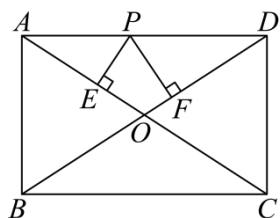


2026 年华育八下数学打卡提高版 3

一、单选题

1. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=4$, P 是 AD 上一个动点, $PE \perp AC$ 于 E , $PF \perp BD$ 于 F , 则 $PE+PF$ 的值为 ()



- A. 2.3 B. 2.4 C. 2.5 D. 2.6

【答案】 B

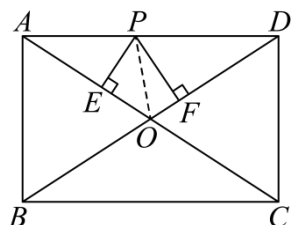
【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 勾股定理. 设 AC, BD 的交点为 O , 根据勾股定理, 得到 $AC=BD=5$,

继而得到 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} AB \cdot AD = 3$, $OA=OD=\frac{5}{2}$, 根据 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD}$, 解答即可.

【详解】 解: 设 AC, BD 的交点为 O ,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=4$,



$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$,

$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} AB \cdot AD = 3$,

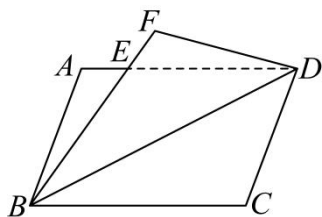
$\therefore OA = OD = \frac{5}{2}$, $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD}$,

$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot PE + \frac{1}{2} OD \cdot PF = 3$,

$\therefore PE + PF = 2.4$,

故选：B.

2. 如图，将 $\square ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使点 C 落在点 F 处， BF 交 AD 于点 E ．若 $\square ABCD$ 的周长为 12，则 $\triangle ABE$ 的周长是（ ）



- A. 3 B. 6 C. 8 D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，折叠的性质，图形的周长，熟练掌握性质是解题的关键．根据平行四边形的性质，得 $\angle EDB = \angle DBC$ ，结合折叠的性质，得 $\angle EBD = \angle DBC$ ，继而证明 $ED = EB$ ，根据图形的周长定义计算即可．

【详解】解： $\because \square ABCD$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EDB = \angle DBC$ ，

根据折叠的性质，得 $\angle EBD = \angle DBC$ ，

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$ ，

$\therefore ED = EB$ ，

又 $\triangle ABE$ 的周长是 $AB + AE + EB$ ，

故 $\triangle ABE$ 的周长是 $AB + AE + ED = AB + AD$ ，

$\because \square ABCD$ 的周长为 12，

$\therefore AB + AD = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ，

故 $\triangle ABE$ 的周长是 6，

故选：B.

3. 用对折的方法证明一个四边形是正方形，则对折次数最少是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】正方形需要同时满足“是菱形（四边相等、对角线垂直）”和“是矩形（四个角为直角、对角线

相等)”，所以我们需要通过对折来分别验证这两类性质.

【详解】解：A、对折1次，只能验证一组对边相等或一条对角线对称，无法同时验证菱形和矩形的核心性质，不符合题意；

B、第一次沿一组对边中点的连线对折，若两部分完全重合，则证明该四边形是矩形；第二次再沿一条对角线对折，若两部分完全重合，则证明这个矩形的邻边相等，因此是正方形。故最少需要2次，符合题意；

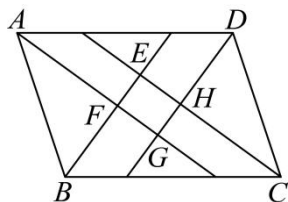
C、对折3次虽然也能证明，但不是最少次数，不符合题意；

D、对折4次次数过多，不是最少次数，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了正方形的判定、轴对称的性质。解题关键是理解对折操作所对应的几何性质，明确正方形需要同时满足菱形和矩形的判定条件.

4. 如图， $\square ABCD$ 四个内角的平分线两两相交，构成四边形 $EFGH$ ，则四边形 $EFGH$ 的形状是 ()



A. 任意四边形

B. 正方形

C. 矩形

D. 平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质，矩形的判定，关键是掌握有三个角是直角的四边形是矩形.

由平行线的性质推出 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ ，由角平分线定义得到

$\angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ$ ，结合对顶角相等得到 $\angle EFG = \angle AFB = 90^\circ$ ，同理可得，

$\angle FGH = \angle EHG = 90^\circ$ ，进而可证明四边形 $EFGH$ 是矩形.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.

$\because AF$ ， BF 分别平分 $\angle DAB$ ， $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EFG = \angle AFB = 90^\circ$.

同理可得， $\angle FGH = \angle EHG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

故选：C.

二、填空题

5. 如果一个多边形的每一个内角都相等, 且每一个内角都大于 120° , 那么这个多边形的边数最少为_____.

【答案】7

【解析】

【分析】利用多边形外角和定理, 结合内角与相邻外角的互补关系列不等式求解, 即可得到边数的最小值.

【详解】解: 设该多边形的边数为 n , n 为不小于3的正整数,

因为多边形的每一个内角都相等, 且每一个内角都大于 120° , 多边形的内角与相邻外角互为邻补角, 因此每个外角都小于 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

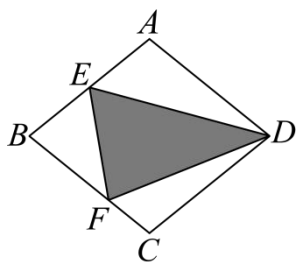
根据多边形外角和定理, 任意多边形的外角和为 360° , 可得不等式,

$$\frac{360}{n} < 60,$$

解得 $n > 6$,

因为 n 为正整数, 所以 n 的最小值为7.

6. 如图, 菱形 $ABCD$ 的面积为24, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 BC 上的动点. 若 $\triangle BEF$ 的面积为4, 则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】10

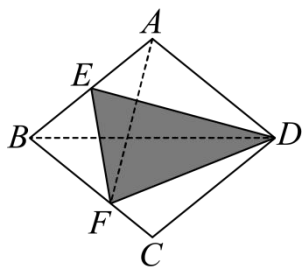
【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质, 三角形中线的性质, 利用菱形的性质、三角形中线的性质求出 $S_{\triangle ADE} = 6$,

$S_{\triangle ABF} = 8$, 根据 $\triangle ABF$ 和菱形的面积求出 $\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{BF}{CF} = 2$, 则可求出 $\triangle CDF$ 的面积, 然后利用

$S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF}$ 求解即可.

【详解】解: 连接 AF 、 BD ,



∵ 菱形 $ABCD$ 的面积为 24, 点 E 是 AB 的中点, $\triangle BEF$ 的面积为 4,

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} S_{\text{菱形}ABCD} = 6, \quad S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle BEF} = 8,$$

设菱形 $ABCD$ 中 BC 边上的高为 h ,

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\text{菱形}ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{BC \cdot h}, \quad \text{即 } \frac{8}{24} = \frac{\frac{1}{2} BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = 2,$$

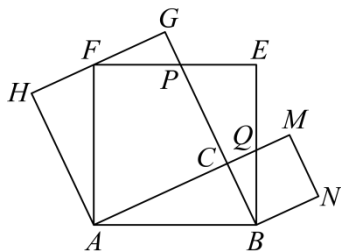
$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{\frac{1}{2} CF \cdot h} = \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = 4,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF} = 10,$$

故答案为: 10.

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以其三边为边在 AB 的同侧作三个正方形, 点 F 在 GH 上, CG 与 EF 交于点 P , CM 与 BE 交于点 Q . 若 $FG = 1$, $HF = 3$, 则四边形 $PCQE$ 的面积是 ____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 三角形的面积,

证明 $\triangle FAH \cong \triangle BAC$ (SAS), 得出 $BC = HF = 3$, 证明 $\triangle AFH \sim \triangle FPG \sim \triangle BQC$, 得出

$\frac{BQ}{AF} = \frac{BC}{AH} = \frac{CQ}{HF}, \frac{PG}{HF} = \frac{FG}{AH} = \frac{FP}{AF}$, 求出 $GP = \frac{3}{4}, FP = \frac{5}{4}, CQ = \frac{9}{4}, BQ = \frac{15}{4}$, 则可得出答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABEF$ 、四边形 $ACGH$ 、四边形 $BCMN$ 都是正方形,

$\therefore AB = AF, AC = AH = HF + FG = 4, \angle CAH = \angle BAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle FAH = \angle BAC = 90^\circ - \angle CAF$,

$\therefore \triangle FAH \cong \triangle BAC$ (SAS),

$\therefore BC = HF = 3$,

$\therefore \angle H = \angle G = \angle AFE = \angle MCB = \angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore \angle HFA + \angle GFP = \angle GFP + \angle GPF = 90^\circ, \angle ABC + \angle CBQ = \angle CBQ + \angle CQB = 90^\circ$,

$\therefore \angle HFA = \angle GPF, \angle ABC = \angle CQB$,

$\therefore \triangle AFH \sim \triangle FPG \sim \triangle BQC$,

$\therefore \frac{BQ}{AF} = \frac{BC}{AH} = \frac{CQ}{HF}, \frac{PG}{HF} = \frac{FG}{AH} = \frac{FP}{AF}$,

$\therefore AH = 4, HF = 3, \angle H = 90^\circ$,

$\therefore AF = 5$,

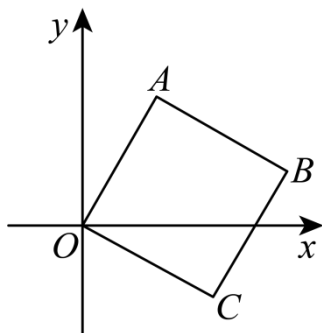
$\therefore GP = \frac{3}{4}, FP = \frac{5}{4}, CQ = \frac{9}{4}, BQ = \frac{15}{4}$,

$\therefore CP = GC - GP = \frac{13}{4}, PE = EF - FP = \frac{15}{4}, EQ = BE - BQ = \frac{5}{4}$,

$\therefore S_{\text{四边形}PCQE} = S_{\triangle PCQ} + S_{\triangle PEQ} = \frac{1}{2}PC \cdot CQ + \frac{1}{2}PE \cdot EQ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{4} \times \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times \frac{5}{4} = 6$.

故答案为: 6.

8. 如图, 将边长为 3 的正方形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中, O 是原点, 点 A 的横坐标为 1, 则点 C 的坐标为_____.

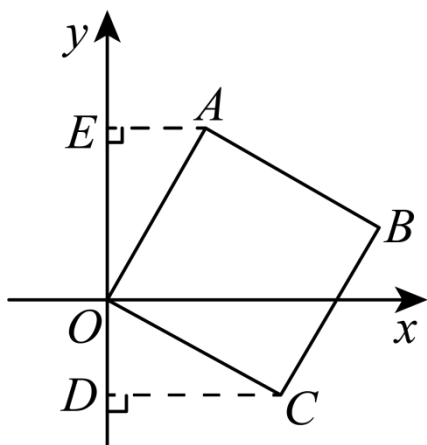


【答案】 $(2\sqrt{2}, -1)$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质以及勾股定理. 首先过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D , 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E , 证得 $\triangle AOE \cong \triangle OCD$ (AAS), 则可得 $OD = AE = 1$, $CD = OE = 2\sqrt{2}$, 继而求得答案.

【详解】 解: 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D , 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E ,



则 $\angle ODC = \angle AEO = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCD + \angle COD = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形,

$\therefore OC = OA$, $\angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle COD + \angle AOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCD = \angle AOE$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle OCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle ODC \\ \angle AOE = \angle OCD, \\ OC = OA \end{cases}$$

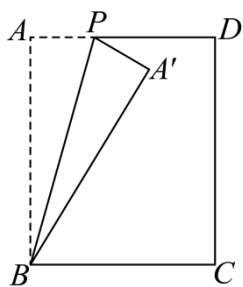
$\therefore \triangle AOE \cong \triangle OCD$ (AAS),

$\therefore OD = AE = 1$, $CD = OE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为: $(2\sqrt{2}, -1)$.

故答案为: $(2\sqrt{2}, -1)$.

9. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 4$, 点 P 在边 AD 上运动, 连接 BP , 将 $\triangle ABP$ 沿 BP 折叠, 点 A 落在点 A' 处, 当 $\triangle A'DC$ 为等腰三角形时, AP 的长为_____.



【答案】 $18-12\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的定义，矩形与折叠问题，勾股定理；根据 $\triangle A'DC$ 为等腰三角形，分三种情况进行讨论：① $A'D = A'C$ ，② $A'D = DC$ ，③ $CA' = CD$ ，分别求得 AP 的长，并判断是否符合题意.

【详解】 解： $\because$ 将 $\triangle ABP$ 沿 BP 折叠，点 A 落在点 A' 处，

$$\therefore AB = A'B,$$

$$\because \text{矩形 } ABCD \text{ 中, } AB = 6, BC = 4,$$

$$\therefore AD = BC = 4, CD = AB = 6$$

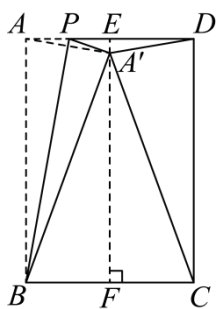
$$\therefore A'B = 6$$

①如图，当 $CD = A'C$ 时，

$$\because CD = 6, A'B = 6$$

$$\therefore A'C = A'B$$

过 A' 作 $EF \perp BC$ ，交 AD 于 E ，交 BC 于 F ，则 EF 垂直平分 CD ， EF 垂直平分 AB ，



在 $\text{Rt}\triangle A'BF$ 中， $BF = \frac{1}{2}BC = 2, A'B = AB = 6$

$$\therefore A'F = \sqrt{A'B^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because EF = AB = 6$$

$$\therefore A'E = EF - A'F = 6 - 4\sqrt{2}$$

设 $AP = x$, 则 $PA' = x$, $PE = AE - AP = \frac{1}{2}AD - AP = 2 - x$

在 $\text{Rt}\triangle PA'E$ 中, $PA'^2 = A'E^2 + PE^2$

$$\therefore x^2 = (6 - 4\sqrt{2})^2 + (2 - x)^2$$

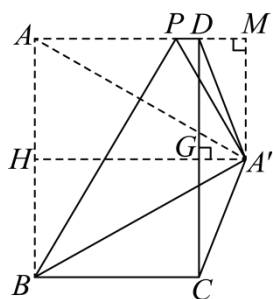
解得: $x = 18 - 12\sqrt{2}$

②当 $A'D = DC = 6$ 时,

$$\because PD + PA' = PD + PA = AD = 4,$$

在 $\triangle PA'D$ 中, $PD + PA' > A'D$, 不合题意,

③当 $A'D = A'C$ 时, 如图, 过点 A' 作 $A'G \perp CD$ 于点 G , 交 AB 于点 H , 过点 A' 作 $A'M \perp AD$ 于点 M , 则四边形 $A'GDM$ 是矩形,



$$\therefore DG = \frac{1}{2}DC = 3, \quad HB = \frac{1}{2}AB = 3$$

$$\because A'B = AB = 6,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle A'HB \text{ 中, } A'H = \sqrt{A'B^2 - HB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore DM = A'G = A'H - HG = 3\sqrt{3} - 4$$

$$\text{设 } AP = x, \text{ 则 } PA' = x, \quad PD = AD - AP = 4 - x, \text{ 则 } PM = 4 - x + 3\sqrt{3} - 4 = 3\sqrt{3} - x$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle A'PM \text{ 中, } A'P^2 = PM^2 + A'M^2,$$

$$\therefore x^2 = (3\sqrt{3} - x)^2 + 3^2$$

解得: $x = 2\sqrt{3}$

综上所述, 当 $\triangle A'DC$ 为等腰三角形时, AP 的长为 $18 - 12\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3}$

故答案为: $18 - 12\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3}$.

10. 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 且 $AE = 1$, 点 F 在边 AB 上. 当以点 C 、 E 、 F 为顶点的三角形是直角三角形时, AF 的长为_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$ 或 2

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，勾股定理，分类讨论是解题的关键．分别计算当 $\angle EFC$ 、 $\angle FEC$ 或 $\angle FCE$ 为直角时 AF 的长度．

【详解】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

$$\therefore AB = AD = DC = BC = 4,$$

$\because$ 点 E 在边 AD 上，且 $AE = 1$ ，

$$\therefore DE = AD - AE = 3,$$

令 $AF = x$ ，则 $BF = 4 - x$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中，} \angle A = 90^\circ, EF^2 = AE^2 + AF^2 = 1 + x^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCF \text{ 中，} \angle B = 90^\circ, CF^2 = BF^2 + BC^2 = (4 - x)^2 + 4^2,$$

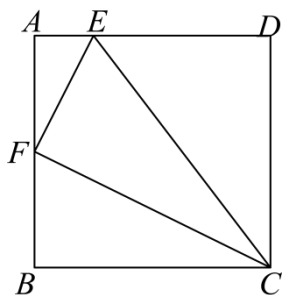
$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中，} \angle D = 90^\circ, CE^2 = DE^2 + DC^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$

$$\text{当 } \angle EFC = 90^\circ \text{ 时，} CE^2 = EF^2 + CF^2,$$

$$25 = 1 + x^2 + (4 - x)^2 + 4^2,$$

解得， $x = 2$ ，

$$\therefore AF = 2;$$

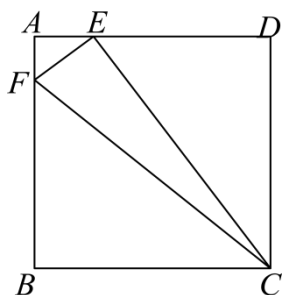


$$\text{当 } \angle FEC = 90^\circ \text{ 时，} CF^2 = EF^2 + CE^2,$$

$$(4 - x)^2 + 4^2 = 1 + x^2 + 25,$$

$$\text{解得，} x = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AF = \frac{3}{4};$$



当 $\angle FCE = 90^\circ$ 时, $EF^2 = CF^2 + CE^2$,

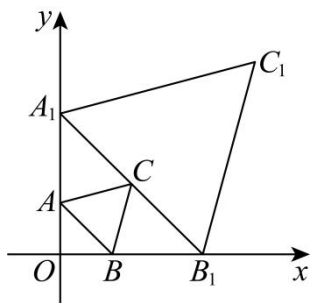
$$1 + x^2 = (4 - x)^2 + 4^2 + 25,$$

解得, $x = 7 > 4$ (不合题意, 舍去)

综上所述, AF 的长为 $\frac{3}{4}$ 或 2.

故答案为: $\frac{3}{4}$ 或 2.

11. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $A(0,1)$ 和点 $B(1,0)$, 连接 AB , 以 AB 为边作等边三角形 ABC , 顶点为 C , 过点 C 作 $A_1B_1 \parallel AB$, 分别交 y 轴、 x 轴于点 A_1 、 B_1 , 再以 A_1B_1 为边作等边三角形 $A_1B_1C_1$,, 逐次作等边三角形, 则第 2017 个等边三角形的顶点 C_{2016} 坐标是_____.



【答案】 $\left[\frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2}, \frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2} \right]$

【解析】

【分析】 连接 OC_1 , 设 AB 与 OC 相交于点 E , 作 $CF \perp x$ 轴于点 F , 根据勾股定理求出 $AB = \sqrt{2}$, 根据等边三角形的性质得出 $AC = BC = AB = \sqrt{2}$, 根据勾股定理求出 $EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$, 求出 $OC = EC + OE = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 证明 $\triangle OCF$ 等腰直角三角形, 得出

$$\therefore \angle BOE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OCF$ 等腰直角三角形,

$$\therefore OF = CF = \frac{\sqrt{2}}{2} OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标是 } \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\therefore A_1B_1 \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OA_1B_1 = \angle OAB = 45^\circ, \quad \angle OB_1A_1 = \angle OBA = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OA_1B_1$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore OA_1 = OB_1, \quad \angle A_1B_1O = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COB_1 = \angle A_1B_1O = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OCB_1$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore CF \perp OB_1,$$

$$\therefore OB_1 = 2OF = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2} = 1+\sqrt{3},$$

$$\therefore A_1B_1 = \sqrt{2}OB_1 = \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}),$$

同理可得: $OC = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) (1+\sqrt{3})$, 点 C_1 坐标为:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) (1+\sqrt{3}), \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) (1+\sqrt{3}) \right],$$

$$\text{即 } C_1 \left[\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}, \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} \right],$$

...,

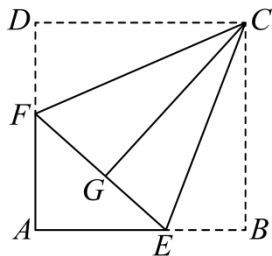
$$\text{则 } C_{2016} \text{ 的坐标是 } \left[\frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2}, \frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2} \right].$$

故答案为: $\left[\frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2}, \frac{(1+\sqrt{3})^{2017}}{2} \right]$.

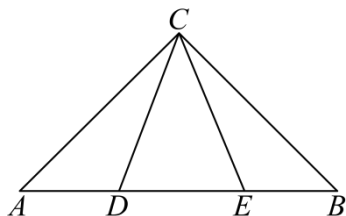
【点睛】 本题主要考查了坐标规律探索，等边三角形的性质，等腰直角的判定和性质，勾股定理，线段垂直平分线的判定和性质，解题的关键是求出点 C 和 C_1 的坐标，找出一规律.

三、解答题

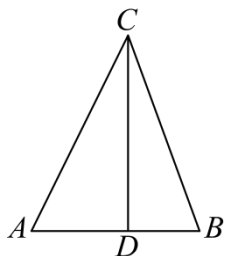
12. 【模型建立】 (1) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是边 AB, AD 上的点，连接 CE, CF ， $\angle ECF = 45^\circ$ ，连接 EF ，探究线段 DF, EF, BE 之间的数量关系. 小明发现可以将 $\triangle CBE$ 沿 CE 折叠， $\triangle CDF$ 沿 CF 折叠， CB 和 CD 恰好重合在 CG 上，进而利用折叠的性质来证明此问题. 请你根据小明的解法探究 DF, EF, BE 之间的数量关系；



【类比探究】 (2) 如图，在等腰直角 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D, E 在 AB 边上，连接 CD, CE ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，探究线段 AD, DE, EB 之间的数量关系；



【拓展迁移】 (3) 如图，在 ABC 中， $CD \perp AB$ 于点 D ，若 $AD = 6$ ， $DB = 4$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ，求 ABC 的面积.



【答案】 (1) $EF = DF + BE$ ，理由见解析 (2) $DE^2 = BE^2 + AD^2$ ，理由见解析 (3) $S_{\triangle ABC} = 60$

【解析】

【分析】 (1) $EF = DF + BE$ ，由折叠得到， $\triangle CBE \cong \triangle CGE$ ， $\triangle CDF \cong \triangle CGF$ ，从而推出 $BE = GE$ ，

$DF = GF$, $\angle CGE = \angle B = 90^\circ$, $\angle CGF = \angle D = 90^\circ$, 得到 $\angle CGE + \angle CGF = 180^\circ$, 推出点 E, G, F 三点共线, 即可说明;

(2) $DE^2 = BE^2 + AD^2$, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF , 由旋转可得, $\triangle ACD \cong \triangle BCF$, 得到 $AD = BF$, $CD = CF$, $\angle ACD = \angle BCF$, $\angle A = \angle CBF = 45^\circ$, 推出 $\angle DCE = \angle ECF$, 证得 $\triangle DCE \cong \triangle FCE$ (SAS), 得到 $DE = EF$, 再利用勾股定理即可说明;

(3) 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折得到 $\triangle ACF$, 将 $\triangle BCD$ 沿 BC 翻折得到 $\triangle BCE$, 延长 FA, BE 交于点 H , 得到 $AD = AF = 6$, $CD = CF$, $\angle AFC = 90^\circ$, $BD = BE = 4$, $CD = CE$, $\angle BEC = 90^\circ$, 从而可得 $\angle AFC = \angle BEC = \angle ECF = 90^\circ$, $CE = CF$, 可证明四边形 $ECFH$ 是正方形, 设 $CD = x$, 则 $AH = x - 6$, $BH = x - 4$, $AB = AD + DB = 10$, 利用勾股定理, 可得到 $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 = 10^2$, 解得 $x_1 = 12$, $x_2 = -2$ (舍去), 得到 $CD = 12$, 即可求解.

【详解】(1) 解: $EF = DF + BE$,

理由: 由折叠可得, $\triangle CBE \cong \triangle CGE$, $\triangle CBF \cong \triangle CGF$,

$\therefore BE = GE$, $DF = GF$, $\angle CGE = \angle B = 90^\circ$, $\angle CGF = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle CGE + \angle CGF = 180^\circ$,

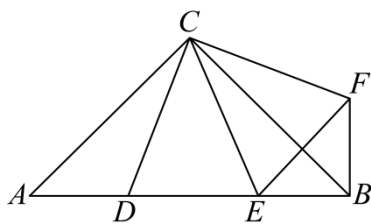
$\therefore$ 点 E, G, F 三点共线,

$\therefore EF = GE + GF$,

$\therefore EF = DF + BE$;

(2) 解: $DE^2 = BE^2 + AD^2$, 理由:

如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF ,



由旋转可得, $\triangle ACD \cong \triangle BCF$,

$\therefore AD = BF$, $CD = CF$, $\angle ACD = \angle BCF$, $\angle A = \angle CBF = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DCE = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 45^\circ$,

$\therefore \angle BCF + \angle BCE = 45^\circ$, 即 $\angle ECF = 45^\circ$,

$\therefore \angle DCE = \angle ECF$,

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} CE = CE \\ \angle DCE = \angle ECF, \\ CD = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE \text{ (SAS)},$$

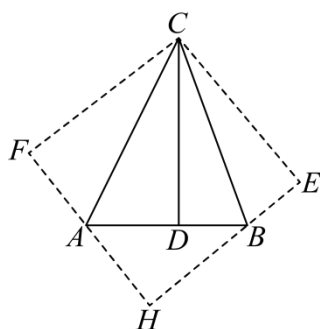
$$\therefore DE = EF,$$

$$\because \angle EBF = \angle ABC + \angle CBF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EBF \text{ 中, } EF^2 = BE^2 + BF^2,$$

$$\therefore DE^2 = BE^2 + AD^2;$$

(3) 解: 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折得到 $\triangle ACF$, 将 $\triangle BCD$ 沿 BC 翻折得到 $\triangle BCE$, 延长 FA , BE 交于点 H ,



$$\therefore AD = AF = 6, \quad CD = CF, \quad \angle AFC = 90^\circ,$$

$$BD = BE = 4, \quad CD = CE, \quad \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = 2\angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle BEC = \angle ECF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ECFH$ 是正方形,

$$\therefore FH = EH = CF = CE = CD,$$

设 $CD = x$, 则 $AH = x - 6$, $BH = x - 4$, $AB = AD + DB = 10$,

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 由勾股定理, 得 $(x-6)^2 + (x-4)^2 = 10^2$,

$$\text{整理得 } x^2 - 10x - 24 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 12, \quad x_2 = -2 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore CD = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60.$$

13. 已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 a ， P 是边 CD 上一个动点不与点 C 、点 D 重合， $CP = b$ ，以 CP 为一边在正方形 $ABCD$ 外作正方形 $PCEF$ ，连接 BF 、 DF 。

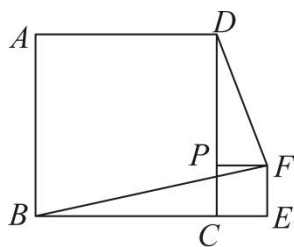


图1

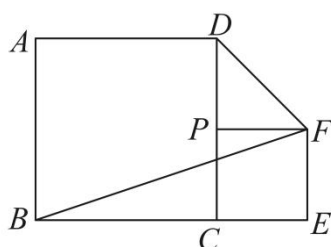


图2

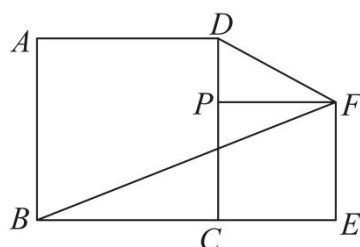


图3

观察计算：(1) 如图 1，当 $a = 4$ ， $b = 1$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为_____；

(2) 如图 2，当 $a = 4$ ， $b = 2$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为_____；

(3) 如图 3，当 $a = m$ ， $b = n$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为_____；

探索发现：(4) 根据上述计算的结果，你认为四边形 $ABFD$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之间有怎样的关系？

【答案】 (1) 16；(2) 16；(3) m^2 ；(4) 四边形 $ABFD$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积相等

【解析】

【分析】 本题考查正方形的性质。

(1) 用大正方形的面积加上梯形 $DCEF$ 的面积再减去直角三角形 BEF 的面积，进行求解即可；

(2) 用大正方形的面积加上梯形 $DCEF$ 的面积再减去直角三角形 BEF 的面积，进行求解即可；

(3) 用大正方形的面积加上梯形 $DCEF$ 的面积再减去直角三角形 BEF 的面积，进行求解即可；

(4) 求出大正方形的面积，进行判断即可。

【详解】 解：(1) 四边形 $ABFD$ 的面积 $= 4^2 + \frac{1}{2}(4+1) \times 1 - \frac{1}{2}(4+1) \times 1 = 16$ ；

故答案为：16；

(2) 四边形 $ABFD$ 的面积 $= 4^2 + \frac{1}{2}(4+2) \times 2 - \frac{1}{2}(4+2) \times 2 = 16$ ；

故答案为：16；

(3) 四边形 $ABFD$ 的面积 $= m^2 + \frac{1}{2}(m+n) \cdot n - \frac{1}{2}(m+n) \cdot n = m^2$ ；

故答案为： m^2 ；

(4) 由上可知，四边形 $ABFD$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积；

四边形 $ABFD$ 的面积 $= a^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot b - \frac{1}{2}(a+b) \cdot b = a^2$;

正方形 $ABCD$ 的面积 $= a^2$;

故四边形 $ABFD$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积.

14. 物体重心的位置对于物体保持平衡、运动和稳定的状态至关重要. 均质等厚的板材 (可抽象为平面图形) 的重心位置可通过分割法计算, 即将板材分解为若干个简单规则图形 (如矩形、三角形、圆形等), 分别求出各简单图形的重心坐标和面积, 再计算组合图形的重心.

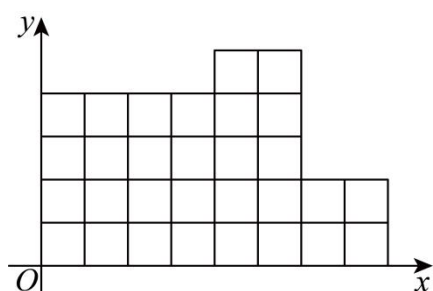
根据以下素材, 探索完成任务.

素材一	图形	重心	说明
	长方形	几何中心	对角线的交点
	三角形	三条中线交点	若顶点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 则中线交点坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$
	圆	几何中心	圆心
素材二	建立平面直角坐标系确定重心位置公式的步骤: 1. 建立坐标系: 根据图形特点建立平面直角坐标系. 2. 分割图形: 将平面组合图形分割成几个简单平面图形, 确定每个简单图形的面积 s_i . 3. 确定这几个简单图形重心坐标: 求出每个简单图形重心在已建立坐标系中的坐标 (x_i, y_i) . 4. 代入公式计算: 把所有简单图形的重心坐标代入公式, 计算出组合图形重心坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$, 其中 $\bar{x} = \frac{x_1s_1 + x_2s_2 + \cdots + x_ns_n}{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}, \bar{y} = \frac{y_1s_1 + y_2s_2 + \cdots + y_ns_n}{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}.$		
素材三	负面积法 (挖空图形): 若组合图形包含挖空部分 (如长方形中挖去圆形), 可将挖空部分视为“负面积”, 重心公式调整为 $(\bar{x}, \bar{y})$: 其中		

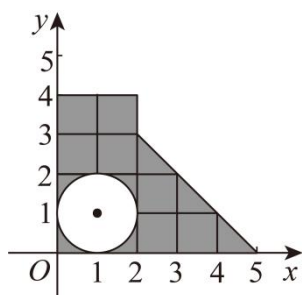
$$\bar{x} = \frac{x_{\text{整体}}S_{\text{整体}} - x_{\text{挖空}}S_{\text{挖空}}}{S_{\text{整体}} - S_{\text{挖空}}}, \quad \bar{y} = \frac{y_{\text{整体}}S_{\text{整体}} - y_{\text{挖空}}S_{\text{挖空}}}{S_{\text{整体}} - S_{\text{挖空}}}.$$

任务 1: 已知一块均匀梯形薄板, 将其分割为一个矩形和一个直角三角形. 矩形重心坐标为 $(2, 3)$, 直角三角形重心坐标为 $(5, 2)$, 若矩形面积为 8, 三角形面积为 4, 求梯形薄板的重心坐标.

任务 2: 已知一块均匀薄板, 由 30 块边长为 1cm 的小正方形组成, 求这块均匀薄板的重心坐标. (x 轴、y 轴 1 个单位长度表示 1cm)



任务 3: 阴影部分图形的重心坐标是____; (π 取 3)



【答案】(1) $\left(3, \frac{8}{3}\right)$; (2) $\left(\frac{11}{3}, \frac{61}{30}\right)$; (3) $\left(\frac{37}{19}, \frac{35}{19}\right)$

【解析】

【分析】本题主要考查了坐标与图形, 正确理解各个图形的重心坐标计算公式是解题的关键.

任务 1: 根据题干所给的公式直接代入计算求解即可;

任务 2: 先分别求出矩形 $OCDE$ 、矩形 $EFGH$ 、矩形 $HIJK$ 重心坐标及面积, 代入公式计算即可;

任务 3: 分别求出正方形 $ABCD$, 正方形 $ABFO$, $\triangle EFG$ 的面积和重心坐标, 再求出空心圆的面积和坐标, 进而求出正方形 $ABFO$ (含挖空) 的重心坐标, 再根据题干所给公式计算求解即可.

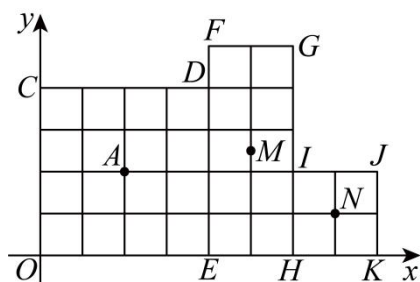
【详解】解: 任务 1: $\because$ 矩形重心坐标为 $(2, 3)$, 矩形面积为 $s_1 = 8$, 直角三角形重心坐标为 $(5, 2)$, 三角形面积为 $s_2 = 4$,

$$\bar{x} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{s_1 + s_2} = \frac{2 \times 8 + 5 \times 4}{8 + 4} = 3,$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2}{s_1 + s_2} = \frac{3 \times 8 + 2 \times 4}{8 + 4} = \frac{8}{3},$$

∴ 梯形薄板的重心坐标为 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$;

任务 2: 如下图,



∴ 矩形 $OCDE$ 重心坐标为 $A\left(\frac{0+4}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 即 $A(2,2)$, 面积为 $s_1 = 4 \times 4 = 16$,

矩形 $EFGH$ 重心坐标为 $M\left(\frac{6+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$, 即 $M\left(5, \frac{5}{2}\right)$, 面积为 $s_2 = 2 \times 5 = 10$,

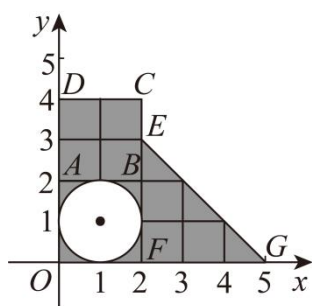
矩形 $HIJK$ 重心坐标为 $N\left(\frac{8+6}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 即 $N(7,1)$, 面积为 $s_3 = 2 \times 2 = 4$,

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{2 \times 16 + 5 \times 10 + 7 \times 4}{16 + 10 + 4} = \frac{11}{3},$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{2 \times 16 + \frac{5}{2} \times 10 + 1 \times 4}{16 + 10 + 4} = \frac{61}{30},$$

∴ 薄板的重心坐标为 $\left(\frac{11}{3}, \frac{61}{30}\right)$;

任务 3: 如图所示,



正方形 $ABCD$ 的重心坐标为 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 即 $(1, 3)$, 面积为 $2 \times 2 = 4$,

正方形 $ABFO$ 的重心坐标为 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 即 $(1, 1)$, 面积为 $2 \times 2 = 4$,

正方形 $ABFO$ 内的空心圆的重心坐标为 $(1, 1)$, 面积为 $\left(\frac{2}{2}\right)^2 \times \pi = \pi$,

$\triangle EFG$ 的重心坐标为 $\left(\frac{2+2+5}{3}, \frac{0+0+3}{3}\right)$, 即 $(3, 1)$, 面积为 $\frac{1}{2} \times (5-2) \times (3-0) = \frac{9}{2}$,

$\therefore$ 正方形 $ABFO$ (含挖空) 的重心的横坐标为 $\frac{4 \times 1 - \pi \times 1}{4 - \pi} = 1$, 纵坐标为 $\frac{4 \times 1 - \pi \times 1}{4 - \pi} = 1$,

根据题干所给公式计算整个阴影部分的重心的横坐标和纵坐标为:

$$\text{整个阴影部分的重心的横坐标为 } \frac{4 \times 1 + 1 \times (4 - \pi) + 3 \times \frac{9}{2}}{4 + 4 - \pi + \frac{9}{2}} = \frac{21.5 - \pi}{12.5 - \pi} = \frac{21.5 - 3}{12.5 - 3} = \frac{37}{19},$$

$$\text{纵坐标为 } \frac{4 \times 3 + 1 \times (4 - \pi) + 1 \times \frac{9}{2}}{4 + 4 - \pi + \frac{9}{2}} = \frac{20.5 - \pi}{12.5 - \pi} = \frac{20.5 - 3}{12.5 - 3} = \frac{35}{19},$$

$\therefore$ 整个阴影部分的重心的坐标为 $\left(\frac{37}{19}, \frac{35}{19}\right)$.