

2025 学年第二学期八年级数学补充练习

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 十二边形的外角和是（ ）

- A. 180° B. 360° C. 1800° D. 2160°

【答案】B

【解析】

【分析】多边形的外角和都是 360° ，根据该性质即可得出答案．

【详解】解：对边形的外角和为 360° ，
故选 B．

【点睛】本题主要考查的是多边形的外角和定理，属于基础题型．解决这个问题的关键就是要知道多边形的外角和定理．

2. 下列所述图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 菱形 D. 平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解．

【详解】解：A、等腰三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；
B、等边三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；
C、菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项正确；
D、平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误．

故选 C．

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 度后两部分重合．

3. 不能判定一个四边形是平行四边形的条件是（ ）．

- A. 两组对边分别平行 B. 一组对边平行，另一组对边相等
C. 一组对边平行且相等 D. 两组对边分别相等

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理，即可求解．

【详解】 $\because$ ①两组对边分别平行的四边形是平行四边形；②两组对边分别相等的四边形是平行四边形；③两组对角分别相等的四边形是平行四边形；④对角线互相平分的四边形是平行四边形；⑤一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

$\therefore$ A、D、C 均符合是平行四边形的条件，B 则不能判定是平行四边形.

故选 B.

4. 下列说法正确的有 ()

- ①对角线互相平分的四边形是平行四边形； ②平行四边形的对角互补.
③两个全等的三角形可以拼成一个平行四边形； ④平行四边形的四个内角之比可以是 $2:3:2:3$.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定和性质，逐一判断每个说法的正误即可得到答案.

【详解】解：①对角线互相平分的四边形是平行四边形，这是平行四边形的判定定理，故①正确；

②平行四边形的性质为对角相等，邻角互补，并非对角互补，故②错误；

③将两个全等三角形的一组相等边重合反向拼接，即可得到平行四边形，故③正确；

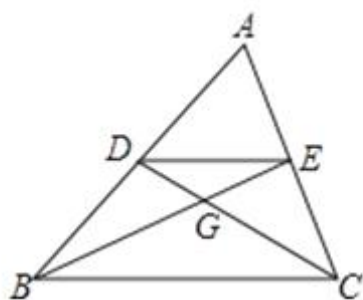
④平行四边形对角相等，邻角互补，若四个内角比为 $2:3:2:3$ ，满足对角占比相等，根据四边形内角和为 360° ，

可计算得四个角分别为 $360^\circ \times \frac{2}{2+3+2+3} = 72^\circ$ ， $360^\circ \times \frac{3}{2+3+2+3} = 108^\circ$ ， $360^\circ \times \frac{2}{2+3+2+3} = 72^\circ$ ，

$360^\circ \times \frac{3}{2+3+2+3} = 108^\circ$ ，满足对角相等，邻角和为 180° ，符合平行四边形的性质，故④正确，

综上，正确的说法共有 3 个.

5. 如图， $\triangle ABC$ 的中线 BE 与 CD 交于点 G，连接 DE，下列结论不正确的是 ()



- A. 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心 B. $DE \parallel BC$ C. $\triangle ABC$ 的面积 $= 2\triangle ADE$ 的面积 D. $BG = 2GE$

【答案】C

【解析】

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的中线 BE 与 CD 交于点 G， $\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $\therefore DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$ ，所

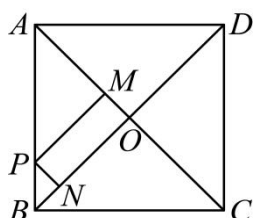
以选项 A、B 正确；

∵ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，根据重心性质或利用三角形相似可得 $BG=2GE$ ，∴ 选项 D 正确；

由 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，可知 $\triangle ABC$ 的面积 $= 4\triangle ADE$ 的面积，所以选项 C 错误。

故选 C。

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 是 AB 上任意一点， $PM \perp AC$ ， $PN \perp BD$ ，垂足分别为点 M 、 N ，若 $BD=10$ ，则 $PM+PN$ 的值为 ()。



A. 4

B. 5

C. 8

D. 10

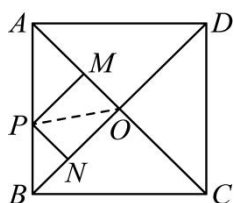
【答案】B

【解析】

【分析】连接 OP ，由正方形的性质可得 $OA = OB = \frac{1}{2}BD = 5$ ， $AC \perp BD$ ，结合三角形的面积公式计

算出 $PM+PN$ 即可。

【详解】解：如图，连接 OP ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $BD=10$ ，

$$\therefore OA = OB = \frac{1}{2}BD = 5, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{25}{2},$$

∵ $PM \perp AC$ ， $PN \perp BD$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2}PM \cdot OA + \frac{1}{2}PN \cdot OB = \frac{5}{2}PM + \frac{5}{2}PN,$$

$$\therefore \frac{5}{2}PM + \frac{5}{2}PN = \frac{25}{2},$$

$$\therefore PM + PN = 5.$$

【点睛】用等面积法计算三角形的高是解题关键.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(2m-3, 1-2m)$ 在第四象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > \frac{3}{2}$

【解析】

【详解】解: $\because$ 点 $A(2m-3, 1-2m)$ 在第四象限,

$\therefore$ 点 A 的横坐标是正数, 纵坐标是负数,

$$\text{即} \begin{cases} 2m-3 > 0 \\ 1-2m < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } m > \frac{3}{2}.$$

8. 在平面直角坐标系中, 点 $A(2, 3)$, 点 $B(-2, -3)$. 则 AB 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】本题考查平面直角坐标系中两点间距离, 解题的关键是掌握勾股定理公式的应用.

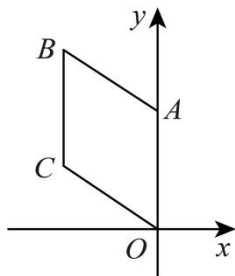
利用勾股定理进行求解即可.

【详解】解: 根据勾股定理得,

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

故答案为: $2\sqrt{13}$.

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴上. 若点 C 的坐标为 $(-3, 2)$, 则点 A 的坐标为_____.



【答案】 $(0, \sqrt{13})$

【解析】

【分析】利用勾股定理求得 OC 的长，再利用菱形的性质求得 $OA = OC = \sqrt{13}$ ，据此求解即可.

【详解】解：∵ 点 C 的坐标为 $(-3, 2)$,

$$\therefore OC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

∵ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore OA = OC = \sqrt{13},$$

$$\therefore A \text{ 点的坐标为 } (0, \sqrt{13}).$$

10. 过某个多边形 1 个顶点的所有对角线，将这个多边形分成 7 个三角形，则它的内角和是_____.

【答案】 1260° ## 1260 度

【解析】

【分析】根据过多边形一个顶点的所有对角线，将多边形分成 $(n-2)$ 个三角形，得出多边形的边数，再利用多边形的内角和公式计算即可.

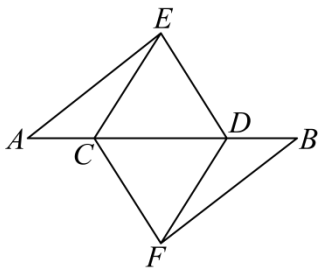
【详解】解：设这个多边形的边数为 n ,

$$\text{由题意得, } n - 2 = 7,$$

$$\text{解得, } n = 9,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和为 } (9 - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ.$$

11. 如图，点 A 、 B 在 $ECFD$ 的对角线 CD 所在的直线上且 $AD = BC$. 若 $\angle DBF = 35^\circ$ ，则 $\angle DAE =$ _____.



【答案】 35° ## 35 度

【解析】

【分析】利用平行四边形的性质证明 $\triangle ADE \cong \triangle BCF$ (SAS) 即可.

【详解】解：∵ $ECFD$ 中 $DE = CF, DE \parallel CF$,

$$\therefore \angle ADE = \angle BCF,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CBF = 35^\circ.$$

12. 已知菱形的周长为 20cm，一条对角线长为 6cm，则这个菱形的面积是_____ cm².

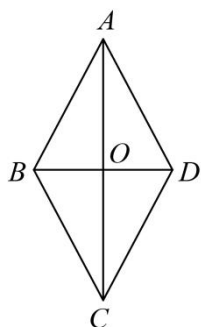
【答案】 24

【解析】

【分析】 题目主要考查菱形的性质及勾股定理解三角形，理解题意是解题关键.

根据菱形的性质，先求另一条对角线的长度，再运用菱形的面积等于对角线乘积的一半求解.

【详解】 解：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $BD = 6$.



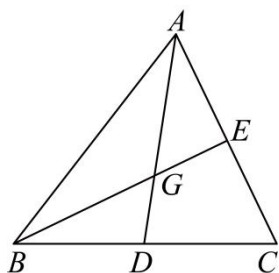
$$\therefore AB = 5, \quad BO = 3,$$

$$\therefore AO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \quad AC = 8.$$

$$\therefore \text{面积 } S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

故答案为： 24.

13. 如图，点 D ， E 分别是 BC ， AC 中点， AD 与 BE 交于点 G . 若 $BG = 6$ ， 则 $EG =$ _____.



【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了三角形重心的性质.

根据题意得到 G 点为 $\triangle ABC$ 的重心，再结合 $EG = \frac{1}{2}BG$ 计算即可.

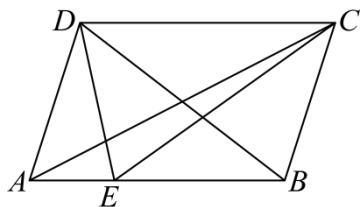
【详解】 解： $\because$ 点 D ， E 分别是 BC ， AC 中点， AD 与 BE 交于点 G ,

$\therefore G$ 点为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

故答案为：3.

14. 如图， $\square ABCD$ 中， E 是边 AB （不含端点）上任意一点，若 $S_{\triangle ADE} = 3$ ， $S_{\triangle EBC} = 5$ ，则 $S_{\triangle BDC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】8

【解析】

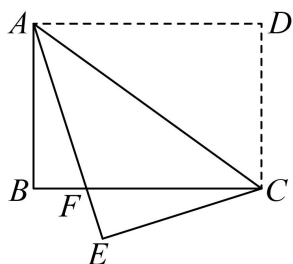
【分析】根据平行四边形的性质可得 $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EBC} = 5 + 3 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BDC} = S_{\triangle DEC} = 8.$$

15. 如图，矩形 $ABCD$ 沿 AC 折叠，使点 D 落在点 E 的位置， AE 与 BC 相交于点 F ，若 $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，则 BF 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】根据矩形与折叠的性质，证明 $\triangle ABF \cong \triangle CEF$ ，得出 $BF = EF$ ，设 $BF = EF = x$ ， $AF = 8 - x$ ，根据勾股定理建立等式，代入数值进行计算，即可作答.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD = 6, BC = AD = 8, \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

$\because$ 折叠，

$$\therefore CD = CE = 6, AE = AD = 8, \angle D = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = CE = 6, \angle B = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because \angle AFB = \angle CFE,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle CFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = EF,$$

$$\text{设 } BF = EF = x, \quad AF = 8 - x,$$

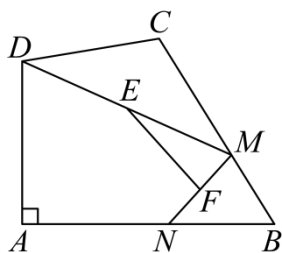
$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF^2 = AF^2 - AB^2,$$

$$\text{即 } x^2 = (8 - x)^2 - 6^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore BF \text{ 的长为 } \frac{7}{4}.$$

16. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, M 、 N 分别是边 BC 、 AB 上的动点 (含端点, 但点 M 不与点 B 重合), E 、 F 分别是线段 DM 、 MN 的中点, 则 EF 的最大值为_____.



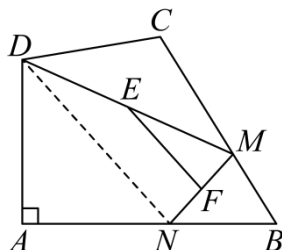
【答案】1

【解析】

【分析】本题考查中位线的性质、勾股定理, 熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

连接 DN , 根据中位线的性质得到 $EF = \frac{1}{2}DN$, 进而得到 DN 最大时, EF 最大, 根据勾股定理求出 DN 的最大值, 据此解答即可.

【详解】解: 如图, 连接 DN ,



$\because E$ 、 F 分别是线段 DM 、 MN 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DN,$$

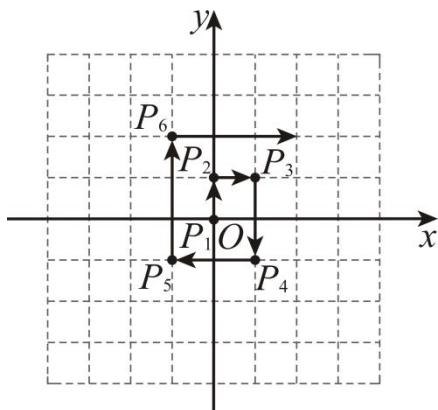
$\therefore DN$ 最大时, EF 最大,

∴当点 N 与 B 重合时, DN 最大, 此时 $DN = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 2$,

∴ $EF = 1$,

∴ EF 的最大值为 1.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 均在边长均为 1 个单位长度网格格点上, 其顺序按图中“→”方向排列, $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$, 根据这个规律, 点 P_{2026} 的坐标为_____.



【答案】 $(-506, 507)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角坐标系中的点的特征, 坐标系中点的规律, 由 $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$, 得下标为 4 的倍数的点在第四象限的角平分线上, 被 4 除余 1 的点在第三象限的角平分线上, 被 4 除余 2 的点在第二象限的角平分线上, 被 4 除余 3 的点在第一象限的角平分线上, 横坐标和纵坐标的绝对值都为下标除以 4 的商, 由 $2026 \div 4 = 506 \dots 2$, 所以 P_{2026} 的坐标在第二象限的角平分线上, 横坐标为 -506 , 纵坐标为 506 , 然后通过第二象限特点即可求解.

【详解】 解: ∵ $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$,

∴下标为 4 的倍数的点在第四象限的角平分线上, 被 4 除余 1 的点在第三象限的角平分线上, 被 4 除余 2 的点在第二象限的角平分线上, 被 4 除余 3 的点在第一象限的角平分线上, 横坐标和纵坐标的绝对值都为下标除以 4 的商,

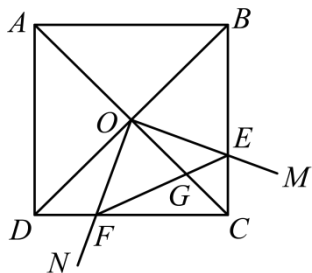
∴ $2026 \div 4 = 506 \dots 2$,

∴ P_{2026} 的坐标在第二象限的角平分线上, 横坐标为 -506 , 纵坐标为 507 ,

∴ P_{2026} 的坐标为 $(-506, 507)$,

故答案为: $(-506, 507)$.

18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 O 是对角线 AC 、 BD 的交点, 过点 O 作射线 OM 、 ON 分别交 BC 、 CD 于点 E 、 F , 且 $\angle EOF = 90^\circ$, OC 、 EF 交于点 G . 给出下列结论: ① $\triangle COE \cong \triangle DOF$; ② $\triangle OBE \cong \triangle OCF$; ③ 四边形 $CEOF$ 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$; ④ $DF^2 + BE^2 = EF^2$. 其中正确的有_____. (填序号)



【答案】①②③④

【解析】

【分析】利用正方形的性质, 三角形全等的判定和性质, 勾股定理, 推理判断即可.

【详解】解: $\because$ 正方形 $ABCD$, $\angle EOF = 90^\circ$,

$$\therefore OA = OB = OC = OD, \angle BOC = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\angle ODF = \angle OCD = \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DOF = 90^\circ - \angle COF = \angle COE, \quad \angle COF = 90^\circ - \angle COE = \angle BOE,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle DOF = \angle COE \\ OD = OC \\ \angle ODF = \angle OCE \end{cases}, \quad \begin{cases} \angle COF = \angle BOE \\ OC = OB \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle COE \cong \triangle DOF$ (ASA), $\triangle OBE \cong \triangle OCF$ (ASA), 故①②正确;

$$\therefore \triangle COE \cong \triangle DOF,$$

$$\therefore S_{\triangle COE} = S_{\triangle DOF},$$

$$\therefore S_{\triangle COE} + S_{\triangle COF} = S_{\triangle DOF} + S_{\triangle COF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CEOF} = S_{\triangle COD},$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore S_{\triangle COD} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CEOF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}, \quad \text{故③正确};$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore CF^2 + CE^2 = EF^2$,

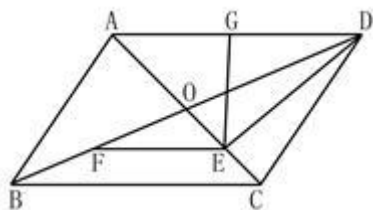
$\therefore CF = BE, DF = CE$,

$\therefore DF^2 + BE^2 = EF^2$, 故④正确;

则正确的结论有①②③④.

三、解答题 (本题共 7 小题, 共 52 分)

19. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BD=2AB$, AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 、 F 、 G 分别是 OC 、 OB 、 AD 的中点.



(1) 求证: $DE \perp OC$;

(2) 求证: $EG=EF$.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AC 与 BD 相交于点 O , 根据平行四边形的性质, 即可得 $BD=2OD$, $AB=CD$, $AD=BC$, 又由 $BD=2AB$, 可得 $\triangle ODC$ 是等腰三角形, 根据三线合一的性质, 即可证得 $DE \perp OC$;

(2) 由 $DE \perp OC$, 点 G 是 AD 的中点, 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可得 $EG=\frac{1}{2}AD$, 又由三角形中位线的性质, 求得 $EF=\frac{1}{2}BC$, 则可证得 $EG=EF$.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AC 与 BD 相交于点 O ,

$\therefore BD=2OD$, $AB=CD$, $AD=BC$.

$\therefore BD=2AB$,

$\therefore OD=AB=CD$.

$\therefore$ 点 E 是 OC 的中点,

$\therefore DE \perp OC$

【小问 2 详解】

$\because DE \perp OC$, 点 G 是 AD 的中点,

$$\therefore EG = \frac{1}{2} AD;$$

$\because$ 点 E 、 F 分别是 OC 、 OB 的中点.

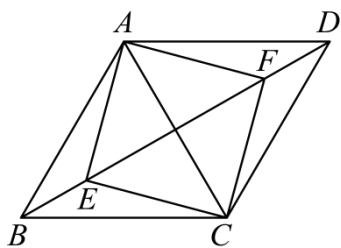
$$\therefore EF = \frac{1}{2} BC.$$

$$\because AD = BC,$$

$$\therefore EG = EF.$$

【点睛】此题考查了平行线的性质、直角三角形的性质、等腰三角形的判定与性质以及三角形中位线的性质. 此题综合性较强, 难度适中, 解题的关键是注意数形结合思想的应用.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, E , F 是对角线 BD 上的点, 且 $BE = DF$, 连接 AE , CF , AF , CE . 求证: 四边形 $AFCE$ 是菱形.



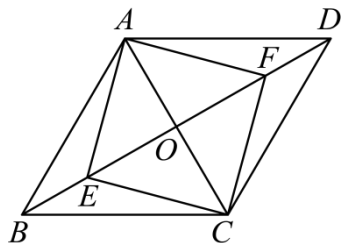
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了菱形的判定与性质以及平行四边形的判定与性质等知识, 熟练掌握菱形的判定与性质是解题的关键.

连接 AC , 交 BD 于点 O , 证明平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 得 $AC \perp BD$, $AO = CO$, $BO = DO$, 再证明 $EO = FO$, 则四边形 $AECF$ 是平行四边形, 然后由菱形的判定即可得出结论.

【详解】证明: 如图, 设 AC 交 BD 于点 O ,



$\because AB = AD$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $AO = CO$, $BO = DO$,

$\because BE = DF$,

$\therefore OB - BE = OD - DF$,

即 $EO = FO$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

又 $\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是菱形.

21. 已知, 四边形 $ABCD$ 为长方形, $AB = 8$, $BC = 10$, 点 E 由点 D 向 DA 运动, 点 F 由点 D 向 DC 运动. 将 CBF 沿 BF 折叠, 点 C 恰好落在点 E 处时, 求此时 BF 的长;

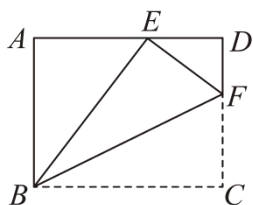


图 1

【答案】 $5\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据折叠可得 $CF = EF$, 在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 中利用勾股定理列方程求出 DF , 然后在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中利用勾股定理求解即可.

【详解】 解: 由折叠知, $BC = BE = 10$, $EF = CF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形,

$\therefore AD = BC = 10$, $\angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理得: $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

$\therefore ED = AD - AE = 10 - 6 = 4$,

设 $CF = x$, 则 $EF = x$,

$\therefore DF = DC - CF = 8 - x$,

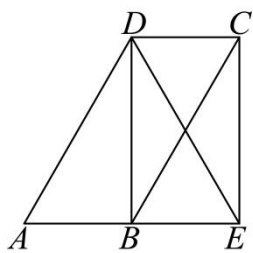
在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, 由勾股定理得: $DE^2 + DF^2 = EF^2$,

$\therefore 4^2 + (8 - x)^2 = x^2$, 解得 $x = 5$,

$\therefore CF = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, 由勾股定理得: $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

22. 如图, 已知 $\square ABCD$, 延长 AB 到 E , 使 $BE = AB$, 连接 BD , ED , EC , 若 $ED = AD$.



(1) 求证：四边形 $BECD$ 是矩形；

(2) 连接 AC ，若 $AD = 6$ ， $CD = 3$ ，求 AC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，又 $BE = CD$ 得四边形 $BECD$ 是平行四边形及 $AD = BC$ ，结合 $ED = AD$ 可得 $BC = ED$ ，由此可得平行四边形 $BECD$ 是矩形；

(2) 连接 AC ，由 (1) 得， $BE = CD$ ， $BE = AB$ ，所以 $AB = BE = 3$ ，则 $AE = 6$ ，又四边形 $BECD$ 是矩形，故有 $\angle ABD = \angle BEC = 90^\circ$ ， $BD = CE$ ，然后通过勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，

$\because BE = AB$ ，

$\therefore BE = CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形，

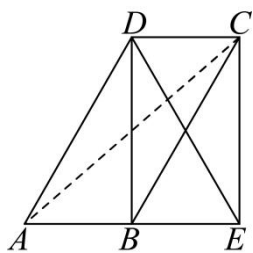
$\because AD = BC$ ， $AD = DE$ ，

$\therefore BC = DE$ ，

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是矩形；

【小问 2 详解】

解：如图，连接 AC ，



由 (1) 得， $BE = CD$ ， $BE = AB$ ，

$\therefore CD = 3$ ，

$$\therefore AB = BE = 3,$$

$$\therefore AE = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是矩形,

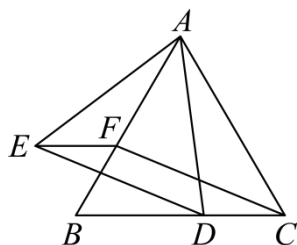
$$\therefore \angle ABD = \angle BEC = 90^\circ, \quad BD = CE,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore CE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{7}.$$

23. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 、 F 分别在线段 BC 、 AB 上, $\angle EFB = 60^\circ$, $EF = DC$, 连接 AD 、 CF 、 EA 、 ED .



(1) 求证: 四边形 $EFCD$ 是平行四边形;

(2) 连接 BE , 若 $BF = EF$, 求证: $AE = AD$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查等边三角形的判定和性质, 平行四边形的判定, 全等三角形的判定和性质.

(1) 根据等边三角形的性质, 通过内错角相等得到 $EF \parallel DC$, 继而得证四边形 $EFCD$ 是平行四边形.

(2) 通过证明 $\triangle EFB$ 是等边三角形, 得到 $EB = DC$, 继而证明 $\triangle AEB \cong \triangle ADC$ (SAS), 根据对应边相等得到 $AE = AD$.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because \angle EFB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EFB,$$

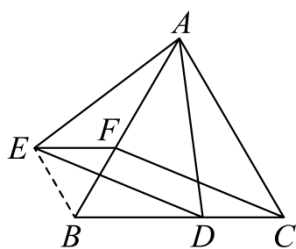
$$\therefore EF \parallel DC,$$

$$\because DC = EF,$$

∴ 四边形 $EFCD$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 BE ,



$$\because BF = EF, \quad \angle EFB = 60^\circ,$$

∴ $\triangle EFB$ 是等边三角形,

$$\therefore EB = EF, \quad \angle EBF = 60^\circ,$$

$$\because DC = EF,$$

$$\therefore EB = DC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ACB,$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} EB = DC \\ \angle EBA = \angle DCA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = AD.$$

24. 如图 1, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 连接 BD , 点 E 为线段 BD 上任意一点 (点 E 不与 B, D 重合),

过点 E 作 $HF \parallel AB$ 分别交 AD, BC 于点 H, F . 点 G 为 DE 的中点, 连接 HG .

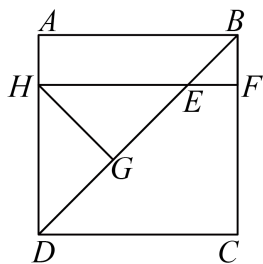


图1

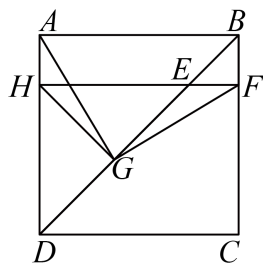


图2

(1) 若 $BF = 1$, 则 $BE =$ _____, $HG =$ _____;

(2) 如图 2, 连接 AG, FG . 求证: $AG = GF$ 且 $AG \perp GF$;

【答案】(1) $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等腰直角三角形的性质得出 $BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}$, $HG = \frac{\sqrt{2}}{2}DH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(2) 可证得 $\triangle AHG \cong \triangle FEG$, 从而 $\angle AGH = \angle FGE$, $AG = FG$, 进而得出结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = AB = 4, \angle A = \angle ABC = 90^\circ, \angle CBD = \angle ADE = 45^\circ,$$

$$\because HF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DHF = \angle A = 90^\circ, \angle BFH = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHF = \angle BFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABFH \text{ 是矩形}, BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = BF = 1,$$

$$\therefore DH = HE = AD - AH = 3,$$

$\because G$ 为 DE 的中点,

$$\therefore HG \perp DE,$$

$$\therefore HG = \frac{\sqrt{2}}{2}DH = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

【小问 2 详解】

证明: 在正方形 $ABCD$ 和矩形 $ABFH$ 中,

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ, \angle BFE = \angle AHF = 90^\circ, AH = BF,$$

$$\therefore \angle FEB = 45^\circ = \angle BEF,$$

$$\therefore \angle FEG = 135^\circ, EF = BF = AH,$$

$$\because HG \perp DE, HG = \frac{1}{2}DE = EG,$$

$$\therefore \angle BGH = 90^\circ, \angle EHG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle AHF + \angle EHG = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AHG = \angle FEG,$$

$$\text{又} \because AH = EF, HG = EG,$$

$\therefore \triangle AHG \cong \triangle FEG$ (SAS),
 $\therefore \angle AGH = \angle FGE, AG = FG,$
 $\therefore \angle AGF = \angle BGH = 90^\circ,$
 $\therefore AG \perp FG.$

25. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 的坐标分别是 $A(0, \sqrt{3})$ 和 $B(1, 0)$, 连接 AB , 以线段 AB 为边向右侧作菱形 $ABCD$, 且 $\angle ACB = 30^\circ$, 点 C 在 x 轴上.

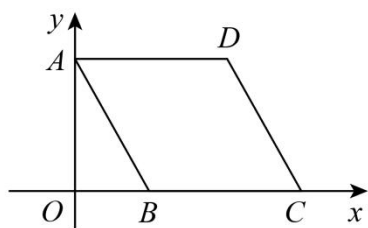


图1

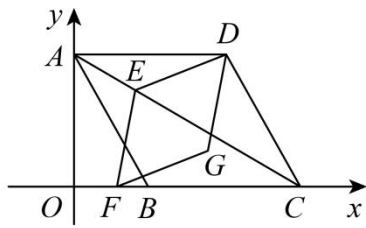


图2

- (1) 填空: 点 D 的坐标为_____, $\angle ABC =$ _____度.
- (2) 连接 AC , 点 E 是线段 AC 上一动点, 点 F 在 x 轴上, 且 $\angle DEF = \angle ABC$. 过点 D 作 EF 的平行线, 过点 F 作 DE 的平行线, 两线相交于点 G .
- ①如图 2, 当 $CE = CF$ 时, 求 AE 的长度;
- ②求证: 四边形 $DEFG$ 是菱形.

【答案】 (1) $(2, \sqrt{3})$, 120

(2) ① $\sqrt{3} - 1$ ② 见解析

【解析】

【分析】 本题是四边形的综合题, 考查了菱形的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 勾股定理, 30° 所对的直角边等于斜边的一半, 等腰直角三角形的判定与性质, 熟练掌握以上知识点并数形结合分类讨论是解题的关键.

(1) 利用勾股定理, 可求得 AB 的长度, 从而知道菱形的边长, 再利用菱形的性质, 等腰三角形的性质, 以及三角形的内角和定理, 即可求得点 D 的坐标和 $\angle ABC$ 的度数;

(2) ①利用等腰三角形“三线合一”的性质, 勾股定理, 30° 所对的直角边等于斜边的一半计算, 即可得出答案;

②连接 BE , 设 AB 交 EF 于点 H , 先利用菱形的性质, 求得 $\angle DAC = \angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$, 接着利用外角得 $\angle DEF = 60^\circ + \angle ADE + \angle AHE$, 从而推出 $\angle BHF + \angle ADE = 60^\circ$, 接着证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADE$, 得到 $BE = DE$, $\angle ADE = \angle ABE$, 接着证明 $\angle BHF + \angle ADE = 60^\circ$, 推出 $\angle BFG = \angle ABE$, 从而知道 $\angle EFB = \angle EBF$, $EF = BE = ED$, 借助 $ED \parallel FG$, $EF \parallel DG$, 可得到四边形 $EFGD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle EFB = \angle EBF ,$$

$$\therefore EF = EB ,$$

$$\therefore EF = ED ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGD$ 是菱形.