textcircled{1} \text{ 得 } S_{\text{平行四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的各边都平行于坐标轴, 且在第一象限内, 点 A 、 C 分别在直线 $y = 2x$ 和 $y = \frac{1}{3}x$ 上.



(1) 如果点 A 的横坐标为 8, 点 C 的纵坐标为 6, 求点 D 的坐标;

(2) 如果点 A 在直线 $y = 2x$ 上运动, 且点 C 始终在直线 $y = \frac{1}{3}x$ 上运动, 设点 A 的横坐标为 m , 正方形 $ABCD$ 的边长为 a

① 请用含 m 、 a 的代数式表示点 C 的坐标, 并求出 a 与 m 的数量关系;

② 求点 B 所在直线的正比例函数解析式;

【答案】 (1) $D(18, 16)$

(2) ① $C(m+a, 2m-a)$, $a = \frac{5}{4}m$; ② $y = \frac{3}{4}x (x > 0)$

【解析】

【分析】 (1) 分别求出 $y_A = 16$, $x_C = 18$, 即可求解点 D 的坐标;

(2) ① 可得 $A(m, 2m)$, 而由正方形得到 $AB = BC = a$, 故 $x_C = x_A + a = m + a$, $y_C = y_B = 2m - a$, 即可求解点 C 坐标, 再将点 C 坐标代入 $y = \frac{1}{3}x$, 求解 a 与 m 的数量关系;

② 可得 $x_B = x_A = m$, $y_B = y_C = 2m - a = 2m - \frac{5}{4}m = \frac{3}{4}m$, 则 $B\left(m, \frac{3}{4}m\right)$, 再由待定系数法求解正比例函数解析式.

【小问 1 详解】

解: 将 $x_A = 8$ 代入 $y = 2x$ 得, $y_A = 16$,

将 $y_C = 6$ 代入 $y = \frac{1}{3}x$, 则 $\frac{1}{3}x_C = 6$,

$$\therefore x_C = 18,$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的各边都平行于坐标轴,

$$\therefore x_D = x_C = 18, \quad y_D = y_A = 16,$$

$$\therefore D(18, 16);$$

【小问 2 详解】

解: ① $\therefore$ 点 A 在直线 $y = 2x$ 上运动, 设点 A 的横坐标为 m ,

$$\therefore A(m, 2m),$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 正方形 $ABCD$ 的各边都平行于坐标轴,

$$\therefore AB = BC = a, \quad x_B = x_A = m,$$

$$\therefore x_C = x_B + a = m + a, \quad y_C = y_B = 2m - a,$$

$$\therefore C(m + a, 2m - a),$$

$\therefore$ 点 C 始终在直线 $y = \frac{1}{3}x$ 上运动,

$$\therefore 2m - a = \frac{1}{3}(m + a),$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}m;$$

② $\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 正方形 $ABCD$ 的各边都平行于坐标轴,

$$\therefore x_B = x_A = m, \quad y_B = y_C = 2m - a = 2m - \frac{5}{4}m = \frac{3}{4}m,$$

$$\therefore B\left(m, \frac{3}{4}m\right),$$

设点 B 所在直线的正比例函数解析式为 $y = px (p \neq 0)$,

$$\text{则 } mp = \frac{3}{4}m,$$

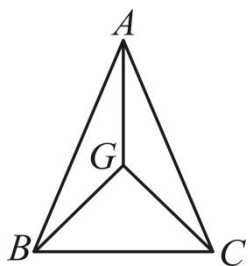
$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的各边都平行于坐标轴, 且在第一象限内,

$$\therefore m > 0,$$

$$\text{解得 } p = \frac{3}{4},$$

$\therefore$ 点 B 所在直线的正比例函数解析式为 $y = \frac{3}{4}x (x > 0)$.

24. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 13$, $BC = 10$, G 是 $\triangle ABC$ 的重心.



(1) 求 AG 的长;

(2) 过点 G 作 $DE \parallel BC$, 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E , 猜想 AD 与 DB 的比值, 并证明.

【答案】 (1) 8 (2) 比值为 2, 证明见解析

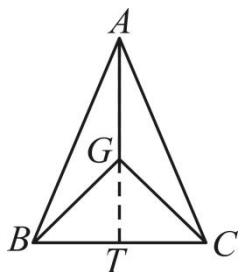
【解析】

【分析】 (1) 延长 AG 交 BC 于点 T , 根据三角形的重心可得 $BT = CT$, $AG = 2GT$, 再由等腰三角形的性质以及勾股定理求解即可;

(2) 连接 DT , 根据共高三角形面积比等于底之比进行转化求解即可.

【小问 1 详解】

解: 延长 AG 交 BC 于点 T ,



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心

$\therefore BT = CT$, $AG = 2GT$

$\because AB = AC = 13$, $BC = 10$

$\therefore AT \perp BC$, $BT = CT = 5$

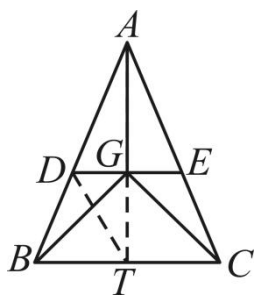
$\therefore AT = \sqrt{AB^2 - BT^2} = 12$

$\therefore AG = \frac{2}{3}AT = 8$

【小问 2 详解】

解: 比值为 2, 证明如下:

如图, 连接 DT ,



$$\therefore AG = 2GT$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = 2S_{\triangle DGT}$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\therefore S_{\triangle DGT} = S_{\triangle DGB}$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = 2S_{\triangle DGB},$$

$$\therefore AD = 2BD$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = 2$$

$\therefore AD$ 与 DB 的比值为 2.

25. 如图 1, 点 A, B, C 的坐标分别是 $A(0,4)$ 、 $B(0,-4)$ 、 $C(3,0)$,

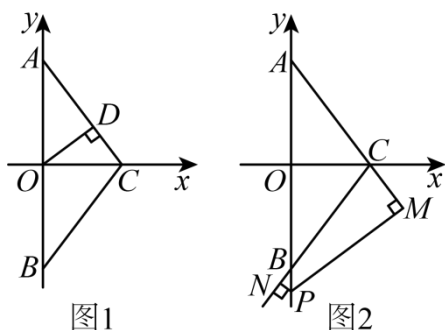


图1

图2

(1) 如图 1, 过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D , OD 的值为_____;

(2) 如图 2, 点 P 为线段 OB 的延长线上的一动点, 当点 P 在 OB 的延长线上向下运动时, 作 $PM \perp AC$ 于点 M , $PN \perp BC$ 于点 N , 式子 $AC \cdot (PM - PN)$ 的值是否发生变化, 若不变, 求出其值; 若变化, 写出其值的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{12}{5}$

(2) 不变, $AC \cdot (PM - PN) = 24$, 理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据给出坐标求出相关线段的长度, 利用等面积求解;

(2) 连接 PC ，证明 $AC = BC$ ，根据三角形的面积得出 $AC \cdot (PM - PN) = 2S_{\triangle ABC}$ ，然后即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because A(0,4)、C(3,0)$ ，

$$\therefore OA = 4, OC = 3,$$

由勾股定理得 $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 5$ ，

$$\because OD \perp AC,$$

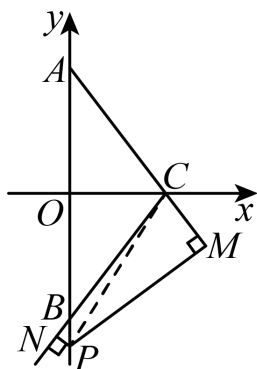
$$\therefore \text{由等面积得 } \frac{1}{2}OA \cdot OC = \frac{1}{2}AC \cdot OD,$$

$$\therefore OD = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5};$$

【小问 2 详解】

解： 不变， $AC \cdot (PM - PN) = 24$ ，理由如下：

如图所示，连接 PC ，



$$\because A(0,4)、B(0,-4),$$

$$\therefore OA = OB = 4, AB = 8,$$

$$\text{又} \because \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \text{ 垂直平分线段 } AB,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\because PM \perp AC, PN \perp BC,$$

$$\therefore AC \cdot (PM - PN)$$

$$= AC \cdot PM - AC \cdot PN$$

$$= AC \cdot PM - BC \cdot PN$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} AC \cdot PM - \frac{1}{2} BC \cdot PN \right)$$

$$= 2 (S_{\triangle APC} - S_{\triangle BPC})$$

$$= 2S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore OC = 3, AB = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12,$$

$$\therefore AC \cdot (PM - PN) = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times 12 = 24.$$