

初二数学

(时间 100 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各组二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.7}$ 与 $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{a+b}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ (其中 $a > b > 0$)

C. $\sqrt{24}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{6}}$

D. $\sqrt{x^3y}$ 与 $\sqrt{xy^2}$ (其中 $x > 0, y > 0$)

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的定义, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

判断二次根式是否为同类, 需将它们化为最简二次根式, 比较被开方数是否相同, 据此逐项判断即可.

【详解】解: 同类二次根式需化简后被开方数相同,

选项 A: $\sqrt{0.7}$ 与 $\sqrt{7}$, 被开方数分别为 0.7 和 7, 不同, 故不是同类二次根式;

选项 B: $\sqrt{a+b}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ (其中 $a > b > 0$), $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ 可化为 $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$, 被开方数分别为 $a+b$ 和 $a-b$,

不同, 故不是同类二次根式;

选项 C: $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 两者最简形式被开方数均为 6, 故是同类二次根式;

选项 D: $\sqrt{x^3y} = x\sqrt{xy}$, $\sqrt{xy^2} = y\sqrt{x}$, 其中 $x > 0, y > 0$, 被开方数分别为 xy 和 x , 不同, 故不是同类二次根式;

故选: C.

2. $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别是 a 、 b 、 c , 下列条件中, 不能说明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 ()

A. $a^2 = b^2 - c^2$

B. $\angle B = \angle A + \angle C$

C. $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$

D. $a:b:c = 7:24:25$

【答案】C

【解析】

【分析】结合三角形内角和定理与勾股定理的逆定理, 逐个验证选项即可.

【详解】解: A. $\because a^2 = b^2 - c^2$,

$\therefore a^2 + c^2 = b^2$ ，符合勾股定理的逆定理，能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意；

B. $\because \angle B = \angle A + \angle C$ ， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore 2\angle B = 180^\circ$ ，即 $\angle B = 90^\circ$ ，能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意；

C. 设 $\angle A = x$ ，由 $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$ 得 $\angle B = \frac{1}{2}x$ ， $\angle C = \frac{1}{3}x$ ，

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 180^\circ$

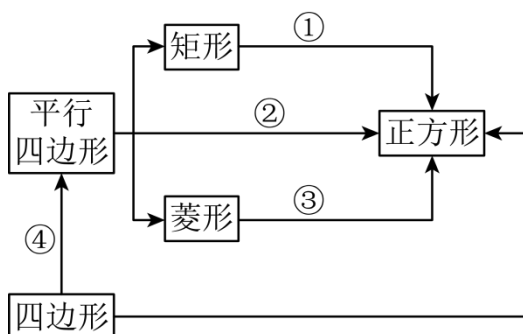
，解得 $x = \left(\frac{1080}{11}\right)^\circ \approx 98.2^\circ$ ，

则 $\triangle ABC$ 最大角不是 90° ，不是直角三角形，符合题意；

D. 设 $a = 7k$ ， $b = 24k$ ， $c = 25k$ ($k > 0$)，

$\because (7k)^2 + (24k)^2 = 49k^2 + 576k^2 = 625k^2 = (25k)^2$ ，符合勾股定理的逆定理，能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，不符合题意。

3. 如图的知识结构图中①、②、③、④表示需要添加的条件，则下列描述正确的是 ()



A. ①可表示对角线相互垂直；

B. ②可表示对角线互相平分、垂直；

C. ③可表示一组邻边相等；

D. ④可表示一组对边平行，另一组对边相等。

【答案】A

【解析】

【分析】熟练掌握各特殊四边形之间的转化关系及判定条件，根据知识结构图逐一分析各选项即可。

【详解】解：A、由矩形变为正方形，需添加“一组邻边相等”或“对角线互相垂直”的条件，故①可表示对角线互相垂直，该选项符合题意；

B、由平行四边形变为正方形，需添加“对角线互相垂直且相等”的条件，平行四边形本身对角线互相平分，仅添加“垂直”只能判定为菱形，故该选项不符合题意；

C、由菱形变为正方形，需添加“有一个角是直角”或“对角线相等”的条件，“一组邻边相等”是菱形本身具有的性质，故该选项不符合题意；

D、由四边形变为平行四边形，需添加“一组对边平行且相等”或“两组对边分别平行”等条件，“一组对边平行，另一组对边相等”的四边形可能是等腰梯形，故该选项不符合题意.

4. 在平面直角坐标系内有一点 A ，若点 A 位于第二象限，并且点 A 到 x 轴和 y 轴的距离分别为 1, 2，则点 A 的坐标是 ()

- A. $(-1,2)$ B. $(-2,1)$ C. $(-1,-2)$ D. $(2,-1)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平面直角坐标系中点的坐标特征，根据第二象限点的符号特点，以及点到坐标轴距离与坐标的关系解答即可.

【详解】解：∵点 A 位于第二象限，

∴点 A 的横坐标为负数，纵坐标为正数，

∵点 A 到 x 轴的距离为 1，到 y 轴的距离为 2，

∴点 A 的纵坐标绝对值为 1，横坐标绝对值为 2，

∴点 A 的坐标为 $(-2,1)$

5. 面积为 S 的菱形一条对角线是另一条的 2 倍，则其边长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5S}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3S}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2S}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3S}}{3}$

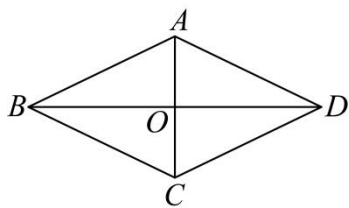
【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质，勾股定理. 根据菱形的面积公式可得 $\frac{1}{2} AC \times 2AC = S$ ，从而得到

$AC = \sqrt{S}$ (, $BD = 2AC = 2\sqrt{S}$ ，再由勾股定理解答即可.

【详解】解：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O ，且 $BD = 2AC$ ，



$$\therefore \frac{1}{2} AC \times BD = S,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \times 2AC = S,$$

$$\therefore AC = \sqrt{S} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore BD = 2AC = 2\sqrt{S},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore OB = \sqrt{S}, OA = \frac{\sqrt{S}}{2}, AC \perp BD,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{(\sqrt{S})^2 + \left(\frac{\sqrt{S}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5S}}{2},$$

即菱形的边长为 $\frac{\sqrt{5S}}{2}$.

故选: A.

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB < BC$, 连接 AC , 分别以点 A, C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 M, N , 直线 MN 分别交 AD, BC 于点 E, F . 下列结论:

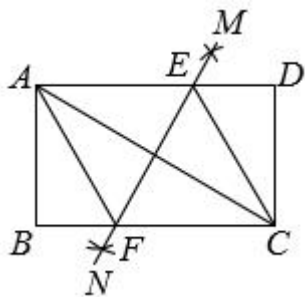
① 四边形 $AECF$ 是菱形;

② $\angle AFB = 2\angle ACB$;

③ $AC \cdot EF = CF \cdot CD$;

④ 若 AF 平分 $\angle BAC$, 则 $CF = 2BF$.

其中正确结论的个数是 ()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

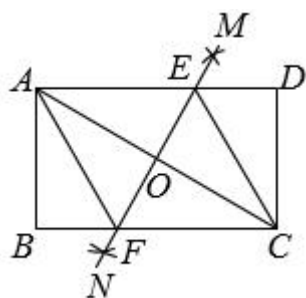
【答案】B

【解析】

【分析】根据作图可得 $MN \perp AC$, 且平分 AC , 设 AC 与 MN 的交点为 O , 证明四边形 $AECF$ 为菱形, 即可判断①, 进而根据等边对等角即可判断②, 根据菱形的性质求面积即可求解. 判断③, 根据角平分线

的性质可得 $BF = FO$ ，根据含 30° 角的直角三角形的性质，即可求解。

【详解】如图，设 AC 与 MN 的交点为 O ，



根据作图可得 $MN \perp AC$ ，且平分 AC ，

$$\therefore AO = OC,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle OCF,$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle COF, \quad AO = CO,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF,$$

$$\therefore AE = FC,$$

$$\because AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\because MN$ 垂直平分 AC ，

$$\therefore EA = EC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形，故①正确；

$$\text{②} \because FA = FC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle FAC,$$

$$\therefore \angle AFB = 2\angle ACB; \text{ 故②正确；}$$

$$\text{③由菱形的面积可得 } \frac{1}{2} AC \cdot EF = CF \cdot CD; \text{ 故③不正确,}$$

④ $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

若 AF 平分 $\angle BAC$ ， $FB \perp AB, FO \perp AC$ ，

则 $BF = FO$ ，

$$\therefore \angle BAF = \angle FAC,$$

$$\because \angle FAC = \angle FCA,$$

$$\because \angle BAF + \angle FAC + \angle FCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore FO = \frac{1}{2}FC,$$

$$\because FO = BF,$$

$$\therefore CF = 2BF. \text{ 故④正确;}$$

故选 B

【点睛】 本题考查了菱形的性质与判定，矩形的性质，平行四边形的性质与判定，含 30° 度角的直角三角形的性质，角平分线的性质，综合运用以上知识是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 方程 $2x^3 + 54 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了立方根的性质，熟练掌握立方根的性质是解题的关键. 先将方程 $2x^3 + 54 = 0$ 变形为 $x^3 = -27$ ，再利用立方根的性质，即可求解.

【详解】 解： $\because 2x^3 + 54 = 0,$

$$\therefore x^3 = -27,$$

解得： $x = -3.$

故答案为： $x = -3.$

8. 在方程 $x^2 + \frac{3}{x^2 - 3x} = 3x - 4$ 中，如果设 $y = x^2 - 3x$ ，那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 + 4y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 此题考查了换元法解分式方程的能力，用换元法解一些复杂的分式方程是比较简单的一种方法，根据方程特点设出相应未知数，再将分式方程化为整式方程. 先将原方程中 $3x$ 移项，化为分式方程，再变形为整式方程即可.

【详解】 解： $\because x^2 + \frac{3}{x^2 - 3x} = 3x - 4,$

$$\therefore x^2 - 3x + \frac{1}{x^2 - 3x} = -4,$$

$$\text{设 } y = x^2 - 3x,$$

$$\therefore y + \frac{1}{y} = -4,$$

$$\therefore \text{原方程可化为关于 } y \text{ 的整式方程是 } y^2 + 4y + 1 = 0,$$

$$\text{故答案为: } y^2 + 4y + 1 = 0.$$

9. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍, 则这个多边形的边数是_____.

【答案】8

【解析】

【分析】根据多边形的内角和定理, 多边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 外角和等于 360° , 然后列方程求解即可.

【详解】解: 设边数为 n , 由题意得,

$$180(n-2) = 360 \times 3,$$

$$\text{解得 } n=8.$$

所以这个多边形的边数是 8.

故答案为: 8.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理, 根据题意列出方程是解题的关键.

10. 已知菱形一组对角的和为 240° , 较短的一条对角线的长度为 4, 那么这个菱形的面积为_____.

【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先画出图形, 根据已知条件得出 $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$, $AC = 4$, 根据菱形的性质得出 $BA = BC$, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AO = \frac{1}{2} AC = 2$, $BO = DO = \frac{1}{2} BD$, 证明 ABC 是等边三角形, 得出 $AB = AC = 4$, 根据勾股定理得出 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, 根据 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, 据此即可解答.

【详解】解: 由题意得, $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 240^\circ = 120^\circ$, $AC = 4$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BA = BC, AD \parallel BC, AC \perp BD, AO = \frac{1}{2}AC = 2, BO = DO = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ,$$

$\therefore ABC$ 是等边三角形,

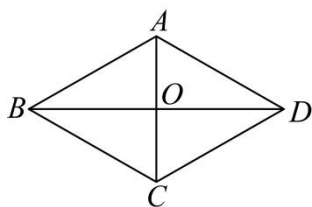
$$\therefore AB = AC = 4,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

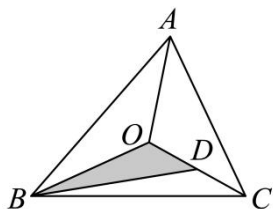
$$\therefore BD = 2BO = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

故答案为: $8\sqrt{3}$.



11. 如图, 在 ABC 中, 点 O 为三角形的重心, D 为 OC 中点, 若 ABC 的面积为 24, 则 $\triangle BOD$ 的面积是_____.



【答案】4

【解析】

【分析】 本题主要考查了重心, 三角形中线的性质,

延长 AO , 交 BC 于点 E , 根据重心的性质得出 $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ACO}$, 进而得出 $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ACO} = S_{\triangle BCO}$, 即可求出 $S_{\triangle BCO} = 8$, 再根据中点的定义得出答案.

【详解】 解: 如图所示, 延长 AO , 交 BC 于点 E ,

$\therefore$ 点 O 是 ABC 的重心,

$\therefore AE$ 是 ABC 的中线,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE}, S_{\triangle OBE} = S_{\triangle OCE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} - S_{\triangle OBE} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle OCE},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ACO},$$

$$\text{同理, } S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ACO} = S_{\triangle BCO}.$$

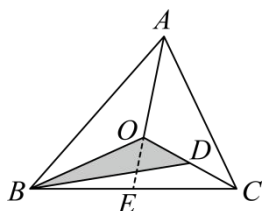
$$\therefore S_{\triangle ABC} = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ACO} = S_{\triangle BCO} = 8.$$

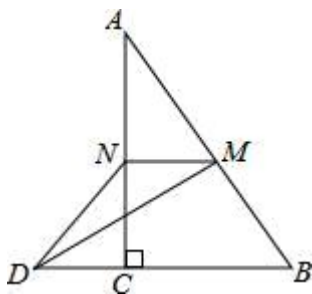
$\therefore D$ 是 OC 的中点,

$$\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCO} = 4.$$

故答案为: 4.



12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点, 延长 BC 至点 D , 使 $BC = 2CD$, 连接 DM 、 DN 、 MN . 若 $AB = 6$, 则 $DN = \underline{\hspace{2cm}}$.

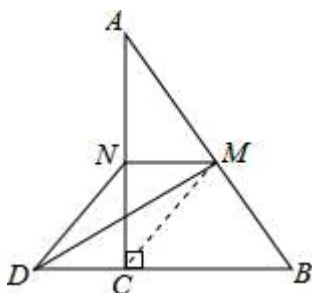


【答案】3

【解析】

【分析】连接 CM , 根据直角三角形的性质求出 CM , 证明四边形 $DCMN$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质解答.

【详解】解: 连接 CM ,



$\because \angle ACB = 90^\circ$, M 是 AB 的中点,

$$\therefore CM = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$\because M$ 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2} BC, MN \parallel BC,$$

$$\because BC = 2CD,$$

$$\therefore MN = CD, \text{ 又 } MN \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $DCMN$ 是平行四边形,

$$\therefore DN = CM = 3,$$

故答案为 3.

【点睛】 本题考查的是三角形中位线定理、直角三角形的性质, 掌握三角形的中位线平行于第三边, 并且等于第三边的一半是解题的关键.

13. 在平面直角坐标系中, 将点 $A(-2, 3)$ 先向右平移 4 个单位长度, 再向下平移 5 个单位长度后, 得到的点的坐标为_____.

【答案】

$(2, -2)$

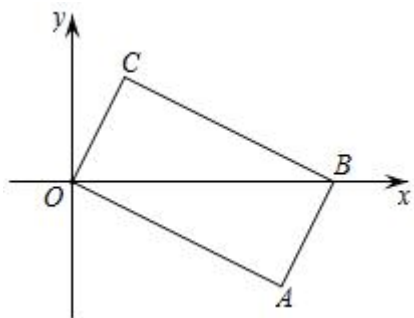
【解析】

【分析】 平移规律: 横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减, 根据平移时点的坐标变化规律即可求解.

【详解】 解: 将点 $A(-2, 3)$ 向右平移 4 个单位长度, 横坐标变为 $-2 + 4 = 2$, 所得点的坐标为 $(2, 3)$.

再向下平移 5 个单位长度, 纵坐标变为 $3 - 5 = -2$, 最终得到的点的坐标为 $(2, -2)$.

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 矩形 $OABC$ 的顶点 A , C 的坐标分别是 $(4, -2)$, $(1, 2)$, 点 B 在 x 轴上, 则点 B 的横坐标是_____.

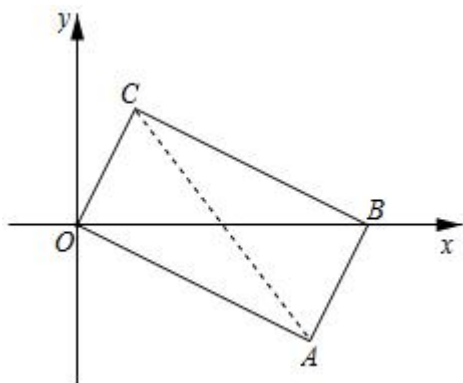


【答案】 5

【解析】

【分析】由两点距离公式可求 AC 的长，由矩形的性质可求 $OB = AC = 5$ ，即可求解．

【详解】解：连接 AC ，



$\because$ 点 $A(4, -2)$ ，点 $C(1, 2)$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5,$$

$\because$ 四边形 $ABCO$ 是矩形，

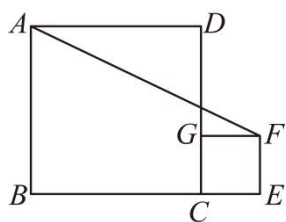
$$\therefore OB = AC = 5,$$

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 5，

故答案为：5．

【点睛】本题考查了矩形的性质，坐标与图形的性质，掌握矩形的对角线相等是解题的关键．

15. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中， B 、 C 、 E 三点共线，点 G 在 CD 上， $BC = 3$ ， $CE = 1$ ，那么 AF 的长是_____．



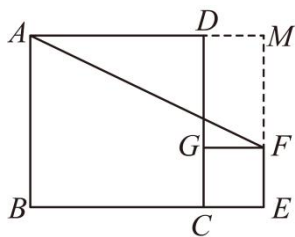
【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，矩形的判定与性质，勾股定理，熟练掌握矩形的判定与性质、正方形的性质是解题的关键．

延长 AD 、 EF 相交于 M ，先证明四边形 $ABEM$ 是矩形，得到 $FM = EM - EF = 2$ ， $AM = BE = 4$ ，再对 $\text{Rt}\triangle AMF$ 运用勾股定理求解即可．

【详解】解：延长 AD 、 EF 相交于 M ，



$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中, $BC = 3$, $CE = 1$,

$\therefore BE = 4$, $\angle B = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle E = 90^\circ$, $AB = BC = 3$, $EF = CE = 1$,

$\therefore$ 四边形 $ABEM$ 是矩形,

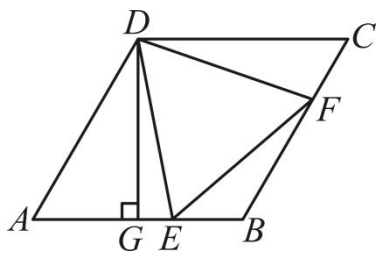
$\therefore AM = BE = 4$, $EM = AB = 3$, $\angle M = 90^\circ$,

$\therefore FM = EM - EF = 2$,

$\therefore AF = \sqrt{AM^2 + MF^2} = 2\sqrt{5}$,

故答案为: $2\sqrt{5}$.

16. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 点 E , F 分别在边 AB , BC 上, $\triangle DEF$ 为等边三角形, $DG \perp AB$. 若 $AD = 6$, $AE = 4$, 则 EF 的长为_____.

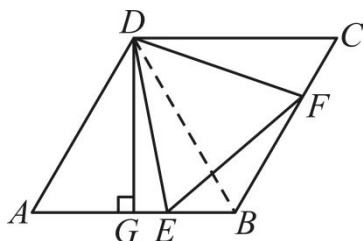


【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 连接 BD , 根据菱形的性质得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 根据等边三角形的性质得出边的长度, 然后利用勾股定理进行求得 $DE = 2\sqrt{7}$, 最后根据等边三角形的性质求解即可.

【详解】 解: 如图, 连接 BD ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore AB = AD = 6$,

又 $\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$QD \perp AB$,

$$\therefore AG = BG = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore EG = AE - AG = 1,$$

由勾股定理得, $DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

$$\therefore DE = \sqrt{DG^2 + EG^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7},$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形,

$$\therefore EF = DE = 2\sqrt{7}.$$

故答案为: $2\sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定和性质、勾股定理, 解决本题的关键是掌握菱形的性质以及勾股定理.

17. 如果三角形的其中两条中线是垂直的, 则称这个三角形为“优美三角形”, 两条垂直的中线的比值(较短中线与较长中线的比值)为“优美值”; 已知 $Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”, 且 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的“优美值”是_____;

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 该题考查了平行四边形的性质和判定, 勾股定理, 二次根式的性质, 分情况讨论是解题的关键.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点, 设 $AC = 2a, BC = 2b$, 根据 $Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”, 分为 $BE \perp CD$ 时, $AF \perp CD$ 时, $AF \perp BE$ 时三种情况分别画图求解即可.

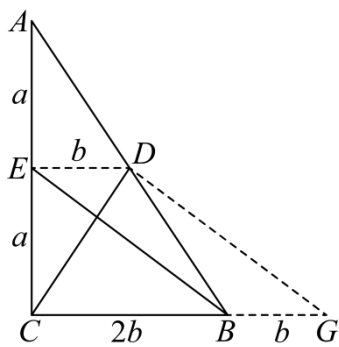
【详解】 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点,

设 $AC = 2a, BC = 2b$,

$\therefore Rt\triangle ABC$ 是“优美三角形”,

故分为 $BE \perp CD$ 时, $AF \perp CD$ 时, $AF \perp BE$ 时.

当 $BE \perp CD$ 时, 如图,



$$\therefore AE = CE = a, DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC = b,$$

过点 D 作 $DG \parallel BE$ ，延长 CB 交 DG 于点 G ，

$$\therefore DG \parallel BE, DE \parallel BG,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBG$ 是平行四边形，

$$\therefore BG = DE = b,$$

$$\therefore CG = 2b + b = 3b,$$

$$\therefore AC \perp BC, BE \perp CD, BE \parallel DG,$$

$$\therefore DG \perp CD, DE \perp CE,$$

$$\therefore DG^2 = BE^2 = CE^2 + BC^2 = a^2 + (2b)^2,$$

$$\therefore CD^2 = CE^2 + DE^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

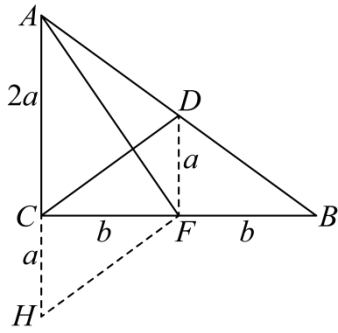
$$\therefore a^2 + b^2 + a^2 + (2b)^2 = (3b)^2,$$

$$\therefore a^2 = 2b^2,$$

$$\therefore CD^2 = 3b^2, BE^2 = 6b^2,$$

$$\therefore \frac{CD}{BE} = \sqrt{\frac{3b^2}{6b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 $AF \perp CD$ 时，如图，



$$\therefore CF = BF = b, DF \parallel AC, DF = \frac{1}{2}AC = a,$$

过点 F 作 $FH \parallel CD$, 延长 AC 交 FH 于点 H ,

$$\therefore DF \parallel CH, CD \parallel FH,$$

$\therefore$ 四边形 $DFHC$ 是平行四边形,

$$\therefore CH = DF = a,$$

$$\therefore AH = 2a + a = 3a,$$

$$\therefore AC \perp BC, AF \perp CD, FH \parallel CD,$$

$$\therefore DF \perp CB, FH \perp AF,$$

$$\therefore DC^2 = FH^2 = DF^2 + CF^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore AF^2 = AC^2 + CF^2 = (2a)^2 + b^2,$$

$$\therefore AF^2 + HF^2 = AH^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + b^2 + (2a)^2 = (3a)^2,$$

$$\therefore b^2 = 2a^2,$$

$$\therefore CD^2 = 3a^2, AF^2 = 6a^2,$$

$$\therefore \frac{CD}{AF} = \sqrt{\frac{3a^2}{6a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 $AF \perp BE$ 时, 如图,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

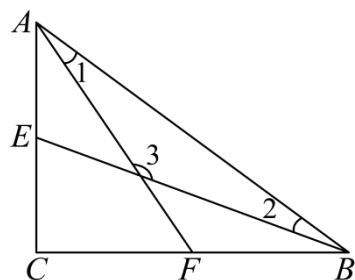
$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$\therefore \angle 3 > 90^\circ$,

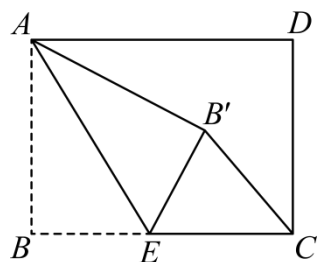
故与 $AF \perp BE$ 矛盾, 此种情况不存在.



综上, ABC 的“优美值”是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, BC = 8$, 点 E 是 BC 边上一点, 连接 AE , 把 $\angle B$ 沿 AE 折叠, 使点 B 落在点 B' 处, 当三角形 CEB' 为直角三角形时, BE 的长为_____.



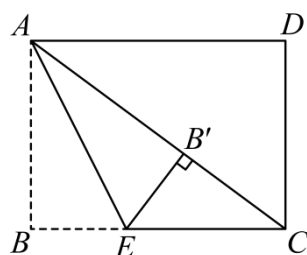
【答案】 3 或 6

【解析】

【分析】 本题考查矩形与折叠, 正方形的判定和性质, 当 $\triangle B'CE$ 为直角三角形, 有两种情况: ①当点 B' 落在矩形内部, 即 $\angle EB'C = 90^\circ$ 时, 连接 AC , 结合矩形性质、勾股定理求得 AC , 再根据折叠性质得到点 A 、 B' 、 C 共线, $BE = B'E$, $AB = AB' = 6$, 求得 CB' , 设 $BE = B'E = x$, 则 $CE = 8 - x$, 再根据勾股定理即可得解; ②当点 B' 落在 AD 边上, 即 $\angle B'EC = 90^\circ$ 时, 证明四边形 $ABEB'$ 是正方形即可得解.

【详解】 解: 当 $\triangle B'CE$ 为直角三角形时, 有两种情况:

①当点 B' 落在矩形内部, 即 $\angle EB'C = 90^\circ$ 时, 如下图, 连接 AC ,



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $BC = AD = 8$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $BC=8$,

$$\therefore AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\therefore$ 把 $\angle B$ 沿着 AE 折叠, 使点 B 落在点 B' 处,

$$\therefore \angle AB'E = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EB'C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 A 、 B' 、 C 共线,

根据折叠性质可得: $BE = B'E$, $AB = AB' = 6$,

$$\therefore CB' = AC - AB' = 4,$$

设 $BE = B'E = x$, 则 $CE = 8 - x$,

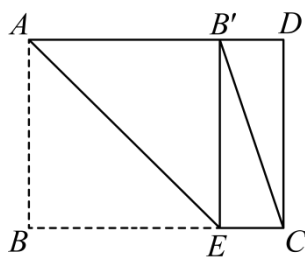
$$\therefore Rt\triangle B'CE \text{ 中, } B'E^2 + CB'^2 = CE^2,$$

$$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2,$$

解得 $x = 3$,

$$\therefore BE = 3;$$

②当点 B' 落在 AD 边上, 即 $\angle B'EC = 90^\circ$ 时, 如下图:



由折叠性质得: $AB = AB' = 6$, $\angle AB'E = \angle A = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABEB'$ 是正方形,

$$\therefore BE = AB = 6, \angle BEB' = 90^\circ,$$

此时 $\angle CEB' = 90^\circ$ 符合题意.

故答案为: 3 或 6.

三、解答题 (第 19-22 题每题 10 分, 第 23、24 题每题 12 分, 第 25 题 14 分, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{27} + 10\sqrt{\frac{1}{50}}.$

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】原式先分母有理化、根据二次根式的性质化简，再合并同类二次根式即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{27} + 10\sqrt{\frac{1}{50}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} - \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{50} \times 100} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

20. 解方程: $(x+1)^2 - (x+1) = 6$

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -3$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】解: $(x+1)^2 - (x+1) = 6$

$$(x+1)^2 - (x+1) - 6 = 0$$

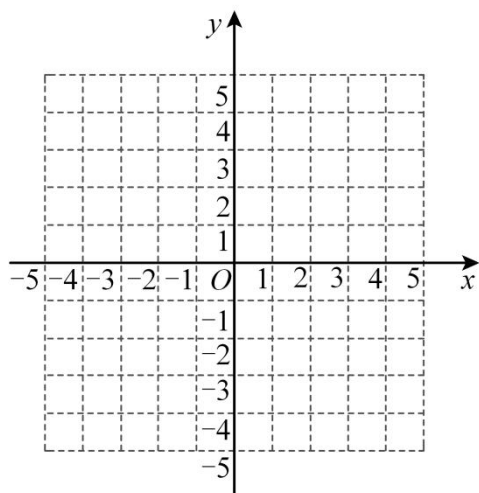
$$[(x+1)-3][(x+1)+2] = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

解得: $x_1 = 2, x_2 = -3$

【点睛】此题考查的是解一元二次方程，掌握用因式分解法解一元二次方程是解决此题的关键.

21. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A 在 x 轴上且坐标可表示为 $(a+2, 3a-6)$ ，点 B 的坐标为 $(-2, -1)$.



(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 将点 A 向上平移 3 个单位，再向左平移 2 个单位得到点 A' ，求点 A' 的坐标.

(3) 请在图中画出 $\triangle AA'B$ ，并求出 $\triangle AA'B$ 的面积.

【答案】 (1) 2 (2) $A'(2,3)$

(3) 见详解，10

【解析】

【分析】 本题主要考查坐标轴的特点和点的平移，

(1) 根据在 x 轴上 $y = 0$ 得特点列出 $3a - 6 = 0$ 求解即可；

(2) 根据平移得性质即可求得；

(3) 在平面直角坐标系中找到对应点，再将三角形分割为两部分求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 A 在 x 轴上且坐标可表示为 $(a+2, 3a-6)$ ，

$\therefore 3a - 6 = 0$ ，解得 $a = 2$.

故答案为：2；

【小问 2 详解】

由(1)得 $A(4,0)$ ，

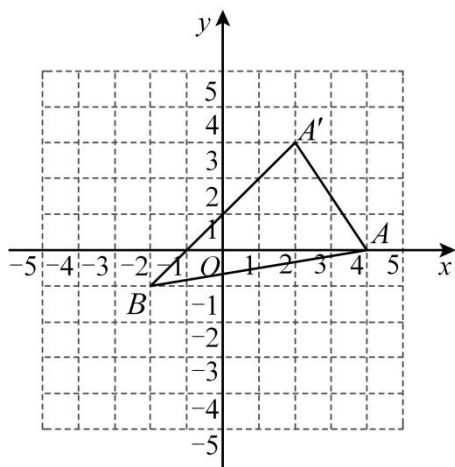
根据点 A 向上平移 3 个单位，得 $(4,3)$ ，

再向左平移 2 个单位得到点 $A'(2,3)$ ，

故 $A'(2,3)$ ；

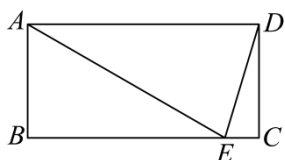
【小问 3 详解】

如图,



$$S_{\triangle AA'B} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5 \times 1 = 10.$$

22. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 边 BC 上有一点 E , 连接 AE , DE , $AE = AD$.



- (1) 求 EC 的长;
- (2) 求 $\angle CDE$ 的度数.

【答案】(1) $(8 - 4\sqrt{3})\text{cm}$;

(2) 15° .

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

(1) 根据矩形的性质得到 $AD = BC$, $\angle B = 90^\circ$, 根据勾股定理即可得到结论;

(2) 根据直角三角形的性质得到 $\angle AEB = 30^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle ADE = \angle AED$, 根据平行线的性质得到 $\angle ADE = \angle DEC$, 求得 $\angle AED = \angle DEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AEB) = 75^\circ$, 根据三角形的内角和定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC = 8\text{cm}, \angle B = 90^\circ.$$

$$\because AE = AD,$$

$$\therefore AE = 8\text{cm},$$

$$\therefore BE = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore CE = BC - BE = (8 - 4\sqrt{3})\text{cm};$$

【小问2详解】

解: $\because \angle DB = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AE = 8\text{cm}$,

$$\therefore \angle AEB = 30^\circ.$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

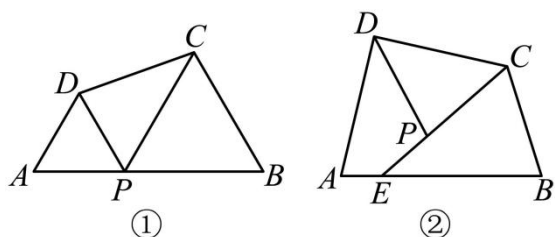
$$\therefore \angle ADE = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DEC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle AEB) = 75^\circ.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

23. 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B$, 如果在四边形 $ABCD$ 内部或边 AB 上存在一点 P , 满足 $\angle DPC = \angle A$, 那么称点 P 是四边形 $ABCD$ 的“映角点”.



(1) 如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B$, 点 P 在边 AB 上且是四边形 $ABCD$ 的“映角点”, 若 $DA \parallel CP$, $DP \parallel CB$, 则 $\angle DPC$ 的度数为_____°;

(2) 如图②. 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B$, 点 P 在四边形 $ABCD$ 内部且是四边形 $ABCD$ 的“映角点”, 延长 CP 交边 AB 于点 E , 求证: $\angle ADP = \angle CEB$.

【答案】(1) 60 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题是四边形综合题, 考查了新概念四边形 $ABCD$ 的“映角点”、平行线的性质、三角形的外角性质、四边形内角和、等边三角形的判定与性质等知识, 熟练掌握新概念四边形 $ABCD$ 的“映角点”是解题的关键.

(1) 由题意可知 $\angle A = \angle B = \angle DPC$, 若 $DA \parallel CP$, $DP \parallel CB$, 推出 $\angle A = \angle B = \angle DPC = \angle ADP = \angle PCB$, 再由 $\angle DPB$ 是 $\triangle ADP$ 的外角, 则 $\angle DPC + \angle CPB = 2\angle A$, 证

得 $\triangle BCP$ 为等边三角形, 即可得出结果;

(2) 先证 $\angle ADP + \angle AEP = 180^\circ$, 再由 $\angle CEB + \angle AEP = 180^\circ$, 即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: $\angle A = \angle B = \angle DPC$,

$$\therefore DA \parallel CP,$$

$$\therefore \angle DPC = \angle ADP,$$

$$\therefore DP \parallel CB,$$

$$\therefore \angle DPC = \angle PCB,$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle DPC = \angle ADP = \angle PCB,$$

$\therefore \angle DPB$ 是 $\triangle ADP$ 的外角,

$$\therefore \angle DPC + \angle CPB = \angle A + \angle ADP = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle A = \angle CPB,$$

$$\therefore \angle B = \angle CPB = \angle PCB,$$

$\therefore \triangle BCP$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPC = 60^\circ,$$

故答案为: 60;

【小问 2 详解】

证明: $\because \angle A = \angle B = \angle DPC$, $\angle DPC + \angle DPE = 180^\circ$,

$$\therefore \angle A + \angle DPE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP + \angle AEP = 180^\circ,$$

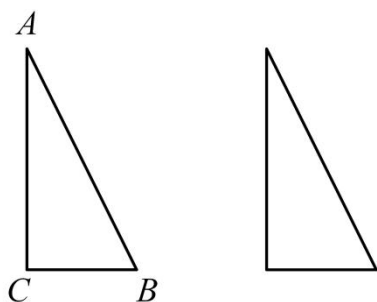
$$\therefore \angle CEB + \angle AEP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle CEB.$$

24. 在学习“三角形的重心”一课时, 小王向同桌小刘提出两个问题: 四边形有没有? 如果有, 它的重心如何确定? 小刘在周末查阅了相关资料, 得到如下的信息: ①四边形有重心; ②当两个面积相等的三角形拼成一个四边形时, 四边形的重心是连接这两个三角形重心的线段的中点.

根据以上信息, 解决下列问题:

如图, 有两张全等的直角三角形纸片, 其中一张记为 $\text{Rt}\triangle ABC$, C 为直角顶点, $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, 将这两个三角形拼成一个四边形, 使得斜边重合.



(1) 请画出所有符合要求的四边形，并指出所作四边形的重心 G ；(不用写作法，写出结论)

(2) 直接写出线段 AG 与线段 BG 的比值.

【答案】(1) 见解析；

(2) 线段 AG 与线段 BG 的比值是 1 或 $\frac{3}{2}$.

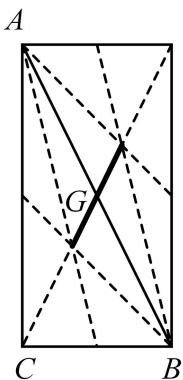
【解析】

【分析】(1) 当两个直角三角形拼成一个矩形时，两个三角形的重心连接的线段与斜边 AB 的交点就是拼成的四边形的重心；当两个直角三角形拼成一个两组邻边相等的四边形时，四边形的两条对角线把四边形分成两对三角形， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABH$ 的重心连接的线段与， $\triangle AHC$ 与 $\triangle BHC$ 的重心连接的线段的交点就是四边形 $ACBH$ 的重心；

(2) 根据重心的定义，可知四边形的重心是两个直角三角形的重心与直角三角形斜边的交点，分两种情况求出 AG 与 BG 的比值.

【小问 1 详解】

解：① 如下图所示，

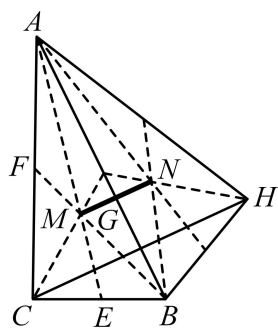


直角 $\triangle ABC$ 的重心是直角三角形三条中线的交点，

两个完全相同直角三角形拼成一个矩形，

当两个直角三角形的斜边重合时，两个直角三角形的重心连接的线段与斜边 AB 的交点就是四边形的重心；

② 如下图所示，



直角 ABC 的重心是直角三角形三条中线的交点 M ,

直角 $\triangle AHB$ 的重心是直角三角形三条中线的交点 N ,

由题意可知 $\triangle ACH$ 和 BCH 是等腰三角形且 $AC = AH$, $BC = BH$,

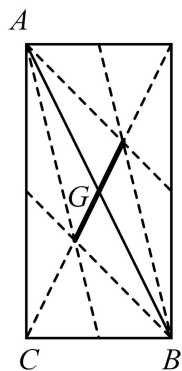
$\therefore \triangle ACH$ 和 BCH 的重心都在 AB 边上,

$\therefore$ 四边形 $ACBH$ 的重心是线段 MN 与 AB 的交点;

【小问 2 详解】

解: 当两个直角三角形拼成一个矩形时,

如下图所示,

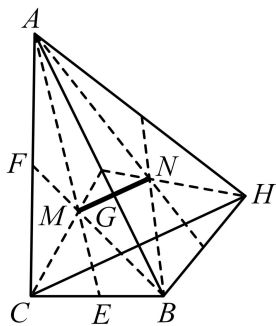


$\because$ 矩形对角线互相平分,

$\therefore AG = BG$,

$\therefore \frac{AG}{BG} = 1$;

当直角三角形拼成如下图所示的四边形时,



$$\because AM = AN,$$

$\therefore AB$ 是 MN 的垂直平分线,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2},$$

设 $BC = 2a$, 则 $AC = 4a$,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2\sqrt{5}a,$$

$$AE = \sqrt{(4a)^2 + a^2} = \sqrt{17}a, \quad BF = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a,$$

$\because$ 点 M 是重心,

$$\therefore \frac{AM}{AE} = \frac{BM}{BF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AM = \frac{2\sqrt{17}}{3}a, \quad BM = \frac{4}{3}\sqrt{2}a,$$

设 $AG = x$, ..

$$\text{则有 } MG^2 = AM^2 - AG^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{17}a\right)^2 - x^2,$$

$$MG^2 = BM^2 - BG^2 = \left(\frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}a\right)^2 - (2\sqrt{5}a - x)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}a\right)^2 - (2\sqrt{5}a - x)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{17}a\right)^2 - x^2,$$

$$\text{整理得: } 4a^2 = -20a^2 + 4\sqrt{5}ax,$$

$$\text{解得: } x = \frac{6\sqrt{5}}{5}a,$$

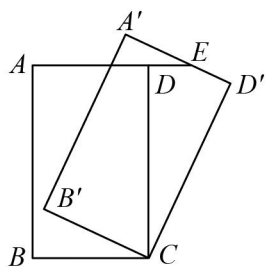
$$\therefore BG = AB - AG = 2\sqrt{5}a - \frac{6\sqrt{5}}{5}a = \frac{4\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\therefore \frac{AG}{BG} = \frac{\frac{6\sqrt{5}}{5}a}{\frac{4\sqrt{5}}{5}a} = \frac{3}{2}.$$

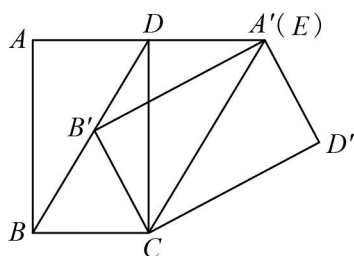
综上所述：线段 AG 与线段 BG 的比值是 1 或 $\frac{3}{2}$ 。

【点睛】本题主要考查了四边形的重心、三角形的重心、三角形的中线和勾股定理。解决本题的关键是根据三角形的重心是三角形三条中线的交点，两个三角形拼成的四边形的中心是两个三角形重心连接的线段的中点。

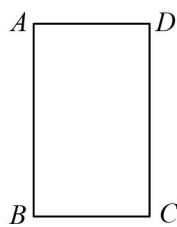
25. 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形 $A'B'CD'$ ，点 A, B, D 的对应点分别为点 A', B', D' ，设直线 AD 与直线 $A'D'$ 交于点 E 。



图①



图②



备用图

- (1) 猜想 DE 与 $D'E$ 的数量关系，并证明；
- (2) 如图②，在旋转的过程中，当点 B' 恰好落在矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时，点 A' 恰好落在 AD 的延长线上（即点 A' 与点 E 重合），连接 $A'C$ ，求证：四边形 $A'DBC$ 是平行四边形；
- (3) 在矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转的过程中，若 $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，当 A', B', D 三点在同一条直线上时，请求出 $A'D$ 的值。

【答案】(1) $DE = D'E$ ，见解析

(2) 见解析 (3) 1 或 9

【解析】

【分析】(1) 连接 CE ，根据矩形的性质得出 $\angle ADC = \angle CD'E = 90^\circ$ ，推得 $\angle CDE = \angle CD'E$ ，根据旋转的性质得出 $CD = CD'$ ，根据全等三角形的判定与性质即可证明；

(2) 连接 AC ，根据旋转的性质得出 $AC = A'C$ ，根据矩形的性质得出 $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，根据等腰三角形三线合一的性质得出 $AD = A'D$ ，推得 $A'D = BC$ ，根据平行四边形的判定定理即可证明；

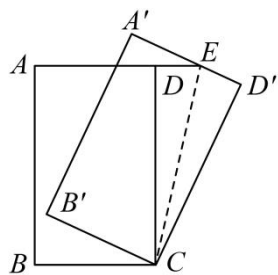
(3) 分为：点 A', B' 在 CD 的同一侧时和点 A', B' 在 CD 的异侧时，两种情况分别求解，根据勾股定理

求出 $B'D = 4$ ，结合图形求出 $A'D$ 的值即可．

【小问 1 详解】

解： $DE = D'E$ ，理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'CD'$ 都是矩形，如图①，连接 CE ，



图①

$$\angle ADC = \angle CD'E = 90^\circ,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CDE = \angle CD'E,$$

∵ 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形 $A'B'CD'$ ，

$$\therefore CD = CD',$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CD'E$ 中，

$$\begin{cases} CD = CD' \\ CE = CE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDE \cong \text{Rt}\triangle CD'E (\text{HL}),$$

$$\therefore DE = D'E;$$

【小问 2 详解】

证明：如图 2：连接 AC ，

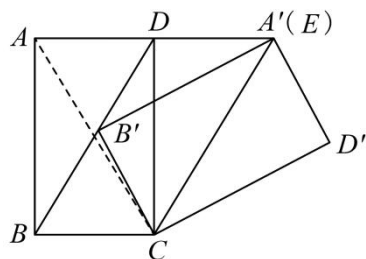


图2

根据旋转的性质可得： $AC = A'C$ ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

即 $CD \perp AA'$,

又 $\because AC = A'C$,

$\therefore AD = A'D$,

$\therefore A'D = BC$,

$\because A'D \parallel BC, A'D = BC$,

$\therefore$ 四边形 $A'DBC$ 是平行四边形;

【小问 3 详解】

解: 如图 3, 当点 A', B' 在 CD 的同一侧时,

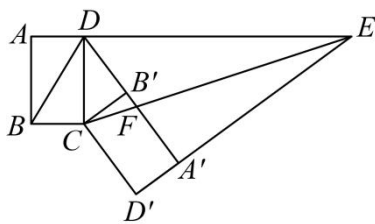


图3

根据旋转的性质可得: $BC = B'C = 3, AB = A'B' = 5, \angle A'B'C = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DB'C = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle CDB'$ 中, 由勾股定理得: $B'D = \sqrt{CD^2 - B'C^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore A'D = AB + B'D = 5 + 4 = 9$,

如图 4: 当点 A', B' 在 CD 的异侧时,

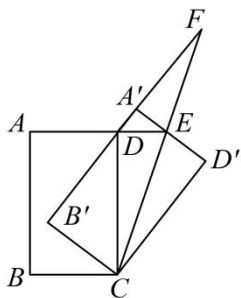


图4

根据旋转的性质可得: $BC = B'C = 3, AB = A'B' = 5, \angle A'B'C = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DB'C = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle CDB'$ 中, 由勾股定理得: $B'D = \sqrt{CD^2 - B'C^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore A'D = AB - B'D = 5 - 4 = 1$,

综上所述, $A'D$ 的值为 1 或 9.

【点睛】 本题考查了矩形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，平行四边形的判定定理，勾股定理等知识点，熟练掌握相关知识是解题的关键.