

八年级下数学周末卷一

一、选择题

1. 四边形没有稳定性, 当四边形形状改变时, 发生变化的是 ()

- A. 四边形内角的大小 B. 四边形的周长 C. 四边形的边长 D. 四边形的内角和

【答案】A

【解析】

【分析】四边形具有不稳定性, 形状改变时, 变的是内角的度数, 边长和内角和不发生变化.

【详解】解: 当四边形形状改变时, 发生变化的是四边形的内角的度数,
故选: A.

【点睛】此题主要考查了多边形, 关键四掌握四边形的不稳定性.

2. 若一个凸多边形的某个内角恰好是其余内角的和, 则 ()

- A. 它一定是三角形 B. 它可能是四边形
C. 它一定是四边形 D. 它不可能是三角形和四边形

【答案】A

【解析】

【分析】利用多边形内角和公式, 结合凸多边形每个内角小于 180° 的性质, 求解多边形边数, 即可判断选项.

【详解】解: 设该凸多边形为 n 边形, 题中满足条件的内角为 α ,

$\therefore n$ 边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$, α 等于其余内角的和

$$\therefore \alpha = (n-2) \times 180^\circ - \alpha,$$

$$\text{整理得 } 2\alpha = (n-2) \times 180^\circ,$$

$$\text{即 } \alpha = (n-2) \times 90^\circ,$$

$\therefore$ 凸多边形的内角 α 满足 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$,

$$\therefore 0^\circ < (n-2) \times 90^\circ < 180^\circ,$$

不等式两边同除以 90° 得 $0 < n-2 < 2$, 即 $2 < n < 4$,

$\therefore n$ 是不小于 3 的正整数,

$$\therefore n = 3$$

$\therefore$ 它一定是三角形.

二、填空题

3. 过 n 边形的一个顶点可以画出 7 条对角线, 将它分成 m 个小三角形, 则 $m+n$ 的值是_____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题考查多边形的对角线问题, 根据过 n 边形的一个顶点可以画出 $(n-3)$ 条对角线, 分成 $(n-2)$ 个三角形, 进行求解即可.

【详解】 解: 根据题意得: $n-3=7, n-2=m$,

$$\therefore n=10, m=8,$$

$$\therefore m+n=10+8=18.$$

故答案为: 18

4. 每一个外角都等于 36° 的多边形是_____边形, 它的内角和等于_____.

【答案】 ①.

十 ②.

1440° ## 1440 度

【解析】

【详解】 解: 由多边形外角和定理可知, 任意多边形的外角和为 360° ,

$\therefore$ 多边形的每一个外角都等于 36° ,

$$\therefore \text{这个多边形的边数} = 360 \div 36 = 10,$$

$\therefore$ 多边形是十边形,

$\therefore$ 根据 n 边形的内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$, 将 $n=10$ 代入得:

$$(10-2) \times 180^\circ$$

$$= 8 \times 180^\circ$$

$$= 1440^\circ.$$

5. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 则这个多边形的边数为_____

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题利用任意多边形外角和为定值 360° , 结合题目给出的内角和与外角和的数量关系, 再根据多边形内角和公式列方程求解即可得到边数.

【详解】 设这个多边形的边数为 n ,

根据题意列方程得 $(n-2) \times 180^\circ = 2 \times 360^\circ$,

解得 $n = 6$.

6. 如果一个多边形的每一个内角都相等, 且每一个内角都大于 120° , 那么这个多边形的边数最少为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 利用多边形外角和定理, 结合内角与相邻外角的互补关系列不等式求解, 即可得到边数的最小值.

【详解】 解: 设该多边形的边数为 n , n 为不小于 3 的正整数,

因为多边形的每一个内角都相等, 且每一个内角都大于 120° , 多边形的内角与相邻外角互为邻补角, 因此每个外角都小于 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

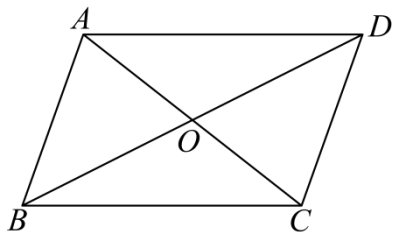
根据多边形外角和定理, 任意多边形的外角和为 360° , 可得不等式,

$$\frac{360}{n} < 60,$$

解得 $n > 6$,

因为 n 为正整数, 所以 n 的最小值为 7.

7. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 5$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O . 若 $AC + BD = 12$, $\triangle BOC$ 的周长为_____.



【答案】 11

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质, 根据平行四边形的性质可得出 $BC = AD = 5$, $AO = OC = \frac{1}{2}AC$, $BO = OD = \frac{1}{2}BD$, 根据已知条件可得出 $BO + OC = \frac{1}{2}(AC + BD) = 6$, 最后根据三角形的周长公式计算即可.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 5, \quad AO = OC = \frac{1}{2}AC, \quad BO = OD = \frac{1}{2}BD,$$

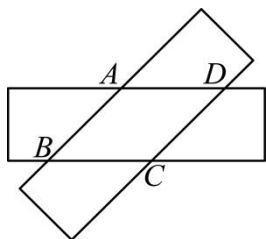
$$\therefore AC + BD = 12,$$

$$\therefore BO + OC = \frac{1}{2}(AC + BD) = 6,$$

$$\therefore \triangle BOC \text{ 的周长为: } BC + BO + OC = 5 + 6 = 11,$$

故答案为: 11.

8. 如图, 两条宽为 1cm 的长纸条倾斜地重叠成一个四边形 $ABCD$. 如果 $\angle ABC = 45^\circ$, 那么这个四边形的周长为 _____ cm.

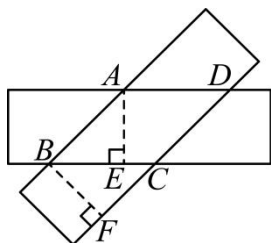


【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp CD$ 于点 F , 根据勾股定理求出 AB 的长, 证明四边形 $ABCD$ 为菱形, 即可求解.

【详解】 解: 如图所示, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp CD$ 于点 F ,



$$\therefore \angle AEB = 90^\circ, \angle BFC = \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 为等腰直角三角形, } \angle FBC = \angle ABF - \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore BE = AE = 1\text{cm},$$

$$\text{由勾股定理得 } AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{2}\text{cm},$$

由题意可知, $AB \parallel CD, AB = CD$, 且 $AE = BF$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle BCF = 45^\circ \\ \angle AEB = \angle BFC = 90^\circ \\ AE = BF \end{cases}$$

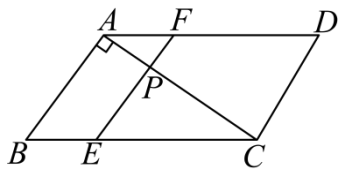
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AB = BC,$$

$\therefore \square ABCD$ 为菱形,

∴ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $4AB = 4\sqrt{2}\text{cm}$.

9. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB \perp AC$, E, F 分别在边 BC 和 AD 上, $EF \parallel AB$, 交 AC 于点 P . 若 $CD = 6$, $AC = 8$, $CE = 7$, 则 AF 的长为_____.



【答案】3

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的判定和性质, 勾股定理. 由平行四边形的性质推出 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 得到 $CD \perp AC$, 由勾股定理求出 $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = 10$, 判定四边形 $EFDC$ 是平行四边形, 推出 $FD = CE = 7$, 即可求出 $AF = AD - DF = 3$.

【详解】解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$$\because AB \perp AC,$$

$$\therefore CD \perp AC,$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\because AC = 8, CD = 6,$$

$$\therefore AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = 10,$$

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore EF \parallel CD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

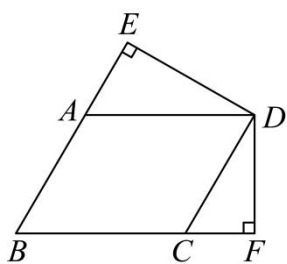
∴ 四边形 $EFDC$ 是平行四边形,

$$\therefore FD = CE = 7,$$

$$\therefore AF = AD - DF = 10 - 7 = 3.$$

故答案为: 3.

10. 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $DE \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 E , $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F , $\angle EDF = 120^\circ$, 则 $\angle ADC =$ _____.



【答案】 60° ##60 度

【解析】

【分析】由四边形内角和定理求出 $\angle B$ 的度数，再由平行四边形的对角相等即可得出结果；本题考查了平行四边形的性质、四边形内角和定理；熟练掌握平行四边形的性质，由四边形内角和定理求出 $\angle B$ 是解决问题的关键.

【详解】解： $\because DE \perp AB, DF \perp BC$,

$$\therefore \angle AED = 90^\circ, \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = 120^\circ,$$

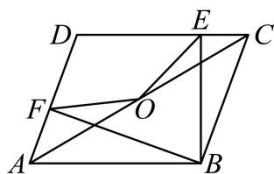
$$\therefore \angle B = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ADC = \angle B = 60^\circ$$

故答案为: 60° .

11. 如图, O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点, $BE \perp CD$, $BF \perp AD$, 垂足分别为 E 、 F , 如果 $\angle D = 110^\circ$, 那么 $\angle EOF$ 的度数是_____°.



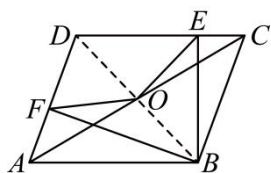
【答案】

140

【解析】

【分析】连接 BD , 根据平行四边形的性质可知 BD 经过点 O , 且 $BO = DO$, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $OF = OD = OE$, 根据等边对等角可知 $\angle OFD = \angle ODF$, $\angle OED = \angle ODE$, 从而可知 $\angle OFD + \angle OED = 110^\circ$, 在四边形 $OEDF$ 中, 根据四边形的内角和定理即可求出 $\angle EOF$.

【详解】解: 如下图所示, 连接 BD ,



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 O 是 AC 的中点，

∴ BD 经过点 O ，且 $BO = DO$ ，

∵ $BE \perp CD$ ， $BF \perp AD$ ，

∴ $\angle BFD = \angle BED = 90^\circ$ ，

∴ $OF = OD = OE$ ， $\angle BFD + \angle BED = 180^\circ$ ，

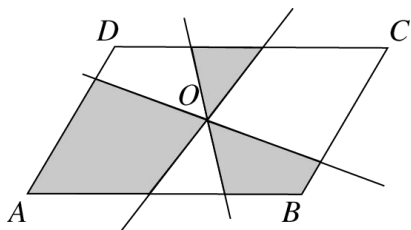
∴ $\angle OFD = \angle ODF$ ， $\angle OED = \angle ODE$ ，

∴ $\angle OFD + \angle OED = \angle ODF + \angle ODE = \angle ADC = 110^\circ$ ，

∴ 在四边形 $OEDF$ 中， $\angle EDF = 110^\circ$ ，

∴ $\angle EOF = 360^\circ - \angle EDF - (\angle OED + \angle OFD) = 360^\circ - 110^\circ - 110^\circ = 140^\circ$ 。

12. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， O 是两条对角线的交点，过 O 点的三条直线将四边形 $ABCD$ 分成阴影和空白部分，若阴影部分的面积 8cm^2 ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$ 。



【答案】 16

【解析】

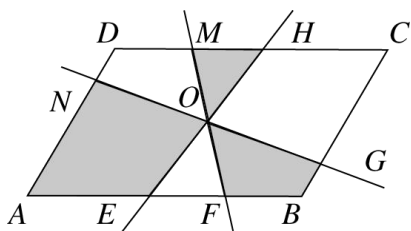
【分析】 根据中心对称的性质判断出阴影部分的面积等于平行四边形面积的一半，即可得出结果。

【详解】 解：∵ O 是平行四边形两条对角线的交点，平行四边形 $ABCD$ 是中心对称图形，

∴ $\triangle OEF \cong \triangle OHM$ ，四边形 $OFBG \cong$ 四边形 $OMDN$ ，四边形 $OGCH \cong$ 四边形 $ONAE$ ，

∴ $S_{\text{平行四边形 } ABCD} = 2 \times \text{阴影部分的面积} = 2 \times 8 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$ 。

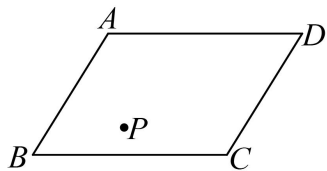
故答案为：16。



【点睛】 本题考查了中心对称，平行四边形的性质，熟记性质并判断出阴影部分的面积等于平行四边形的

面积的一半是解题的关键.

13. 兄弟俩共同承包一块平行四边形的土地, 现要进行平均划分, 由于在这块地里有一口水井 P , 如图所示, 为了兄弟俩都能方便使用这口井, 兄弟俩在划分时犯难了, 聪明的你能帮他们解决这个问题吗? 请作图说明.

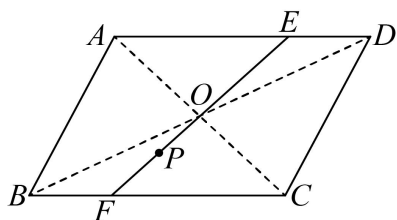


【答案】见解析

【解析】

【分析】关键是掌握平行四边形是中心对称图形. 先找出平行四边形的对称中心, 过中心和 P 作直线即可.

【详解】解: 如图所示



连接 AC 、 BD 相交于点 O , 则点 O 是平行四边形的对称中心.

过 O 、 P 作直线分别交 AD 、 BC 于 E 、 F , 则一人分四边形 $ABFE$, 另一人分四边形 $CDEF$.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于 F 、 E , 则线段 EF 的长表示为_____. (用 a 、 b 表示)

【答案】 $|2a - b|$

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 角平分线的定义和等腰三角形的判定, 利用平行四边形对边平行且相等的性质, 结合角平分线得到等角, 利用等角对等边得到 $AF = AB$, 再根据线段的和差关系计算 EF 的长度.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC = b$, $AB = CD = a$.

$\therefore \angle AFB = \angle CBF$, $\angle DEC = \angle BCE$.

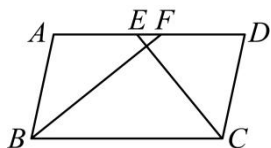
$\because BF$ 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle BCD$,

$\therefore \angle ABF = \angle CBF$, $\angle DCE = \angle BCE$.

$\therefore \angle AFB = \angle ABF$, $\angle DEC = \angle DCE$.

$$\therefore AF = AB = a, \quad DE = CD = a.$$

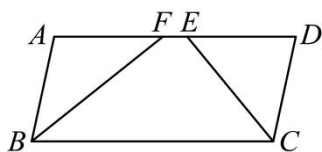
当 EF 为 AF 与 DE 的重叠部分时,



$$\therefore AF + DE = AD + EF.$$

$$\therefore EF = 2a - b.$$

当 EF 为 AF 与 DE 的不重叠部分时,



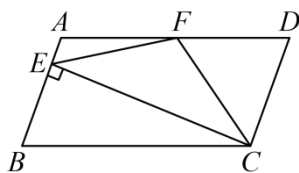
$$\therefore EF = AD - AF - DE.$$

$$\therefore EF = b - 2a.$$

$$\therefore EF = |2a - b|.$$

故答案为: $|2a - b|$.

15. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 2AB$, F 是 AD 的中点, 作 $CE \perp AB$, 垂足 E 在线段 AB 上, 连接 EF 、 CF , 则下列结论中, ① $2\angle DCF = \angle BCD$; ② $EF = CF$; ③ $S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle CEF}$; ④ $\angle DFE = 3\angle AEF$. 其中正确的是_____.



【答案】 ①②④

【解析】

【分析】 此题主要考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质等知识, 分别利用平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质得出 $\triangle AEF \cong \triangle DMF$ (ASA), 得出对应线段之间关系进而得出答案, 得出 $\triangle AEF \cong \triangle DMF$ 是解题关键.

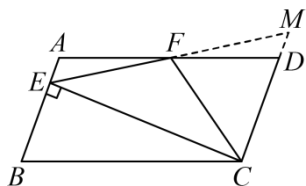
【详解】 解: ① $\because F$ 是 AD 的中点,

$$\therefore AF = FD,$$

$$\because \text{在 } \square ABCD \text{ 中, } AD = 2AB,$$

$\therefore AF = FD = CD$,
 $\therefore \angle DFC = \angle DCF$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DFC = \angle FCB$,
 $\therefore \angle DCF = \angle BCF$,
 $\therefore 2\angle DCF = \angle BCD$, 故①正确, 符合题意;

②延长 EF , 交 CD 延长线于 M , 如图:



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle A = \angle MDF$,
 $\therefore F$ 为 AD 中点,
 $\therefore AF = FD$,

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFM$ 中.

$$\begin{cases} \angle A = \angle FDM \\ AF = DF \\ \angle AFE = \angle DFM \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DMF (ASA)$,

$\therefore FE = MF, \angle AEF = \angle M$,

$\therefore CE \perp AB$,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEC = \angle ECD = 90^\circ$,

$\therefore FM = EF$,

$\therefore FC = FM = EF$, 故②正确, 符合题意;

③ $\therefore EF = FM$,

$\therefore S_{\triangle EFC} = S_{\triangle CFM}$,

$\therefore MC > BE$,

$\therefore S_{\triangle BEC} \leq 2S_{\triangle EFC}$ ，故 ③ 错误，不符合题意；

④ 设 $\angle FEC = x$ ，则 $\angle FCE = x$ ，

$\therefore \angle DCF = \angle DFC = 90^\circ - x$ ，

$\therefore \angle EFC = 180^\circ - 2x$ ，

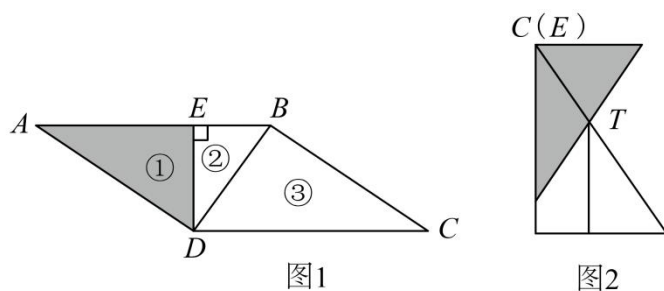
$\therefore \angle EFD = 90^\circ - x + 180^\circ - 2x = 270^\circ - 3x$

$\therefore \angle AEF = 90^\circ - x$ ，

$\therefore \angle DFE = 3\angle AEF$ ，故 ④ 正确，符合题意，

故答案为：①②④。

16. 如图 1，在平行四边形纸片 $ABCD$ 中， $BC = 2$ ，对角线 $DB \perp BC$ ，且 $DB < BC$ ，作 $DE \perp AB$ 于 E ，将纸片沿 DB ， DE 剪开后得到纸片①②③。如图 2，先让②③两张纸片的较大锐角完全重叠，再让①③的长直角边重叠且保证 C ， E 两点重合，最后摆成了“K”型图，若图 2 中纸片①的斜边恰好经过纸片②的顶点 T ，则 CT 的长度为_____， AB 的长度为_____。



【答案】 ①. 1 ②. $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，平行四边形的性质，勾股定理，理解图形是解题的关键。

易证 CT 为 $Rt\triangle ADE$ 斜边 AD 上的中线，则 $CT = \frac{1}{2}AD = 1$ 。设 $BD = x$ ，则 $CD = 1 + x$ 。由 $BC = 2$ ， $DB \perp BC$ ，可得 $x^2 + 2^2 = (1 + x)^2$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ 。所以 $AB = CD = 1 + x = \frac{5}{2}$ 。

【详解】 解：根据图 1 和图 2，可得

CT 为 ADE 边 AD 上的中线， $CD = CT + BD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ ， $DB \perp BC$ ， $DE \perp AB$

$\therefore AD = BC = 2$ ， $AB = CD$ ， $\angle AED = \angle DBC = \angle DEB = 90^\circ$ ，

$$\therefore CT = \frac{1}{2}AD = 1, \text{ 即 } CD = 1 + BD,$$

$$\therefore BD^2 + BC^2 = CD^2,$$

$$\therefore BD^2 + 2^2 = (1 + BD)^2,$$

$$\text{解得 } BD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore CD = 1 + BD = \frac{5}{2}, \text{ 即 } AB = \frac{5}{2}.$$

故答案为: ①1, ② $\frac{5}{2}$.

三、解答题

17. (1) 若一个正多边形的每一个内角都比与其相邻外角的3倍多 36° , 求这个多边形的边数.

(2) 一个多边形的内角和是 1260° , 求这个多边形共有多少条对角线.

【答案】(1) 10

(2) 27

【解析】

【分析】(1) 根据内角与相邻外角互补的关系, 结合题目条件求出单个外角的度数, 再利用多边形外角和为 360° , 即可求出边数;

(2) 先根据多边形内角和公式求出多边形的边数, 再代入多边形对角线条数公式计算即可得到结果, 掌握相关计算公式是解题的关键.

【详解】解: (1) 设这个正多边形的一个外角为 α , 则与其相邻的内角为 $(3\alpha + 36^\circ)$, 由题意可得:

$$(3\alpha + 36^\circ) + \alpha = 180^\circ,$$

解得 $\alpha = 36^\circ$,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$\therefore$ 这个多边形的边数为 $360^\circ \div 36^\circ = 10$;

(2) 设这个多边形的边数为 n , 根据多边形内角和公式可得:

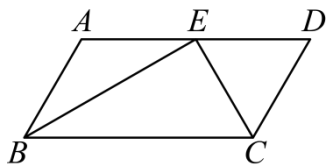
$$(n - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ,$$

解得 $n = 9$,

$$\therefore \text{这个多边形的对角线条数为 } \frac{n(n-3)}{2} = \frac{9 \times (9-3)}{2} = 27,$$

即这个多边形共有 27 条对角线.

18. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线 BE 与 CE 相交于点 E , 且点 E 恰好落在 AD 上;



(1) 求证: $BE^2 + CE^2 = BC^2$

(2) 若 $AB = 2$, 求 $\square ABCD$ 的周长.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) 12

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质和勾股定理的逆定理解答即可;

(2) 根据平行四边形的性质和等腰三角形的判定和性质解答.

【详解】 证明: (1) $\because BE$ 、 CE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle ECB = \frac{1}{2} \angle BCD$$

$\because \square ABCD$

$\therefore AB \parallel CD$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180$$

$$\therefore \angle EBC + \angle ECB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore BE^2 + CE^2 = BC^2$$

(2) $\because \square ABCD$

$$\therefore AD \parallel BC, CD = AB = 2$$

$$\therefore \angle EBC = \angle AEB$$

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$

$$\therefore \angle EBC = \angle ABE$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABE$$

$$\therefore AB = AE$$

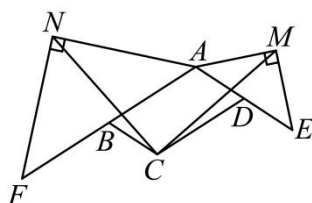
同理可证 $DE = DC$

$$\therefore DE = AE = \frac{1}{2} AD = 2$$

$$\therefore C_{ABCD} = 2 \times (4 + 2) = 12$$

【点睛】此题考查平行四边形的性质，关键是根据平行四边形的性质和勾股定理的逆定理解答.

19. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，延长 AD 至点 E ，使得 $DE = AD$ ；延长 AB 至点 F ，使得 $BF = AB$ 。 $AM \perp ME$, $AN \perp FN$, $\angle E = \angle F$ 。证明： $CN = CM$ 。

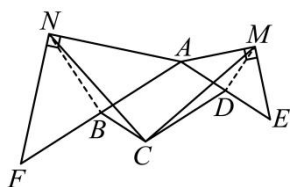


【答案】证明见解析

【解析】

【分析】解题的关键在于构造辅助线，连接 BN, DM ，通过直角三角形斜边中线定理，将 BN 和 DM 分别转化为 AB 和 AD ，进而利用平行四边形对边相等的性质，得到 $BN = CD$ 和 $DM = BC$ ；接着，利用等腰三角形“等边对等角”及三角形外角性质，结合已知角相等，推导出 $\angle CBN = \angle DM$ ，最终利用 SAS 判定 $\triangle CBN \cong \triangle MDC$ ，从而证得 $CM = CN$ 。

【详解】证明：连接 BN, DM ，



$$\therefore AN \perp FN, AM \perp ME,$$

$$\therefore \triangle ANF \text{ 和 } \triangle AME \text{ 均为直角三角形,}$$

$$\therefore BF = AB, \text{ 即 } B \text{ 为 } AF \text{ 的中点,}$$

$$\therefore BN \text{ 是 } Rt\triangle ANF \text{ 斜边 } AF \text{ 上的中线,}$$

$$\therefore BN = \frac{1}{2} AF = AB,$$

$$\text{同理: } DM = \frac{1}{2} AE = AD,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形,}$$

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore BN = AB, DM = AD,$$

$$\therefore BN = CD, DM = BC,$$

$$\therefore BN = BF,$$

$$\therefore \angle BNF = \angle F,$$

$$\therefore \angle NBA = \angle BNF + \angle F = 2\angle F \text{ (三角形外角性质)},$$

$$\text{同理: } \angle MDA = \angle DME + \angle E = 2\angle E,$$

$$\therefore \angle E = \angle F,$$

$$\therefore \angle NBA = \angle MDA,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle NBA + \angle ABC = \angle MDA + \angle ADC,$$

$$\text{即: } \angle CBN = \angle CDM,$$

在 $\triangle CBN$ 和 $\triangle MDC$ 中:

$$\begin{cases} BN = CD \\ \angle CBN = \angle CDM, \\ BC = DM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBN \cong \triangle MDC (SAS),$$

$$\therefore CN = CM.$$

20. 在面积为15的平行四边形 $ABCD$ 中, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 作 $AF \perp CD$ 于点 F . 若 $AB = 5$, $BC = 6$, 求 $CE + CF$ 的值.

$$\text{【答案】 } 11 + \frac{11\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

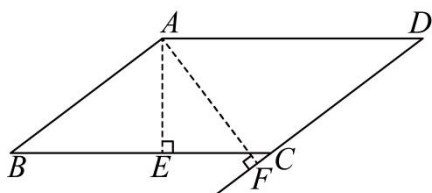
【解析】

【分析】根据平行四边形面积很容易求出 AE 和 AF , 然后分两种情况进行讨论, 求出 BE 、 DF 的值, 求出 CE 和 CF 的值, 相加即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD = 5, \quad BC = AD = 6,$$

①如图:



由平行四边形面积公式得： $BC \times AE = CD \times AF = 15$ ，

得 $AE = \frac{5}{2}$ ， $AF = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理得： $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ，

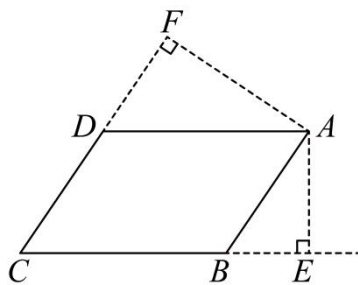
把 $AB = 5$ ， $AE = \frac{5}{2}$ 代入，得 $BE = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ 。

同理在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $DF = 3\sqrt{3} > 5$ ，即 F 在 DC 的延长线上（如上图），

$\therefore CE = 6 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ， $CF = 3\sqrt{3} - 5$ ，

即 $CE + CF = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

②如图：



$\therefore$ 由①同理有 $AB = 5$ ， $AE = \frac{5}{2}$ ，

在 $\triangle ABE$ 中，由勾股定理得： $BE = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

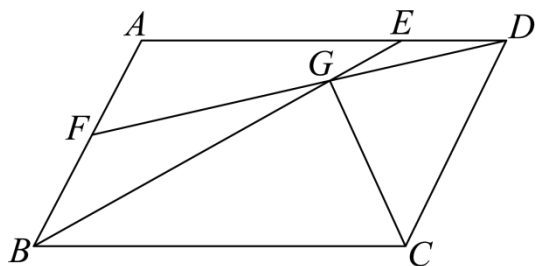
同理 $DF = 3\sqrt{3}$ ，

由①知： $CE = 6 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ， $CF = 5 + 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore CE + CF = 11 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$ 。

故 $CE + CF$ 的值是 $11 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$ 或 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

21. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 为 AD 上一点, F 为 AB 上一点, 且 $BE = DF$, BE 与 DF 交于点 G , 求证:
 $\angle BGC = \angle DGC$.

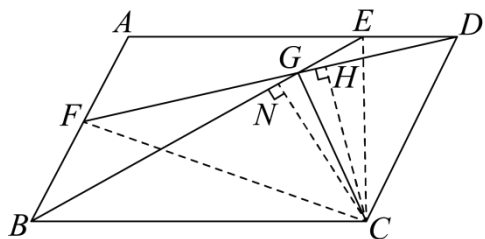


【答案】见详解

【解析】

【分析】过点 C 作 $CN \perp BE$ 于点 N , $CH \perp DF$ 于点 H , 连接 CF 、 CE , 根据等积法可得 $CH = CN$, 进而即可得到结论.

【详解】解: 过点 C 作 $CN \perp BE$ 于点 N , $CH \perp DF$ 于点 H , 连接 CF 、 CE ,



$$\because S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD} = S_{\triangle DFC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} DF \cdot CH = \frac{1}{2} BE \cdot CN,$$

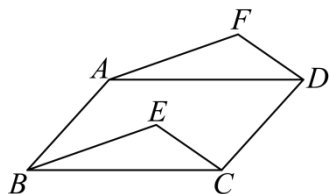
$$\because BE = DF,$$

$$\therefore CH = CN,$$

$$\therefore CG \text{ 平分 } \angle BGD,$$

$$\therefore \angle BGC = \angle DGC.$$

22. 如图, 点 E 在 $\square ABCD$ 内部, 过点 A 作 BE 的平行线、过点 D 作 CE 的平行线交于点 F .



- (1) 求证: $\triangle BCE \cong \triangle ADF$;

- (2) 连接 AE 、 DE , 设 $\square ABCD$ 的面积为 S , 四边形 $AEDF$ 的面积为 T , 求 $\frac{S}{T}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $AD = BC$ 、 $AD \parallel BC$ ，进而得到 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，根据平行线的性质得到 $\angle CBE = \angle DAF$ 和 $\angle BCE = \angle ADF$ ，从而证得 $\triangle BCE \cong \triangle ADF$ (ASA)；

(2) 易证得 $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$ ，由 (1) 知 $\triangle BCE \cong \triangle ADF$ ，则 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADF}$ ，进而得到

$S_{\text{四边形} AEDF} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$ ，从而求出 $\frac{S}{T}$ 的值.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD = BC$ 、 $AD \parallel BC$ ，

∴ $\angle ABC + \angle BAD = \angle CBE + \angle ABE + \angle BAD = 180^\circ$ ，

∵ $AF \parallel BE$ ，

∴ $\angle ABE + \angle BAF = \angle ABE + \angle BAD + \angle DAF = 180^\circ$ ，

∴ $\angle CBE = \angle DAF$ ，

同理得 $\angle BCE = \angle ADF$ ，

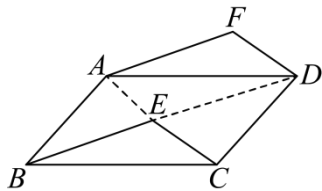
在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} \angle CBE = \angle DAF \\ BC = AD \\ \angle BCE = \angle ADF \end{cases},$$

∴ $\triangle BCE \cong \triangle ADF$ (ASA)；

【小问 2 详解】

解：如图，连接 AE 、 DE ，



∵ 点 E 在 $\square ABCD$ 内部，

$$\therefore S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$$

由 (1) 知 $\triangle BCE \cong \triangle ADF$ ，

$$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ADF},$$

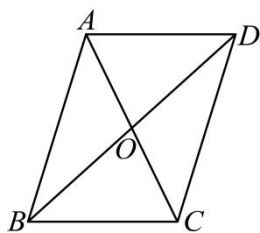
$$\therefore S_{\text{四边形}AEDF} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD},$$

设 $\square ABCD$ 的面积为 S ，四边形 $AEDF$ 的面积为 T ，

$$\therefore \frac{S}{T} = \frac{S}{\frac{1}{2}S} = 2.$$

23. 请阅读下列材料:

小海在学习了平行四边形的相关知识后，查阅相关资料，发现平行四边形还有如下的性质：平行四边形四条边的边长的平方和等于两条对角线长的平方和. 小海很感兴趣，并尝试进行了证明.



(1) 请完成小海的证明过程.

(2) 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = \frac{4}{3}BC$ ， $AO = 6$ ， $BO = 8$ ，求 $\square ABCD$ 的周长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\square ABCD$ 的周长为 $28\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A ， D 作 BC 的垂线，分别与 BC 交于点 E ，与 BC 的延长线交于点 F ，设 $AB = CD = a$ ， $AD = BC = b$ ， $BE = c$ ，则 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2a^2 + 2b^2$ ，再利用勾股定理计算出 AC^2 ， BD^2 即可证明；

(2) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AC = 2AO = 2 \times 6 = 12$ ， $BD = 2BO = 2 \times 8 = 16$ ，再由 $AB = \frac{4}{3}BC$ ，设 $AD = BC = 3x$ ，则 $CD = AB = \frac{4}{3} \times 3x = 4x$ ，再利用 (1) 的结论即可求解.

【小问 1 详解】

证明：如图 1，过点 A ， D 作 BC 的垂线，分别与 BC 交于点 E ，与 BC 的延长线交于点 F ，则 $\angle AEB = \angle AEC = \angle DFC = 90^\circ$ ，

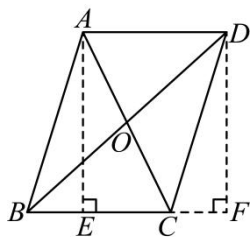


图1

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD, \quad AD = BC,$$

设 $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $BE = c$, 则 $CE = b - c$,

$$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE^2 + BE^2 = AB^2$, 即 $AE^2 = AB^2 - BE^2 = a^2 - c^2$,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $AC^2 = AE^2 + CE^2$,

$$\therefore AC^2 = AE^2 + CE^2 = a^2 - c^2 + (b - c)^2 = a^2 - c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 - 2bc,$$

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DF = AE, \quad CF = BE = c,$$

$$\therefore DF^2 = AE^2 = a^2 - c^2, \quad BF = BC + CF = b + c,$$

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中, $BD^2 = BF^2 + DF^2$,

$$\therefore BD^2 = BF^2 + DF^2 = (b + c)^2 + a^2 - c^2 = b^2 + 2bc + c^2 + a^2 - c^2 = b^2 + 2bc + a^2,$$

$$\therefore AC^2 + BD^2 = (a^2 + b^2 - 2bc) + (b^2 + 2bc + a^2) = a^2 + b^2 - 2bc + b^2 + 2bc + a^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

∴ $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, 即平行四边形四条边的边长的平方和等于两条对角线长的平方和.

【小问 2 详解】

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AC = 2AO = 2 \times 6 = 12, \quad BD = 2BO = 2 \times 8 = 16,$$

$$\therefore AB = \frac{4}{3}BC,$$

$$\therefore \text{设 } AD = BC = 3x, \text{ 则 } CD = AB = \frac{4}{3} \times 3x = 4x,$$

由 (1) 可知, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$,

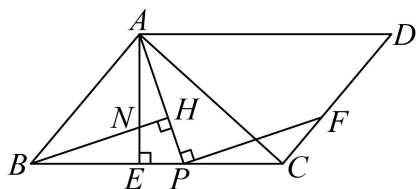
$$\therefore (4x)^2 + (3x)^2 + (4x)^2 + (3x)^2 = 12^2 + 16^2,$$

解得 $x = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore AD = BC = 3x = 6\sqrt{2}, \quad CD = AB = 4x = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 的周长为 } AB + BC + CD + DA = (6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \times 2 = 28\sqrt{2}.$$

24. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB < BC$, $AE \perp BC$ 于点 E , 点 P 是 BC 上的动点, 连接 AP .



(1) 若 $BP = 4$, $AP = \sqrt{17}$, $CD = 5$, 求 PE 的长;

(2) 过点 P 作 $PF \perp AP$ 交 CD 于点 F , 过点 B 作 $BH \perp AP$ 于点 H , 交 AE 于点 N , 若 $AP = BN$, $AN = CP$, 求证: $BP = \sqrt{2}CF + CP$.

【答案】(1) PE 的长为 1

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 设 $PE = x$, 则 $BE = BP - PE = 4 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle APE$ 中, $AE^2 = AP^2 - PE^2 = 17 - x^2$, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE^2 = AB^2 - BE^2 = 9 + 8x - x^2$, 建立方程即可求解;

(2) 连接 NP , 证明 $\triangle NBE \cong \triangle PAE$, 可得 $BE = AE$, $NE = PE$, 有 $NE = \frac{\sqrt{2}}{2}NP$, 再证明 $\triangle ANP \cong \triangle PCF$, 可得 $CF = NP$, 则 $NE = \frac{\sqrt{2}}{2}NP = \frac{\sqrt{2}}{2}CF$, 则由 $BP = BE + PE = AE + NE = AN + 2NE$ 即可得结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $CD = 5$,

$$\therefore AB = CD = 5,$$

设 $PE = x$, 则 $BE = BP - PE = 4 - x$,

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEP = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle APE \text{ 中, } AE^2 = AP^2 - PE^2 = (\sqrt{17})^2 - x^2 = 17 - x^2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABE \text{ 中, } AE^2 = AB^2 - BE^2 = 5^2 - (4 - x)^2 = 25 - (16 - 8x + x^2) = 25 - 16 + 8x - x^2 = 9 + 8x - x^2,$$

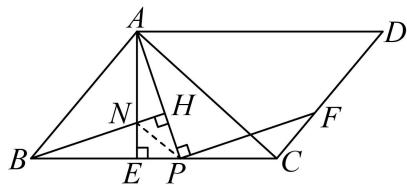
$$\therefore 17 - x^2 = 9 + 8x - x^2,$$

解得 $x = 1$,

$\therefore PE$ 的长为 1.

【小问 2 详解】

证明：连接 NP ,



$\because BH \perp AP, \quad AE \perp BC,$

$\therefore \angle BHP = \angle BEN = \angle AEP = 90^\circ,$

$\therefore \angle APB + \angle NBE = 90^\circ, \quad \angle APB + \angle EAP = 90^\circ,$

$\therefore \angle NBE = \angle EAP,$

在 $\triangle NBE$ 和 $\triangle PAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle NBE = \angle EAP \\ \angle BEN = \angle AEP, \\ BN = AP \end{cases}$$

$\therefore \triangle NBE \cong \triangle PAE \text{ (AAS)},$

$\therefore BE = AE, \quad NE = PE,$

$\because AE \perp BC,$

$\therefore \angle AEP = \angle AEB = 90^\circ,$

$\therefore \angle PNE = \angle EPN = 45^\circ, \quad NE^2 + PE^2 = 2NE^2 = NP^2, \quad \angle ABE = \angle BAE = 45^\circ,$

$\therefore \angle ANP = 180^\circ - \angle PNE = 135^\circ, \quad NE = \frac{\sqrt{2}}{2} NP,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \angle PCF = 180^\circ - \angle ABE = 135^\circ,$

$\therefore \angle ANP = \angle PCF,$

$\because BH \perp AP, \quad PF \perp AP,$

$\therefore BH \parallel PF,$

$\therefore \angle FPC = \angle NBE,$

$\therefore \angle EAP = \angle FPC,$

在 $\triangle ANP$ 和 $\triangle PCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAP = \angle FPC \\ AN = PC \\ \angle ANP = \angle PCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ANP \cong \triangle PCF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore NP = CF,$$

$$\therefore NE = \frac{\sqrt{2}}{2} NP = \frac{\sqrt{2}}{2} CF,$$

$$\therefore BP = BE + PE = AE + NE = (AN + NE) + NE = AN + 2NE = CP + \sqrt{2}CF.$$