

2025-2026 学年八年级数学下学期 5 月学情自测卷

全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 测试范围: 沪教版新教材八年级下册第 23~25 章四边形、平面直角坐标系、一次函数

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 在平面直角坐标系中, 将点 $A(-1, 2)$ 先向左平移 5 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度后与点 $B(x, y)$ 重合, 则点 B 的坐标是()
- A. $(4, 5)$ B. $(-6, 5)$ C. $(4, -1)$ D. $(-6, -1)$

【答案】D

【详解】解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(-1, 2)$,

$\therefore$ 点 A 向左平移 5 个单位长度后, 横坐标为 $-1-5=-6$, 得到点 $(-6, 2)$,

再将点 $(-6, 2)$ 向下平移 3 个单位长度, 纵坐标为 $2-3=-1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-6, -1)$.

2. 一次函数 $y=3x+b$ 的图像经过第一、三、四象限, 则 b 的取值范围是 ()

A. $b \geq 0$ B. $b > 0$ C. $b \leq 0$ D. $b < 0$

【答案】D

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y=3x+b$ 的一次项系数为 $3 > 0$,

$\therefore$ 该一次函数图像一定经过第一、三象限,

$\therefore$ 该函数图像还经过第四象限,

$\therefore$ 函数图像与 y 轴相交于 y 轴负半轴,

当 $x=0$ 时, $y=b$, 交点坐标为 $(0,b)$,

$\therefore b < 0$.

3. 在下列叙述中, 错误的是 ()

- A. 任何多边形的内角中最多有三个锐角
- B. 任何多边形的内角中最多有四个直角
- C. 对角线总条数等于其边数的多边形是五边形
- D. 从 n 边形一个顶点出发可以作 $(n-2)$ 条对角线

【答案】D

【详解】解: A、 $\because$ 任意多边形的外角和为 360 度,

$\therefore$ 任意多边形的外角中, 最多有三个钝角,

$\therefore$ 任意多边形的内角中, 最多有三个锐角, 原说法正确, 不符合题意;

B、当多边形的一个内角是直角时, 与其相邻的外角也是直角, 而任意多边形的外角和为 360 度, 故任意多边形的外角中, 最多有 4 个直角, 即任何多边形的内角中最多有四个直角, 原说法正确, 不符合题意;

C、 $n(n \geq 3)$ 边形对角线总条数公式为 $\frac{n(n-3)}{2}$, 当 $\frac{n(n-3)}{2} = n$ 时, 解得 $n=5$ 或 $n=0$ (舍去), 故对角线总条数等于其边数的多边形是五边形, 原说法正确, 不符合题意;

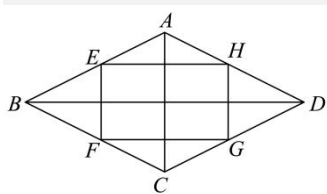
D、从 n 边形一个顶点出发可以作 $(n-3)$ 条对角线, 原说法错误, 符合题意;

4. 顺次连接菱形各边的中点得到的四边形是 ()

- A. 矩形
- B. 菱形
- C. 正方形
- D. 平行四边形

【答案】A

【详解】解: 设菱形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点, 连接 AC, BD .



$\because E, F$ 分别是 AB, BC 的中点,

$\therefore EF$ 是 ABC 的中位线,

$\therefore EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2} AC$.

同理可得: $HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2} AC, EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2} BD$.

$\therefore EF \parallel HG, EF = HG,$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

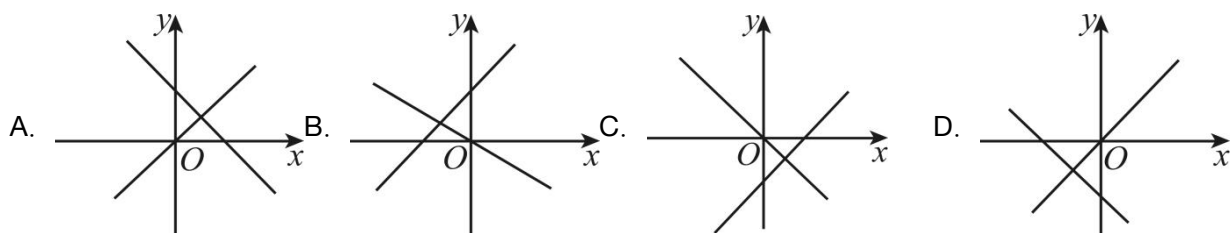
$\therefore AC \perp BD,$

又 $\because EF \parallel AC, EH \parallel BD,$

$\therefore EF \perp EH,$ 即 $\angle HEF = 90^\circ,$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

5. 在同一平面直角坐标系中, 直线 $y = x - a$ 和直线 $y = ax$ 的图象可能是 ()

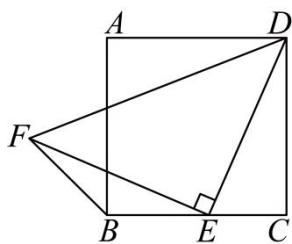


【答案】B

【详解】解: 当 $a > 0$ 时, 直线 $y = ax$ 经过第一, 三象限, 且经过原点, 直线 $y = x - a$ 经过第一, 三, 四象限, 无符合题意的选项;

当 $a < 0$ 时, 直线 $y = ax$ 经过第二, 四象限, 且经过原点, 直线 $y = x - a$ 经过第一, 二, 三象限, **B** 符合题意.

6. **【新考向】**如图, 正方形 $ABCD$ 中, E 为 BC 边上一点, 连接 DE , 将 DE 绕点 E 逆时针旋转 90° 得到 EF , 连接 DF 、 BF , 若 $\angle ADF = 20^\circ$, 则 $\angle EFB$ 一定等于 ()



A. 20°

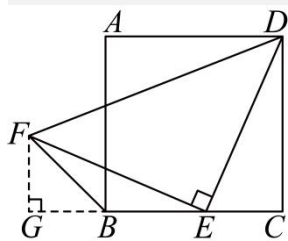
B. 25°

C. 30°

D. 10°

【答案】A

【详解】解: 过点 F 作 $FG \perp CB$, 交 CB 的延长线于点 G ,



由旋转得, $DE = EF, \angle DEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDF = 45^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore CD = BC, \angle ADC = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle EGF = 90^\circ$.

$\because \angle CDE + \angle CED = 90^\circ, \angle FEG + \angle CED = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE = \angle FEG$,

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle GEF$ (AAS),

$\therefore FG = CE, EG = CD$,

$\therefore EG = BC$,

即 $BG + BE = BE + CE$,

$\therefore BG = CE = FG$,

$\therefore \angle FBG = 45^\circ$.

$\because \angle ADF = 20^\circ, \angle EDF = 45^\circ$,

$\therefore \angle CDE = \angle FEG = 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$,

$\therefore \angle EFB = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 若点 A 的横坐标不变, 纵坐标乘以 -1 后得点 C , 则在平面直角坐标系 xOy 中, 点 C 与点 A 关于_____轴对称.

【答案】 x

【详解】 解: 设点 A 的坐标为 (x, y)

由题意得, 变换后点 C 的坐标为 $(x, -y)$

根据平面直角坐标系中对称点的坐标特征: 横坐标相同, 纵坐标互为相反数的两点关于 x 轴对称.

可得点 C 与点 A 关于 x 轴对称.

8. 若函数 $y = kx + 2(x - 1)$ 是关于 x 的一次函数, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \neq -2$

【详解】 解: $y = kx + 2(x - 1) = (k + 2)x - 2$,

$\therefore$ 函数 $y = kx + 2(x-1)$ 是关于 x 的一次函数,

$$\therefore k + 2 \neq 0,$$

$$\therefore k \neq -2.$$

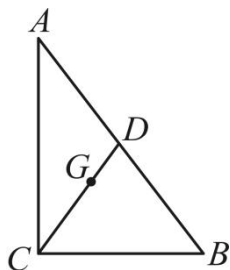
9. 在平面直角坐标系中, 点 $M(1,2)$ 与点 $N(5,8)$, 则 MN 长度为_____.

【答案】 $2\sqrt{13}$

【详解】 解: $\therefore$ 在平面直角坐标系中, 点 $M(1,2)$ 与点 $N(5,8)$,

$$\therefore MN = \sqrt{(1-5)^2 + (2-8)^2} = 2\sqrt{13}.$$

10. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 点 D 为斜边 AB 上的中点, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $CG =$ _____.



【答案】 $\frac{5}{3}$

【详解】 解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

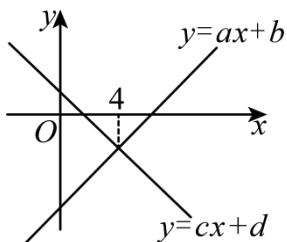
$\therefore$ 点 D 为斜边 AB 上的中点,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore CG = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{3}.$$

11. 如图所示, 直线 $y = ax + b$ 与直线 $y = cx + d$ 交点的横坐标是 4, 那么不等式 $ax - d \geq cx - b$ 的解集是_____.



【答案】 $x \geq 4$

【详解】解：∵ $ax - d \geq cx - b$ ，

∴ $ax + b \geq cx + d$ 。

观察图像可知当 $x = 4$ 时， $ax + b = cx + d$ ，

∴ 当 $x \geq 4$ 时， $ax + b \geq cx + d$ ，

所以不等式 $ax + b \geq cx + d$ 的解集是 $x \geq 4$ ，

即不等式 $ax - d \geq cx - b$ 的解集是 $x \geq 4$ 。

12. 如图 1，将四个全等的直角三角形拼成一个四边形 $ABEC$ ，然后将这四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形(如图 2 所示)，此大正方形的面积为 9；如果再将这四个全等的直角三角形拼成的“风车”图形(如图 3 所示)，此“风车”图形的外轮廓周长为 16。那么四边形 $ABEC$ 的面积为_____。

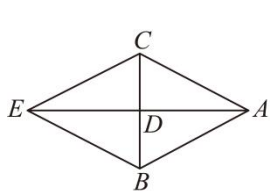


图1

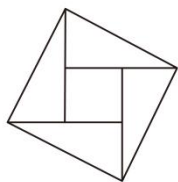


图2

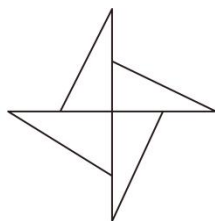


图3

【答案】8

【详解】设四个全等的直角三角形两个直角边为 a 、 b ，斜边为 c ，且 $a < b$ ， a 、 b 、 c 均为正数，

根据勾股定理有： $c^2 = a^2 + b^2$ ，

∴ 如图 2 所示的大正方形的面积为 9，

∴ $c^2 = 9$ ，即 $c = 3$ ，

∴ 如图 3 所示的“风车”图形的外轮廓周长为 16，

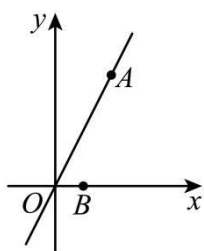
∴ $4c + (b - a) \times 4 = 16$ ，即 $b = a + 1$ ，

∴ $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a + 1)^2 = 9$ ，

则： $2a^2 + 2a = 8$ ，

∴ 四边形 $ABEC$ 的面积为 $S = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times a \times b \right) = 2a \times (a + 1) = 2a^2 + 2a = 8$ 。

13. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(2, 4)$ 在正比例函数 $y = 2x$ 的图像上，点 $B(1, 0)$ 和点 C 都在 x 轴上，当 $\triangle ABC$ 的面积是 6 时，点 C 的坐标是_____。



【答案】 $(4,0)$ 或 $(-2,0)$

【详解】 解：点 C 在 x 轴上，设点 $C(m,0)$ ，

$$\therefore BC = |m-1|,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是 6,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times y_A = 6,$$

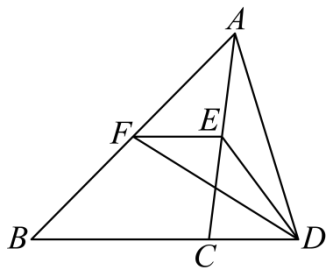
$$\therefore \frac{1}{2} \times |m-1| \times 4 = 6, \text{ 可得 } |m-1| = 3,$$

则有 $m-1=3$ 或 $m-1=-3$,

解得 $m=4$ 或 $m=-2$,

$\therefore$ 点 $C(4,0)$ 或 $(-2,0)$.

14. 如图，在 $\triangle ABD$ 中， C 是 BD 上一点，且 $BC=2CD$ ，如果 E, F 分别是 AC, AB 的中点， $\triangle ABD$ 的面积为 26，那么 $\triangle DEF$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{13}{3}$

【详解】 解：连接 CF ，

$\because BC=2CD$ ， $\triangle ABD$ 的面积为 26,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABD} = \frac{2}{3} \times 26 = \frac{52}{3},$$

$\because F$ 是 AB 的中点,

$$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{52}{3} = \frac{26}{3},$$

$\because E$ 是 AC 的中点,

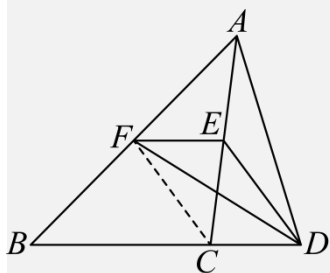
$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \times \frac{26}{3} = \frac{13}{3},$$

$\therefore E$ 是 AC 的中点, F 是 AB 的中点,

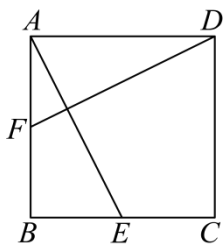
$\therefore EF$ 是 ABC 的中位线,

$\therefore EF \parallel BC$,

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle DEF} = \frac{13}{3}.$$



15. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, E 是 BC 的中点, $DF \perp AE$, 与 AB 交于点 F , 则 DF 的长为_____.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle DAF = \angle B = 90^\circ, \quad BC = AB = AD = 6,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$\because E$ 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = 3,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\because DF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BAE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DF = AE = 3\sqrt{5}.$$

16. **【新素材】** 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边长, c 为斜边长, $\angle C = 90^\circ$, 我们把关于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的

形如 $y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的一次函数称为“勾股一次函数”，如点 $P(1, \sqrt{2})$ 在“勾股一次函数”的图像上，且 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积为 4，则 c 的值为_____.

【答案】 4

【详解】解：∵点 $P(1, \sqrt{2})$ 在“勾股一次函数” $y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的图象上，

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

$$\therefore a + b = \sqrt{2}c,$$

又∵ a 、 b 、 c 分别为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边长， c 为斜边长， $\angle C = 90^\circ$ ， $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积是 4，

$$\therefore \frac{1}{2}ab = 4, \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 - 2ab = c^2,$$

$$\therefore (\sqrt{2}c)^2 - 4 \times 4 = c^2,$$

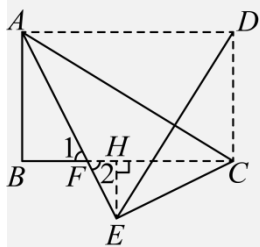
解得 $c = 4$ 或 $c = -4$ (负值舍去)，

故答案为：4.

17. 已知矩形 $ABCD$ ， $AB = 10$ ，将 $\triangle ACD$ 沿着直线 AC 翻折，点 D 落在点 E 处，如果点 E 到直线 BC 的距离是 6，那么 AD 的长是_____.

【答案】 5 或 20

【详解】解：①如图，当 $AB < AD$ 时， AE 交 BC 于点 F ，过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，则 $EH = 6$ ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ,$$

根据折叠的性质得， $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ$ ， $CE = CD = AB = 10$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CEF (AAS),$$

$$\therefore BF = EF, AF = CF,$$

设 $BF = EF = x$ ，

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}CE \cdot EF = \frac{1}{2}CF \cdot EH,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 10 \cdot x = \frac{1}{2}CF \cdot 6,$$

$$\therefore CF = \frac{5}{3}x,$$

$$\therefore AF = CF = \frac{5}{3}x,$$

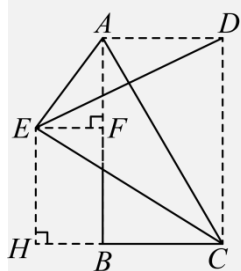
$$\text{在 } Rt\triangle ABF \text{ 中, } AB^2 + BF^2 = AF^2,$$

$$\text{即 } 10^2 + x^2 = \left(\frac{5}{3}x\right)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{30}{4},$$

$$\therefore AD = BC = \frac{5}{3}x + x = \frac{8}{3}x = 20;$$

②如图, $AB > AD$ 时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F , 则 $EH = 6$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = \angle ABH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EHBF$ 是矩形,

$$\therefore BH = EF, BF = EH = 6,$$

$$\therefore AF = AB - BF = 4,$$

根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10, BC = AD$,

$$\text{在 } Rt\triangle EHC \text{ 中, } CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\text{设 } BC = AD = AE = x, EF = BH = 8 - x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AEF \text{ 中, } AE^2 = EF^2 + AF^2,$$

$$\text{即 } x^2 = (8 - x)^2 + 4^2,$$

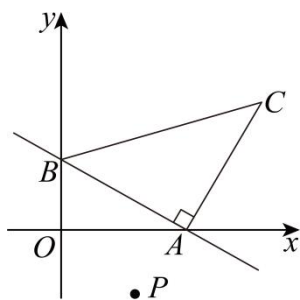
$$\text{解得: } x = 5,$$

$$\therefore AD = 5,$$

综上, $AD = 5$ 或 20 ;

故答案为: 5 或 20 .

18. 已知, 直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B , 以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle BAC = 90^\circ$ 且点 $P(1, a)$ 为坐标系中的一个动点, 现要使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABP$ 的面积相等, 则实数 a 的值为_____.



【答案】 -3 或 $\frac{17}{3}$

【详解】解: 当 $x = 0$ 时, 则 $y = -\frac{2}{3}x + 2 = 2$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 2)$,

当 $y = 0$ 时, 则 $0 = -\frac{2}{3}x + 2$,

解得: $x = 3$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore OA = 3$, $OB = 2$,

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{13}$,

又 $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{13}{2}$,

当点 P 在第四象限时, $a < 0$,

$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 3$, $S_{\triangle APO} = \frac{1}{2}OA \cdot |a| = -\frac{3}{2}a$, $S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2}OB \times 1 = 1$,

$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle APO} - S_{\triangle BOP} = S_{\triangle ABC} = \frac{13}{2}$,

即 $3 - \frac{3}{2}a - 1 = \frac{13}{2}$,

解得: $a = -3$;

当点 P 在第一象限时, $a > 0$,

$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 3, \quad S_{\triangle APO} = \frac{1}{2}OA \cdot |a| = \frac{3}{2}a, \quad S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2}OB \times 1 = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BOP} + S_{\triangle APO} - S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ABC} = \frac{13}{2},$$

$$\text{即 } 1 + \frac{3}{2}a - 3 = \frac{13}{2},$$

$$\text{解得: } a = \frac{17}{3};$$

综上所述, 实数 a 的值为 -3 或 $\frac{17}{3}$.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (4 分) 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-2,1)$ 、 $B(2,3)$ 、 $C(0,-1)$, 试判断这个三角形的形状.

【详解】解: $\because A(-2,1)$ 、 $B(2,3)$ 、 $C(0,-1)$,

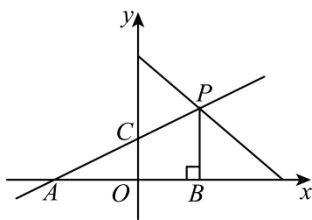
$$\therefore AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore AB = BC, \quad AB^2 + AC^2 \neq BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形. $\dots\dots (4 \text{ 分})$

20. (6 分) 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 的图象分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、 C , 与一次函数 $y = -x + 7$ 的图象交于点 P , 点 P 的横坐标为 3, $PB \perp x$ 轴, B 为垂足, $AB = 2PB$.



(1) 求点 P 的坐标;

(2) 求一次函数 $y = kx + b$ 的表达式.

【详解】(1) 解: $\because$ 一次函数 $y = -x + 7$ 的图象经过点 P , 且点 P 的横坐标为 3,

$$\therefore y = -3 + 7 = 4,$$

$\therefore$ 点 $P(3,4)$; $\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 解: $\because$ 点 $P(3,4)$, $PB \perp x$ 轴,

$$\therefore PB = 4, OB = 3.$$

$$\because AB = 2PB,$$

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore AO = AB - OB = 5,$$

$$\therefore \text{点 } A(-5, 0).$$

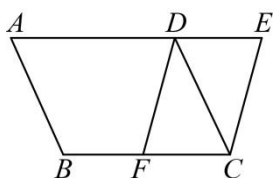
$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 经过点 $P(3, 4), A(-5, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 4 \\ -5k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{一次函数的表达式为 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \quad \cdots \cdots (6 \text{ 分})$$

21. (6分) 如图, 将 $\square ABCD$ 的 AD 边延长至点 E , 使 $DE = \frac{1}{2}AD$, 连接 CE , F 是 BC 边的中点, 联结 FD .



(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 若 $AD = 8$, $\angle A = 60^\circ$, $CE = 2\sqrt{7}$, 求 $\square ABCD$ 的面积.

【详解】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC \parallel AD, \text{ 且 } BC = AD,$$

$\therefore F$ 是 BC 的中点, 点 E 在 AD 的延长线上,

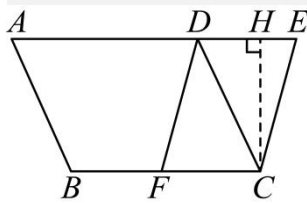
$$\therefore CF \parallel DE, \quad CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore CF = DE,$$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形. $\cdots \cdots (2 \text{ 分})$

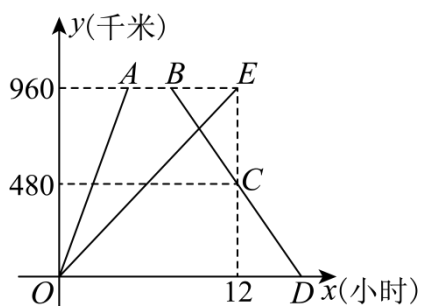
(2) 解: 作 $CH \perp DE$ 于点 H , 则 $\angle CHD = \angle CHE = 90^\circ$,



$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle CDH = \angle A = 60^\circ, \\
&\therefore \angle DCH = 90^\circ - \angle CDH = 30^\circ, \\
&\therefore CD = 2DH, \\
&\therefore CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{(2DH)^2 - DH^2} = \sqrt{3}DH, \\
&\therefore AD = 8, \\
&\therefore DE = \frac{1}{2}AD = 4, \\
&\therefore CH^2 + EH^2 = CE^2, \text{ 且 } EH = 4 - DH, \quad CE = 2\sqrt{7}, \\
&\therefore (\sqrt{3}DH)^2 + (4 - DH)^2 = (2\sqrt{7})^2, \\
&\text{解得 } DH = 3 \text{ 或 } DH = -1 \text{ (不符合题意, 舍去)}, \\
&\therefore CH = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}, \\
&\therefore S_{\square ABCD} = AD \cdot CH = 8 \times 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}, \\
&\therefore \square ABCD \text{ 的面积是 } 24\sqrt{3}. \dots\dots (6 \text{ 分})
\end{aligned}$$

22. (8分) 一列快车和一列慢车同时从甲地出发, 分别匀速驶向乙地, 快车到达乙地后停留了2小时, 然后以比原来速度慢40千米/小时的速度沿原路返回甲地, 设慢车离开甲地的时间为 x (小时), y_1 (千米)、 y_2 (千米) 分别表示慢车、快车离甲地的距离. 图中线段 OE 与折线 $O-A-B-D$ 分别表示 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数关系. 根据图像进行以下探究:



- (1) 甲、乙两地之间的距离是_____千米;
- (2) 慢车的速度是_____千米/小时;
- (3) 求快车从甲地到乙地的速度; (写出解答过程)
- (4) 慢车出发_____小时, 两车相距400千米?

【详解】(1) 从图象中 A 、 B 、 E 点的纵坐标可以看出, 两地相距960千米; $\dots\dots$ (1分)

(2) 由图可知: 慢车12小时行驶了960千米,

∴ 慢车的速度是： $960 \div 12 = 80$ 千米/小时；…… (2 分)

(3) 设快车从甲地到乙地的速度为 v 千米/小时，从图象可知，

快车到达乙地的时间为 $\frac{960}{v}$ 小时，

∴ 点 A 的横坐标为 $\frac{960}{v}$ ，

∵ 快车在乙地停留 2 小时，

∴ 点 B 的横坐标为 $\frac{960}{v} + 2$ ，

∵ 返回时速度比原来速度慢 40 千米/小时，

∴ 返回时速度为 $(v - 40)$ 千米/小时，

由图可知：点 C 的纵坐标为 480，此时快车在返途中，也行驶了 480 千米，

快车由乙地返回到 480 千米时的所用时间为： $12 - \left(\frac{960}{v} + 2 \right) = \left(10 - \frac{960}{v} \right)$ 小时，

根据返回速度列方程： $v - 40 = \frac{480}{10 - \frac{960}{v}}$ ，

整理得： $v^2 - 184v + 3840 = 0$ ，

$(v - 160)(v - 24) = 0$ ，

∴ $v = 160$ 或 $v = 24$ (舍去)，

当 $v = 160$ 时，返回速度为 $160 - 40 = 120$ 千米/小时，点 B 横坐标为 $\frac{960}{160} + 2 = 8$ ，返回时间为 $12 - 8 = 4$ 小时，

$120 \times 4 = 480$ 千米，符合题意；

∴ 快车从甲地到乙地的速度为 160 千米/小时；…… (5 分)

(4) 由 (3) 可得，快车从甲地到达乙地时， $x = 960 \div 60 = 6$ 小时，

∴ 当 $0 \leq x \leq 6$ 时，

快车路程 $y_2 = 160x$ ，慢车路程 $y_1 = 80x$ ，

∴ $160x - 80x = 400$ ，

解得： $x = 5$ ；

当快车停留时，即 $6 < x \leq 8$ 时，

快车路程 $y_2 = 960$ ，慢车路程 $y_1 = 80x$ ，

∴ $960 - 80x = 400$ ，

解得： $x = 7$ ；

当快车返回时，由题可得，返回总时间为 $\frac{960}{120} + 8 = 16$ 小时，

$\therefore$ 当 $8 < x \leq 16$ 时，设 BD 直线解析式为 $y_2 = kx + b$ ，

$\therefore$ 点 $(8, 960)$ ， $C(12, 480)$ 在函数图象上，

$$\therefore \begin{cases} 960 = 8k + b \\ 480 = 12k + b \end{cases}$$

解得： $k = -120$ ， $b = 1920$ ，

$$\therefore y_2 = -120x + 1920，$$

$$\therefore |-120x + 1920 - 80x| = 400，$$

$$\therefore |1920 - 200x| = 400，$$

$$\therefore 1920 - 200x = 400 \text{ 或 } 1920 - 200x = -400，$$

$$\therefore x = 7.6 \text{ 或 } x = 11.6，$$

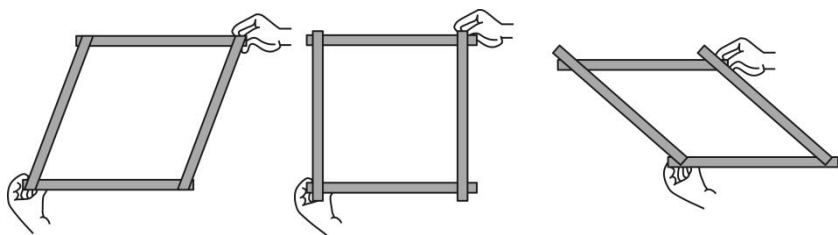
$$\therefore x = 7.6 < 8 \text{ (舍去)，}$$

$$\therefore x = 11.6；$$

$\therefore$ 满足条件的 x 的值为 5 或 7 或 11.6. $\cdots\cdots$ (8 分)

23. **新素材** (8 分) 我们知道：当三角形三条边的长度均确定时，三角形的形状、大小完全被确定，这个性质也叫做三角形的稳定性.

(1) 与三角形不同，如果用四根木条制作成一个四边形的木框，随意拉动木框的边，它的形状却会发生改变，这说明四边形具有_____.



(2) 生活中，很多家庭使用的伸缩晾衣架也利用了上述四边形的特性. 下图是一款伸缩晾衣架的示意图：该款伸缩晾衣架包含两侧的支架和三根晒被杆（图 1），每一侧的支架由 6 根铝合金杆（宽度忽略不计）组成，支架的每个交点处均可以转动（图 2）. 其中 $AE = BF = BD = CE = JF = 38 \text{ cm}$, $CI = 19 \text{ cm}$ ，点 G 、 H 、 I 分别是这些铝合金杆的中点. 支架展开后，点 A 、 B 、 C 、 J 在一直线上.

问题：如果把 $\angle B$ 的度数称作支架的展开角度，当支架展开角度为 60° 时，晾衣架最远处点 J 离开墙面距离

约为多少厘米?

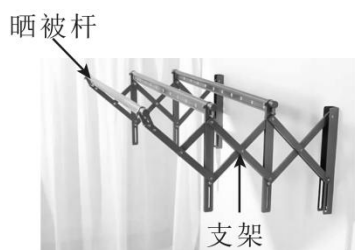


图1

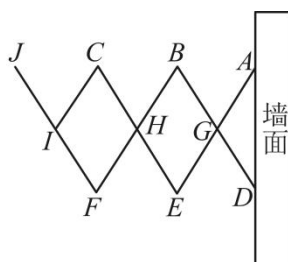


图2

(3)若要增加晒被杆的根数, 需要增加铝合金杆的数量, 在不改变原来设计方案的前提下, 制作一款含 4 根晒被杆的伸缩晾衣架, 共需要铝合金杆_____cm.

【详解】(1) 解: 随意拉动木框的边, 它的形状却会发生改变, 这说明四边形具有不稳定性; …… (2 分)

(2) 解: $\because AE = BF = BD = CE = JF = 38\text{ cm}, CI = 19\text{ cm}$, 点 G, H, I 分别是这些铝合金杆的中点,

$$\therefore AG = BG = BH = EH = EG = 19\text{ cm},$$

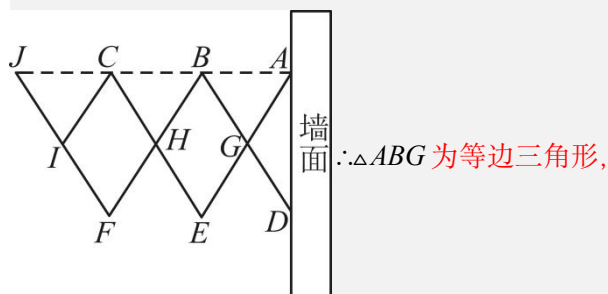
$\therefore$ 四边形 $BGEH$ 为菱形,

$$\therefore BH \parallel AG,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AGB = \angle B = 60^\circ,$$

连接 AB, JC, BC ,



$$\therefore AB = BG = 19\text{ cm},$$

同理可得 $BC = JC = 19\text{ cm}$,

$\therefore$ 点 A, B, C, J 在一直线上,

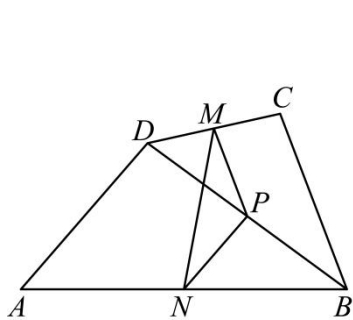
$\therefore$ 晾衣架最远处点 J 离开墙面距离约为 $19 \times 3 = 57\text{ cm}$; …… (6 分)

(3) 解: 若要制作一款含 4 根晒被杆的伸缩晾衣架,

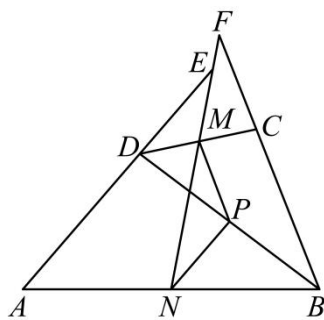
铝合金杆总的材料需要增加一个四边形的周长,

即共需要铝合金杆 $19 \times 4 = 76(\text{cm})$. …… (8 分)

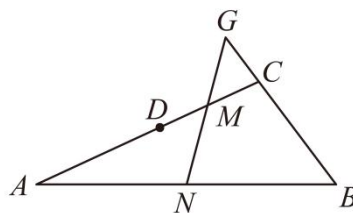
24. **新考向** (8 分) 【教材呈现】如图是沪教版八年级下册教材第 42 页的第 1 题, 请完成这道题的证明.



图①



图②



图③

(1)如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, P 是对角线 BD 的中点, M 是 DC 的中点, N 是 AB 的中点. 求证: $\angle PMN = \angle PNM$.

(2) 【教材延伸】

如图②, 延长图①中的线段 AD 交 NM 的延长线于点 E , 延长线段 BC 交 NM 的延长线于点 F , 求证:
 $\angle AEN = \angle F$.

(3) 【应用探究】

如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AC 上, $AD = BC = 3$, M 是 DC 的中点, N 是 AB 的中点, 连接 NM 并延长, 与 BC 的延长线交于点 G , 若 $\angle GMC = 45^\circ$, 求 MN 的长.

【详解】(1) 证明: $\because P$ 是 BD 的中点, M 是 DC 的中点,

$$\therefore PM = \frac{1}{2}BC,$$

$\because P$ 是 BD 的中点, N 是 AB 的中点,

$$\therefore PN = \frac{1}{2}AD,$$

$\because AD = BC,$

$$\therefore PM = PN,$$

$$\therefore \angle PMN = \angle PNM; \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

(2) 证明: 如图, 由 (1) 得 $\angle PMN = \angle PNM$,

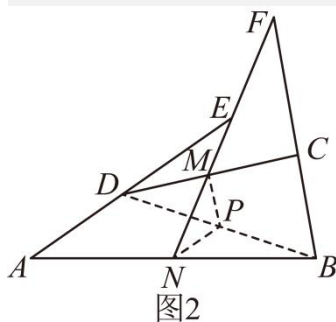


图2

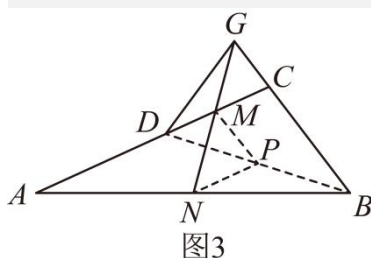
$\because N$ 是 AB 的中点, M 是 DC 的中点, P 为 BD 的中点,

$$\therefore PN \parallel AD, PM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEN = \angle PNM, \quad \angle PMN = \angle F,$$

$$\therefore \angle AEN = \angle F; \dots\dots (5 \text{ 分})$$

(3) 证明: 如图, 连接 BD , 取 BD 中点 P , 连接 PM , PN , 由 (1) 知 $\angle PMN = \angle PNM$,



由 (2) 可知, $PM \parallel BG$, $PN \parallel AM$,

$$\therefore \angle PMN = \angle CGM, \quad \angle PNM = \angle AMN,$$

$$\therefore \angle CGM = \angle AMN,$$

$$\therefore \angle GMC = 45^\circ, \quad \angle AMN = \angle GMC,$$

$$\therefore \angle PMN = \angle PNM = \angle CGM = \angle AMN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 180^\circ - 45^\circ \times 2 = 90^\circ,$$

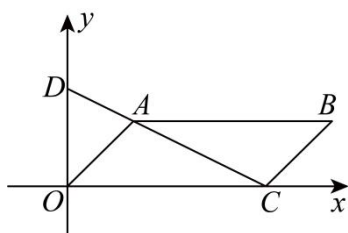
$\therefore \triangle PMN$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AD = BC = 3,$$

$$\text{由 (1) 知 } PM = PN = \frac{1}{2} AD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \dots\dots (8 \text{ 分})$$

25. (9 分) 数学活动课上, 老师组织数学小组的同学们以“平面直角坐标系”为背景开展探究活动. 如图, 已知四边形 $OABC$ 是平行四边形, 点 $A(2,2)$ 、点 $C(6,0)$, 连接 CA , 并延长交 y 轴于点 D .



(1) 观察发现: 直线 AC 的函数表达式为_____.

(2) 探究迁移: 若点 P 从点 C 出发, 以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动, 同时点 Q 从点 O 出发, 以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动, P 、 Q 均在线段 OC 上, 过点 P 作 x 轴垂线交直线 CD 于点 E , 过点 Q 作 x 轴垂线交直线 OA 于点 F , 连接 EF , 猜想四边形 $EPQF$ 的形状 (点 P , Q 重合除外), 并证明你的结论;

(3) 拓展应用: 在 (2) 的条件下, 当点 P 运动多少秒时, 四边形 $EPQF$ 是正方形? 不需说明理由, 请直接写

出你的结果.

【详解】(1) 解: 设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$,

将点 $A(2, 2)$ 、点 $C(6, 0)$, 代入得,

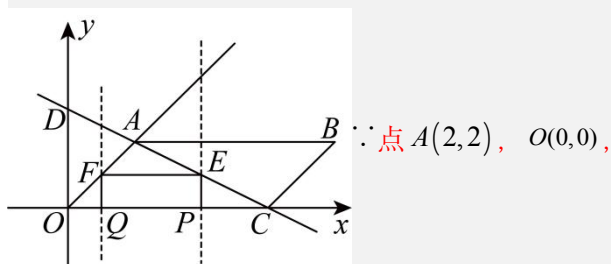
$$\begin{cases} 2 = 2k + b \\ 0 = 6k + b \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$. $\cdots\cdots$ (2 分)

(2) 解: 四边形 $EPQF$ 是矩形, 理由如下:

当点 P 在 Q 右侧时, 如图所示,



$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$,

$\therefore$ 点 P 从点 C 出发, 以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动, 同时点 Q 从点 O 出发, 以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动, 设运动时间为 t ,

$\therefore CP = 2t$, $OQ = t$, $OP = OC - CP = 6 - 2t$,

$\therefore Q(t, 0)$, $P(6 - 2t, 0)$,

$\therefore$ 点 E 在直线 $AC: y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上, 点 F 在直线 $OA: y = x$ 上, 且 $FQ \perp x$ 轴, $EP \perp x$ 轴,

$\therefore FQ = y_F = t$, $EP = y_E = -\frac{1}{2}(6 - 2t) + 3 = t$,

$\therefore FQ = EP$,

又 $\because FQ \perp x$ 轴, $EP \perp x$ 轴,

$\therefore FQ \parallel EP$, $\angle FQP = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是平行四边形,

又 $\angle FQP = 90^\circ$,

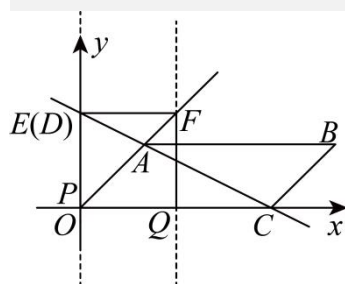
$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是矩形.

当点 P 在 Q 左侧时, 如图所示,

$$\therefore 3t - 6 = t$$

解得 $t = 3$,

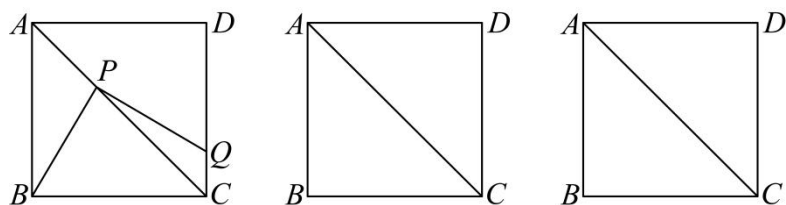
此时 $OP = 0$, 即 $P(0,0)$, 此时 P 与原点重合, 如图所示,



$\therefore$ 当经过时间 $t = 3$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形.

综上所述, 当点 P 运动 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = 3$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形. $\cdots\cdots$ (9 分)

26. (9 分) 如图, 已知: 正方形 $ABCD$ 边长为 1, 点 P 是对角线 AC 上一点, $PQ \perp BP$, PQ 交射线 DC 于点 Q .



(1) 当点 Q 在边 CD 上时, 线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系? 试证明你观察得到的结论;

(2) 当点 Q 在边 DC 的延长线上, $\triangle PCQ$ 是等腰三角形时, 求 PC 的长;

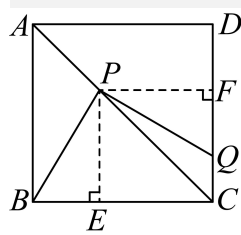
(3) 当以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ 时, 请直接写出 PC 的长是_____.

【详解】(1) 解: $PB = PQ$,

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$,

如图, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ,



则 $PE = PF$, $\angle PEC = \angle BCO = \angle PFC = \angle PEB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为矩形,

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$,

$\because PQ \perp BP$,

$\therefore \angle BPQ = 90^\circ = \angle EPF$,

$$\therefore \angle BPQ - \angle EPQ = \angle EPF - \angle EPQ,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle QPF,$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle QPF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PB = PQ; \dots\dots (3 \text{ 分})$$

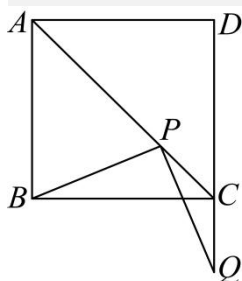
(2) 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 1,

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ, \quad AB = BC = 1,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$

$\because$ 点 Q 在边 DC 的延长线上,

$$\therefore \angle PCQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ 为钝角},$$



$\therefore \triangle PCQ$ 是等腰三角形,

$$\therefore CP = CQ,$$

$$\therefore \angle Q = \angle CPQ,$$

$$\therefore \angle Q + \angle CPQ = \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle Q = \angle CPQ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore PQ \perp BP,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle BPQ - \angle CPQ = 67.5^\circ,$$

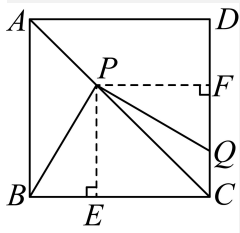
$$\therefore \angle ABP = 180^\circ - \angle APB - \angle BAP = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle APB,$$

$$\therefore AP = AB = 1,$$

$$\therefore PC = AC - AP = \sqrt{2} - 1; \dots\dots (7 \text{ 分})$$

(3) 解: 如图, 当点 Q 在线段 CD 上时, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ,



由 (1) 可得 $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$ ，四边形 $PECF$ 为矩形， $\triangle BPE \cong \triangle QPF$ ，

$\therefore \triangle PEC$ 为等腰直角三角形， $S_{\triangle BPE} = S_{\triangle QPF}$ ，

$\therefore PE = CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为正方形，

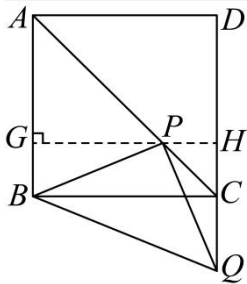
$\therefore S_{\text{四边形}BPQC} = S_{\triangle BPE} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\triangle QPF} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\text{正方形}PECF}$ ，

$\therefore$ 以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，

$\therefore S_{\text{正方形}PECF} = \frac{1}{3}$ ，即 $PE^2 = CE^2 = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore PC = \sqrt{PE^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ；

当点 Q 在 DC 的延长线上时，作 $PG \perp AB$ 于 G ，延长 GP 交 CD 于 H ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle HGB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GBCH$ 为矩形，

$\therefore \angle GHC = 90^\circ$ ， $BG = CH$ ， $BC = GH = 1$ ，

$\therefore \triangle CHP$ 为等腰直角三角形，

$\therefore HC = PH = BG$ ，

$\therefore PQ \perp BP$ ，

$\therefore \angle GBP + \angle BPG = \angle BPG + \angle GQH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GBP = \angle QPH$ ，

$$\therefore \triangle BPG \cong \triangle PQH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BP = PQ, \quad GP = QH, \quad BG = PH$$

设 $BG = PH = CH = a$ ，则 $QH = GP = 1 - a$ ，

$\therefore$ 以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，

$$\therefore S_{\text{四边形}BPCQ} = S_{\text{梯形}BGHQ} - S_{\triangle BPG} - S_{\triangle PCH} = \frac{1}{2}(a+1-a) \times 1 - \frac{1}{2}a \times (1-a) - \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PH = CH = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

综上所述， PC 的长为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 。…… (9 分)