

2025 学年第二学期

八年级数学

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

注意: 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定位置作答, 在本试卷上答题无效

一、选择题: (本大题共 5 题, 每题 3 分, 满分 15 分)

1. 下列图形中, 是中心对称但不是轴对称的图形是 ()

- A. 矩形 B. 菱形 C. 平行四边形 D. 圆形

【答案】C

【解析】

【详解】解: A、矩形是中心对称图形, 也是轴对称图形;

B、菱形是中心对称图形, 也是轴对称图形;

C、平行四边形是中心对称图形, 但不是轴对称图形;

D、圆形是中心对称图形, 也是轴对称图形.

2. 以下说法中, 正确的是 ()

- A. 六边形的内角和是 900°
B. 七边形有 10 条对角线
C. 外角和是 360° 的多边形是八边形
D. 十边形的外角和等于五边形的外角和

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查多边形的基础性质, 需运用多边形内角和公式、对角线条数公式、外角和性质逐一判断选项.

【详解】解: 选项 A、六边形的内角和是 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ \neq 900^\circ$, 故 A 错误;

选项 B、七边形的对角线条数为 $7 \times \frac{(7-3)}{2} = 14 \neq 10$, 故 B 错误;

选项 C、任意多边形的外角和都是 360° , 并非只有八边形外角和为 360° , 故 C 错误;

选项 D、十边形外角和为 360° , 五边形外角和也为 360° , 二者相等, 故 D 正确.

3. 已知一个多边形的外角和等于内角和的一半, 那么这个多边形是 ()

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

【答案】D

【解析】

【分析】任意多边形的外角和为 360° ， n 边形内角和公式为 $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，根据题意列方程求解边数即可得到答案.

【详解】解：设这个多边形是 n 边形，根据题意，得

$$360^\circ = \frac{1}{2}(n-2)\cdot 180^\circ$$

解得 $n=6$.

所以这个多边形是六边形.

4. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论中不正确的是（ ）

- A. 当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形；
- B. 当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形；
- C. 当 $\angle ABC=90^\circ$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形；
- D. 当 $AC=BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是正方形.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查特殊平行四边形的判定，熟练掌握矩形、菱形、正方形的判定定理是解题关键，根据判定定理对各选项逐一判断即可.

【详解】解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

选项A、一组邻边相等的平行四边形是菱形，因此当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形，故A结论正确，不符合题意；

选项B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，因此当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是菱形，故B结论正确，不符合题意；

选项C、有一个内角是直角的平行四边形是矩形，因此当 $\angle ABC=90^\circ$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形，故C结论正确，不符合题意；

选项D、对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是正方形，因此当 $AC=BD$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形，不一定是正方形，故D结论错误，符合题意.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，那么下列条件中能判定这个四边形是正方形的是（ ）

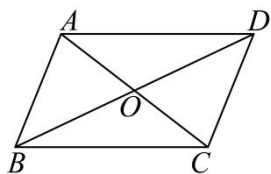
- A. $AC=BD$, $AB\parallel CD$, $AB=CD$
- B. $AD\parallel BC$, $\angle A=\angle C$
- C. $OA=OB=OC=OD$, $AC\perp BD$
- D. $OA=OC$, $OB=OD$, $AB=BC$

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件，结合正方形的判定定理逐一判断即可.

【详解】解：如图：



A、 $\because AB \parallel CD, AB = CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because AC = BD,$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，不能判定为正方形.

B、 $\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle A + \angle ABC = 180^\circ,$

$\because \angle A = \angle C,$

$\therefore \angle C + \angle ABC = 180^\circ,$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，无法判定为正方形.

C、 $\because OA = OB = OC = OD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\because AC \perp BD,$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

D、 $\because OA = OC, OB = OD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because AB = BC,$

$\therefore \square ABCD$ 是菱形，无法判定为正方形.

二、填空题 (本大题共 11 题，每题 3 分，满分 33 分)

6. 一个多边形从一个顶点出发共有 8 条对角线，那么这个多边形是_____边形.

【答案】十一

【解析】

【分析】从 $n(n \geq 3)$ 边形的一个顶点出发有 $(n-3)$ 条对角线，根据题意列方程即可求解多边形的边数.

【详解】解：设这个多边形的边数为 n ，

由题意得， $n-3=8$ ，

$$\therefore n=11,$$

$\therefore$ 这个多边形是十一边形.

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A - \angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是_____.

【答案】115 度##115°

【解析】

【分析】根据平行四边形邻角互补的性质，可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，结合已知条件 $\angle A - \angle B = 50^\circ$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A - \angle B = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 115^\circ.$$

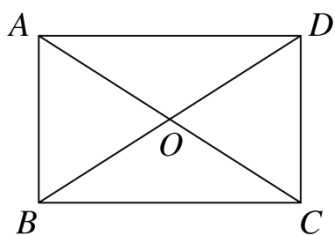
8. 矩形对角线夹角为 60° ，较短的边长为 12，则对角线长为_____.

【答案】24

【解析】

【分析】根据矩形的性质，矩形对角线相等且互相平分，结合对角线夹角为 60° ，可推出较短边与两条对角线的一半构成等边三角形，得到较短边长度为对角线长度的一半，据此计算对角线长.

【详解】解：如图，设矩形 $ABCD$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，较短边 $AB = 12$ ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AC = BD, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OD,$$

又 $\because \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$$\therefore OA = AB = 12,$$

$$\therefore AC = 2OA = 2 \times 12 = 24,$$

即对角线长为 24.

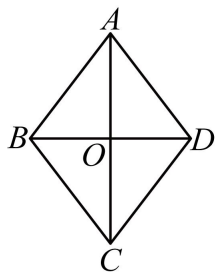
9. 如果菱形的对角线长 24 和 10, 那么菱形的周长为_____.

【答案】 52

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质与勾股定理的应用, 利用菱形对角线互相垂直平分的性质构造直角三角形, 再用勾股定理求出菱形的边长, 最后根据菱形四边相等计算周长.

【详解】 解: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形,



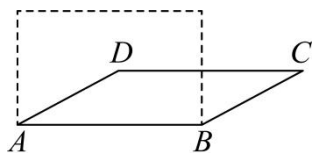
$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 24 = 12, \quad OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5, \quad AC \perp BD,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中, 由勾股定理得: } AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 13$$

$$\therefore \text{菱形的周长为 } 4 \times 13 = 52.$$

10. 如图, 如果将四根木条钉成的矩形木框变成平行四边形 $ABCD$ 的形状, 并使它的面积为矩形面积的一半, 那么这个平行四边形的最小内角等于_____.

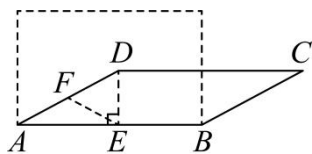


【答案】 30° 或 30 度

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 根据平行四边形的面积等于矩形面积的一半, 得出 $DE = \frac{1}{2}AD$, 取 AD 的中点 F , 连接 EF , 由直角三角形的性质得出 $\triangle DEF$ 为等边三角形, 由等边三角形的性质可得 $\angle ADE = 60^\circ$, 最后由计算即可得解.

【详解】 解: 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 则 $\angle AED = 90^\circ$,



根据题意得, $S_{\square ABCD} = AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot AD$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AD,$$

取 AD 的中点 F , 连接 EF , 则 $EF = AF = DF = \frac{1}{2} AD$,

$$\therefore EF = DF = DE,$$

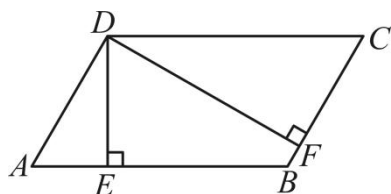
$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ - \angle ADE = 30^\circ,$$

即这个平行四边形的最小内角等于 30° .

11. 如图, $\square ABCD$ 中, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F , $\angle EDF = 60^\circ$, $AE = 5$, $CD = 15$, 则 $\square ABCD$ 的面积等于_____.



【答案】 $75\sqrt{3}$

【解析】

【分析】在四边形 $DEBF$ 中, 利用四边形的内角和为 360° , 先求出 $\angle B$ 的度数; 再根据平行四边形的性质, 即可求得 $\angle A$ 的度数; 然后在 $Rt\triangle ADE$ 中, 利用含 30° 角的直角三角形的性质和勾股定理求出 DE 的长, 然后利用平行四边形的面积公式列式计算即可.

【详解】解: $\because$ 在四边形 $DEBF$ 中, 内角和为 360° , $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, $\angle EDF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle B = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

$\because \square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $CD = 15$,

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \quad AB = CD = 15,$$

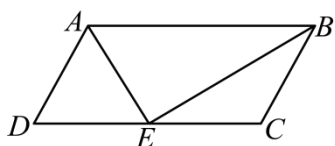
$\because Rt\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $AE = 5$,

$$\therefore AD = 2AE = 2 \times 5 = 10,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot DE = 15 \times 5\sqrt{3} = 75\sqrt{3}.$$

12. 如图, 已知 $\square ABCD$ 中, BE 平分 $\angle ABC$, $AE \perp BE$, 若 $AB = 4\sqrt{2}$, $\square ABCD$ 的周长为_____.



【答案】 $12\sqrt{2}$

【解析】

【分析】欲求平行四边形 $ABCD$ 的周长则需求出 $AD + BC$ 的值；根据平行四边形的性质和角平分线的定义可求得 $\angle CEB = \angle CBE$ ，根据等角对等边可得 $CE = BC$ ，然后根据直角三角形两锐角互余可得

$\frac{1}{2}\angle ABC + \angle EAB = 90^\circ$ ，结合 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ ，可得 $\angle EAB = \frac{1}{2}\angle DAB$ ，从而根据等角对等边得到 $AD = DE$ ，进而得到 $AD + BC = CD$ ，即可解答.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ, \angle CEB = \angle ABE, \angle BAE = \angle DEA,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle CBA,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CBE,$$

$$\therefore CE = BC,$$

$$\because AE \perp BE,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC + \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + 2\angle EAB = 180^\circ = \angle ABC + \angle DAB, \text{ 即 } \angle EAB = \frac{1}{2}\angle DAB,$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长} = 2AB + AD + BC = 2AB + DE + CE = 3AB = 3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

13. 若 $\square ABCD$ 的周长为 16, $\angle B$ 为锐角, 对角线 $AC \perp AB$, $AC = 4$, 则 $AB =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】设 $AB = x$ ，根据平行四边形的性质和周长表示出 BC ，然后在 $Rt\triangle ABC$ 中利用勾股定理建立方程，解方程即可.

【详解】解：设 $AB = x$ ，

$\because \square ABCD$ 的周长为 16，

$$\therefore BC = \frac{1}{2}(16 - 2x) = 8 - x,$$

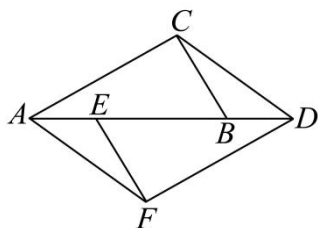
$\because \angle B$ 为锐角，对角线 $AC \perp AB$ ， $AC = 4$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ 即 } (8 - x)^2 = x^2 + 4^2,$$

$\therefore x = 3$ ，即 $AB = 3$.

14. 将两个完全相同的含有 30° 角的直角三角板在同一平面内按如图所示位置摆放. 点 A, E, B, D 依次在同一直线上，连结 AF 、 CD ，已知 $BC = 6$ ，四边形 $AFDC$ 是菱形，那么 AD 的长为_____.



【答案】

18

【解析】

【分析】根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半和直角三角形锐角互余可求得 AB 和 $\angle ABC$ ，然后根据菱形的性质可知 AD 平分 $\angle CDF$ ，结合三角形外角的性质可推出 $\angle BCD = \angle CDA$ ，最后利用等角对等边和线段的和差即可解答.

【详解】解：由题意可知，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AB = 2BC = 12, \quad \angle ABC = 90^\circ - \angle CAB = 60^\circ,$$

$\because$ 四边形 $AFDC$ 是菱形，点 A, E, B, D 在同一直线上， $\angle EDF = 30^\circ$ ，

$\therefore AD$ 平分 $\angle CDF$ ，

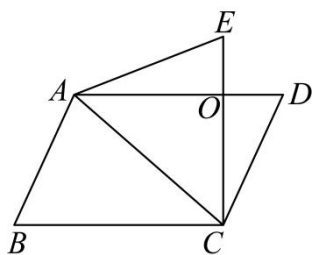
$$\therefore \angle CDA = \angle EDF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ABC - \angle CDA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle CDA,$$

$$\therefore BD = BC = 6,$$

$$\therefore AD = AB + BD = 12 + 6 = 18.$$

15. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 45^\circ$, 将三角形 ABC 沿着 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, 若 $AD = 2$, 那么 DE 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得出 $BC = AD = 2$, $\angle DAC = \angle BCA = 45^\circ$, 由折叠可得 $\angle ECA = \angle BCA = 45^\circ$, $CE = CB = 2$, 设 AD 与 CE 相交于点 O , 证明 $AO = CO$, $\angle AOC = 90^\circ$, 根据勾股定理求出 $AO = CO = \sqrt{2}$, 进而求出 EO , DO , 再由勾股定理即可求解.

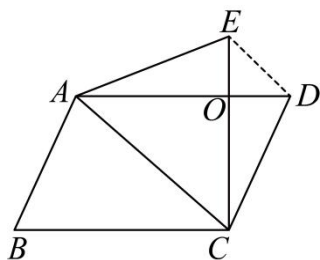
【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AD = 2$,

$$\therefore BC = AD = 2, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BCA = 45^\circ, \quad AC = BC = 2$$

由折叠可得 $\angle ECA = \angle BCA = 45^\circ$, $CE = CB = 2$,

设 AD 与 CE 相交于点 O ,



$$\therefore \angle DAC = \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore AO = CO, \quad \angle AOC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore AO^2 + CO^2 = AC^2 = 4,$$

$$\therefore AO = CO = \sqrt{2},$$

$$\therefore DO = AD - AO = 2 - \sqrt{2}, \quad EO = CE - CO = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle DOE = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DOE \text{ 中, } DE = \sqrt{DO^2 + EO^2} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} - 2.$$

16. 我们规定：在四边形 $ABCD$ 中， O 是边 BC 上一点，如果 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 全等（对应关系不确定），那么点 O 叫做该四边形的“等形点”。在四边形 $EFGH$ 中， $\angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ， $EF = 1$ ， $FG = 3$ ，如果该四边形的“等形点”在边 FG 上，那么四边形 $EFGH$ 的周长是_____。

【答案】

8 或 $6 + \sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle FGH = 90^\circ$ ，结合“等形点”对应关系不确定的条件，分两种全等对应情况讨论，利用全等三角形的性质、勾股定理求出四边形各边长，进而计算周长。

【详解】解： $\because \angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ，

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的“等形点” O 在边 FG 上，

如图 1，当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时，可得 $EF = HG = 1$ ， $OF = OG$ ，

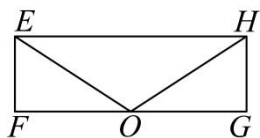


图1

$$\therefore FG = OF + OG = 3, \quad EF \parallel GH, \quad EF = HG,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$$\therefore EH = FG = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } 2 \times (1 + 3) = 8;$$

如图 2，当 $\triangle OEF \cong \triangle HOG$ 时，可得 $EF = OG = 1$ ， $OF = GH$ ， $OE = OH$ ， $\angle OEF = \angle HOG$ ，

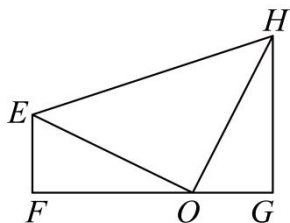


图2

$$\therefore FG = 3,$$

$$\therefore OF = FG - OG = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore GH = 2,$$

$$\because \angle EFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HOG + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOH = 180^\circ - (\angle HOG + \angle EOF) = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFO \text{ 中, 由勾股定理得 } OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore OH = OE = \sqrt{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle EOH \text{ 中, 由勾股定理得 } EH = \sqrt{EO^2 + HO^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{ 四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } EF + FG + GH + EH = 1 + 3 + 2 + \sqrt{10} = 6 + \sqrt{10},$$

综上所述, 四边形 $EFGH$ 的周长为 8 或 $6 + \sqrt{10}$.

三、解答题 (第 17 题 7 分, 第 18, 19 题每题 8 分, 20 题 10 分, 21 题 9 分, 22 题 10 分, 共 52 分)

17. 如果一个多边形每个内角都是 160° , 求这个多边形的边数和内角和, 并直接写出该多边形对角线的条数.

【答案】 边数为 18, 内角和为 2880° , 对角线条数为 135

【解析】

【分析】 先根据已知内角度数求出每个外角度数, 利用任意多边形外角和为 360° 求出边数, 再根据多边形内角和公式计算内角和, 最后根据 n 边形对角线条数公式计算对角线的条数.

【详解】 解: $\because$ 多边形每个内角为 160° ,

$$\therefore \text{ 每个外角为 } 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$\because$ 任意多边形的外角和为 360° ,

$$\therefore \text{ 多边形的边数为 } \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18,$$

根据多边形内角和公式, 可得内角和为 $(18 - 2) \times 180^\circ = 2880^\circ$,

$$\therefore \text{ 十八边形对角线条数为 } \frac{18 \times (18 - 3)}{2} = 135,$$

答: 这个多边形的边数为 18, 内角和为 2880° , 对角线共 135 条.

18. 仅用无刻度直尺完成下列作图: (保留作图痕迹, 写结论, 不要求写做法)

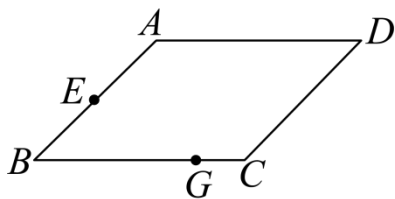


图1

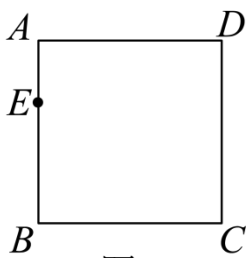


图2

(1) 如图 1, E 为平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 的中点, 点 G 为 BC 上一点.

①画出 CD 的中点 F ;

②在 AD 上画出点 H , 使得 $AH = CG$.

(2) 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 上一点, 在 AD 上画点 M , 使得 $AE = AM$.

【答案】(1) ①见解析; ②见解析

(2) 见解析

【解析】

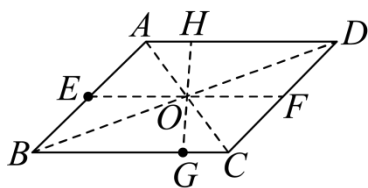
【分析】(1) ①连接平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 连接 EO 延长交 CD 于点 F , 点 F 即为所求 CD 中点;

②连接 GO 延长交 AD 于点 H , 点 H 即为所求, 满足 $AH = CG$;

(2) 连接正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 连接 DE 交 AC 于点 P , 连接 BP 并延长交 AD 于 M , 点 M 即为所求, 满足 $AE = AM$.

【小问 1 详解】

解: ①如图, 点 F 即为所求;



②如图, 点 H 即为所求;

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO = CO$ 、 $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle HAO = \angle GCO$,

在 $\triangle AHO$ 和 $\triangle CGO$ 中,

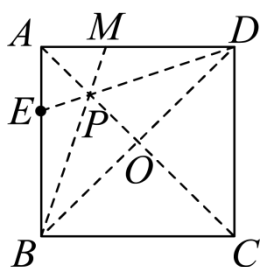
$$\begin{cases} \angle HAO = \angle GCO \\ AO = CO \\ \angle AOH = \angle COG \end{cases},$$

$\therefore \triangle AHO \cong \triangle CGO$ (ASA),

$\therefore AH = CG$;

【小问 2 详解】

解：如图，点 M 即为所求；



证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC$ 垂直平分 BD 、 $AB = AD$ 、 $\angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore PB = PD$,

$\therefore \angle PBD = \angle PDB$,

$\because AB = AD$,

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$,

$\therefore \angle ABD - \angle PBD = \angle ADB - \angle PDB$,

$\therefore \angle ABM = \angle ADE$,

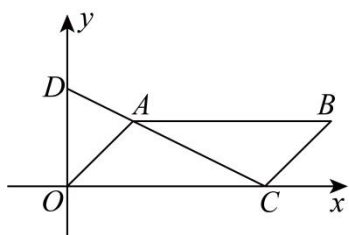
在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAM = \angle DAE \\ AB = AD \\ \angle ABM = \angle ADE \end{cases},$$

$\therefore \triangle AMB \cong \triangle ADE$ (ASA),

$\therefore AM = AE$.

19. 数学活动课上，老师组织数学小组的同学们以“平面直角坐标系”为背景开展探究活动. 如图，已知四边形 $OABC$ 是平行四边形，点 $A(2,2)$ 、点 $C(6,0)$ ，连接 CA ，并延长交 y 轴于点 D .



(1) 观察发现：直线 AC 的函数表达式为_____.

(2) 探究迁移：若点 P 从点 C 出发，以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动，同时点 Q 从点 O 出发，以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动， P 、 Q 均在线段 OC 上，过点 P 作 x 轴垂线交直线 CD 于点 E ，过点 Q 作 x 轴垂线交直线 OA 于点 F ，连接 EF ，猜想四边形 $EPQF$ 的形状（点 P 、 Q 重合除外），并证明你的结论；

(3) 拓展应用：在 (2) 的条件下，当点 P 运动多少秒时，四边形 $EPQF$ 是正方形？不需说明理由，请直接写出你的结果.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

(2) 四边形 $EPQF$ 是矩形，证明见解析

(3) $\frac{3}{2}$ 秒或 3 秒

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法，设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，将点 $A(2, 2)$ 、点 $C(6, 0)$ ，代入即可求解；

(2) 先利用待定系数法求出直线 OA 的解析式，根据 P 、 Q 的运动情况，分类讨论，可求出 OQ 与 OP 的长，分别代入直线 OA 和 AC 解析式，进而求出点 E 、 F 坐标，可得出 $FQ = EP$ ，即可得出结论；

(3) 根据 P 、 Q 的运动情况，分类讨论，求出 PQ ，利用 $PQ = FQ$ 建立方程即可求出时间.

【小问 1 详解】

解：设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

将点 $A(2, 2)$ 、点 $C(6, 0)$ ，代入得，

$$\begin{cases} 2 = 2k + b \\ 0 = 6k + b \end{cases}$$

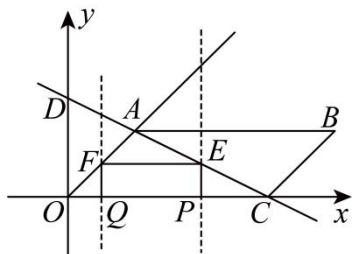
$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

【小问 2 详解】

解：四边形 $EPQF$ 是矩形，理由如下：

当点 P 在 Q 右侧时，如图所示，



$\because$ 点 $A(2,2)$, $O(0,0)$,

$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$,

$\because$ 点 P 从点 C 出发，以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动，同时点 Q 从点 O 出发，以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动，设运动时间为 t ,

$\therefore CP = 2t$, $OQ = t$, $OP = OC - CP = 6 - 2t$,

$\therefore Q(t,0)$, $P(6-2t,0)$,

$\because$ 点 E 在直线 $AC: y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上，点 F 在直线 $OA: y = x$ 上，且 $FQ \perp x$ 轴， $EP \perp x$ 轴，

$\therefore FQ = y_F = t$, $EP = y_E = -\frac{1}{2}(6-2t) + 3 = t$,

$\therefore FQ = EP$,

又 $\because FQ \perp x$ 轴， $EP \perp x$ 轴，

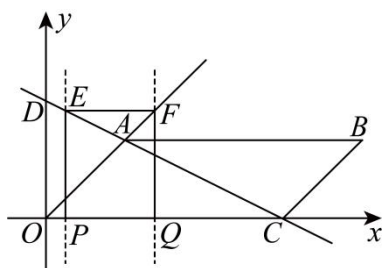
$\therefore FQ \parallel EP$, $\angle FQP = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是平行四边形，

又 $\angle FQP = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是矩形.

当点 P 在 Q 左侧时，如图所示，



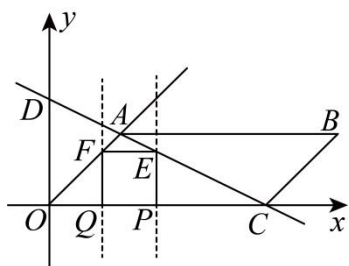
设经过时间 t ，则 $OQ = t$ ， $CP = 2t$ ， $OP = OC - CP = 6 - 2t$ ，

$\therefore Q(t, 0)$ ， $P(6 - 2t, 0)$ ，

同理可证四边形 $EPQF$ 是矩形.

【小问 3 详解】

解：当点 P 在 Q 右侧时，四边形 $EPQF$ 是正方形，如图所示，



第 (2) 问已证四边形 $EPQF$ 是矩形，

$\therefore$ 当 $PQ = FQ$ 时，四边形 $EPQF$ 是正方形，

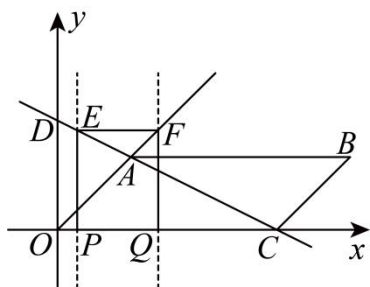
$\because$ 经过时间 t ， $CP = 2t$ ， $OQ = FQ = t$ ， $PQ = OC - OQ - CP = 6 - 3t$ ，

$\therefore t = 6 - 3t$ ，

解得 $t = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 经过 $t = \frac{3}{2}$ ，四边形 $EPQF$ 是正方形.

当点 P 在 Q 左侧时且在原点 O 右侧时，四边形 $EPQF$ 是正方形，如图所示，



经过时间 t ，则 $OQ = FQ = t$ ， $CP = 2t$ ， $OP = OC - CP = 6 - 2t$ ， $PQ = OQ - OP = t - (6 - 2t) = 3t - 6$ ，

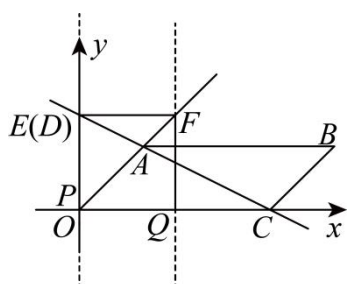
第(2)问已证四边形 $EPQF$ 是矩形,

$\therefore$ 当 $PQ = FQ$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形,

$$\therefore 3t - 6 = t$$

解得 $t = 3$,

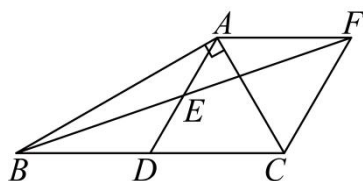
此时 $OP = 0$, 即 $P(0, 0)$, 此时 P 与原点重合, 如图所示,



$\therefore$ 当经过时间 $t = 3$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形.

综上所述, 当点 P 运动 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = 3$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形.

20. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F , 连结 CF .



(1) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 如果 $AC = 6$, 四边形 $ADCF$ 的面积是 30, 求 AB 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 10

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle AEF \cong \triangle DEB$, 得 $AF = BD$, 结合斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $AF = DC$, 因为 $AF \parallel BC$, 证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形, 因为 $AD = DC$, 所以证明四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 先证明四边形 $ABDF$ 是平行四边形, 得出 $AB = DF$, 由四边形 $ADCF$ 是菱形, 得出 $\frac{1}{2} AC \times DF = 30$, 把 $AC = 6$ 代入计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

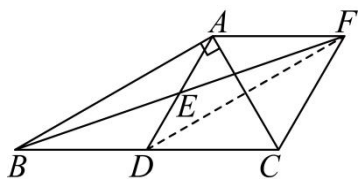
证明: $\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$\because AF \parallel BC$,
 $\therefore \angle AFE = \angle DBE$,
 $\because \angle AEF = \angle DEB$,
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB (\text{AAS})$,
 $\therefore AF = BD$,
 $\because \angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线,
 $\therefore AD = DB = CD = \frac{1}{2} BC$,
 $\therefore AF = DC$,
 $\because AF \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,
 $\because AD = DC$,
 $\therefore \square ADCF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

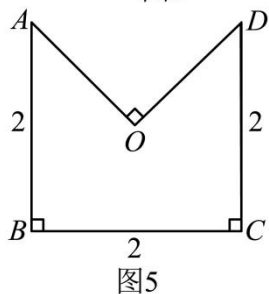
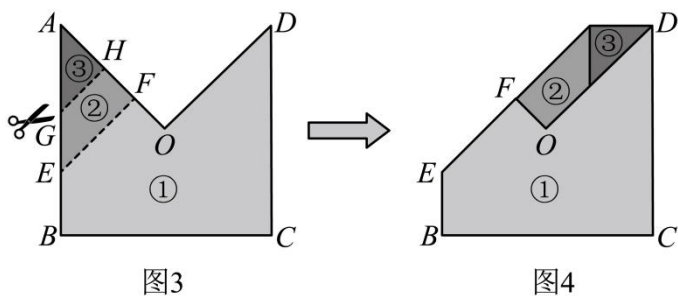
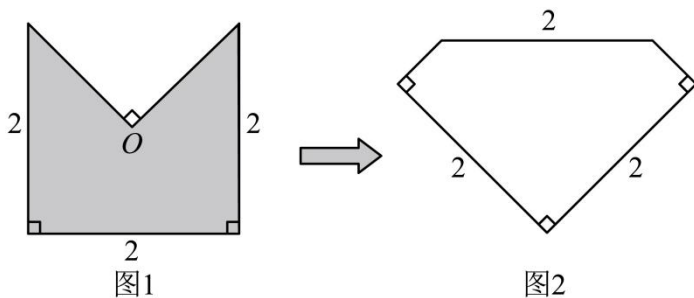
解: 连结 DF ,



由 (1) 知 $AF = BD$
 $\because AF \parallel BC$
 $\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形,
 $\therefore AB = DF$,
 $\because S_{\text{菱形}ADCF} = \frac{1}{2} AC \cdot DF$, 即 $\frac{1}{2} \times 6 \times DF = 30$,
 $\therefore DF = 10$,
 $\therefore AB = DF = 10$.

21. 【情境】图 1 是由正方形纸片去掉一个以中心 O 为顶点的等腰直角三角形后得到的. 该纸片通过裁剪, 可拼接为图 2 所示的钻石型五边形, 数据如图所示.

(说明: 纸片不折叠, 拼接不重叠无缝隙无剩余)



【操作】嘉嘉将图 1 所示的纸片通过裁剪，拼成了钻石型五边形．

如图 3，嘉嘉沿虚线 EF ， GH 裁剪，将该纸片剪成①，②，③三块，再按照图 4 所示进行拼接．根据嘉嘉的剪拼过程，解答问题：

- (1) 直接写出线段 EF 的长；
- (2) 直接写出图 3 中所有与线段 BE 相等的线段，并计算 BE 的长．

【探究】

(3) 淇淇说：将图 1 所示纸片沿直线裁剪，剪成两块，就可以拼成钻石型五边形．请你按照淇淇的说法设计一种方案：在图 5 所示纸片的 BC 边上找一点 P （可以借助刻度尺或圆规），画出裁剪线（线段 PQ ）的位置，并直接写出 BP 的长．

【答案】(1) 1 (2) AH ， HG ， GE ， $BE = 2 - \sqrt{2}$

(3) 见解析， $\sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 如图，过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K ，结合题意可得：四边形 $FOG'K$ 为矩形，可得 $FO = KG'$ ，由拼接可得： $HF = FO = KG'$ ，可得 $\triangle AHG$ ， $\triangle H'G'D$ ， $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形， $\triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形，设 $H'K = KG' = x$ ，则 $H'G' = H'D = \sqrt{2}x$ ，再进一步解答即可；

(2) 根据 (1) 所求求出 AG , EG , BE , OH 的长即可得到答案;

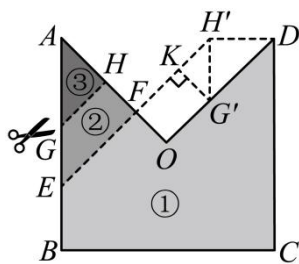
(3) 以 B 为圆心, BO 为半径画弧交 BC 于 P' , 交 AB 于 Q' , 则直线 $P'Q'$ 为分割线, 或以 C 为圆心, CO 为半径画弧, 交 BC 于 P , 交 CD 于 Q , 则直线 PQ 为分割线, 再进一步求解 BP 的长即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K ,

结合题意可得: 四边形 $FOG'K$ 为矩形,

$$\therefore FO = KG',$$



由拼接可得: $HF = FO = KG'$,

由正方形的性质可得: $\angle A = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AHG$, $\triangle H'G'D$, $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形,

设 $H'K = KG' = x$,

$$\therefore H'G' = H'D = \sqrt{H'K^2 + KG'^2} = \sqrt{2}x, \quad HF = FO = x,$$

$$\therefore AH = HG = \sqrt{2}x,$$

$\therefore$ 正方形的边长为 2,

$$\therefore \text{正方形的对角线的长为 } \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA = \sqrt{2},$$

$$\therefore x + x + \sqrt{2}x = \sqrt{2},$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore EF = AF = (\sqrt{2} + 1)x = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1;$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得 $EF = AF = 1$, $OF = HF = \sqrt{2} - 1$, $AH = GH = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$, $OA = OD = \sqrt{2}$,

$$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{2}, \quad AG = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 2 - \sqrt{2}, \quad GE = AE - AG = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore BE = AH = HG = GE, \quad OH = KF + HF = 2\sqrt{2} - 2,$$

$\therefore$ 与 BE 相等的线段有 AH, HG, GE ;

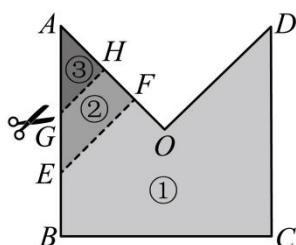


图3

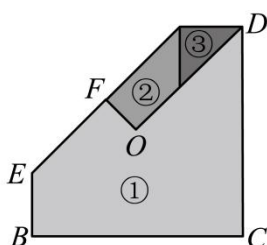
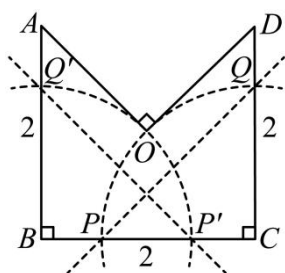


图4

【小问 3 详解】

解: 根据题意可知, 需要裁剪出一个两直角边为 $\sqrt{2}$, 斜边为 2 的等腰直角三角形来填补在等腰 $\text{Rt}\triangle AOD$ 的位置,

如图, 以 B 为圆心, BO 为半径画弧交 BC 于 P' , 交 AB 于 Q' , 则直线 $P'Q'$ 为分割线,



此时 $BP' = \sqrt{2}$, $P'Q' = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$, 符合要求,

或以 C 为圆心, CO 为半径画弧, 交 BC 于 P , 交 CD 于 Q , 则直线 PQ 为分割线,

此时 $CP = CQ = \sqrt{2}$, $PQ = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$,

$$\therefore BP = 2 - \sqrt{2},$$

综上: BP 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$.

22. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $BC = 16$, E, F 是直线 AC 上的两个动点, 分别从 A, C 两点同时出发相向而行, 速度均为每秒 2 个单位长度, 运动时间为 t 秒, 其中 $(0 \leq t \leq 10)$.

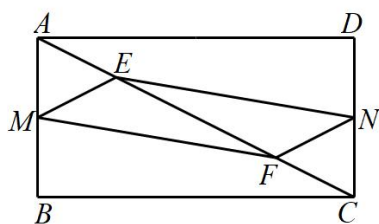


图1

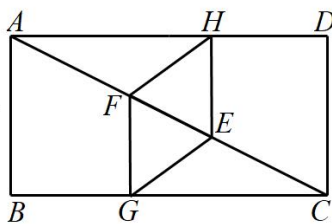


图2

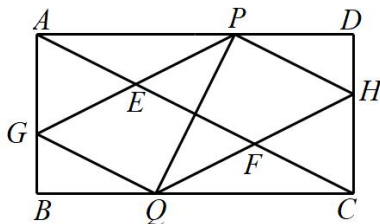


图3

(1) 如图 1, M 、 N 分别是 AB 、 CD 中点, 当四边形 $EMFN$ 是矩形时, 求 t 的值;

(2) 若 G 、 H 分别从点 A 、 C 沿折线 $A-B-C$, $C-D-A$ 运动, 与 E, F 相同的速度同时出发.

①如图 2, 若四边形 $EGFH$ 为菱形, 求 t 的值;

②如图 3, 作 AC 的垂直平分线交 AD 、 BC 于点 P 、 Q , 当四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$ 时, 求 t 的值.

【答案】 (1) $t = 2\sqrt{5} - 4$ 或 $2\sqrt{5} + 4$

(2) ① $t = 7$; ② $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle AME \cong \triangle CNF$ (SAS), 则 $ME = FN$, $\angle AEM = \angle CFN$, 可得 $\angle MEF = \angle EFN$, 则 $ME \parallel FN$, 得四边形 $EMFN$ 是平行四边形, 连接 MN , 证明四边形 $MBCN$ 是矩形, 则 $MN = BC = 16$, $AC = 8\sqrt{5}$, 当 $EF = MN = 16$ 时, 四边形 $EMFN$ 是矩形, 则 $8\sqrt{5} - 4t = 16$ 或 $4t - 8\sqrt{5} = 16$, 解方程即可得到答案;

(2) ①由 (1) 知: $AE = CF$, 连接 GH , CH , 由四边形 $EGFH$ 为菱形得到 $AC \perp GH$, $OE = OF$, 则 $OA = OC$, 则 $AH = HC$, 由勾股定理得到 $HC^2 = CD^2 + DH^2$, 则 $AH^2 = 64 + (16 - AH)^2$, 求得 $AH = CH = 10$, 则 $DH = 6$, 则 $CD + DH = 8 + 6 = 14$, 即可得到 $t = \frac{14}{2} = 7$;

②根据点 G , H 所在边的不同分情况讨论求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\therefore \angle MAE = \angle NCF$,

$\because M$ 、 N 分别是 AB , DC 的中点,

$\therefore AM = CN$,

$\because E, F$ 分别从 A, C 同时出发相向而行, 速度均为每秒 2 个单位长度,

$$\therefore AE = CF = 2t,$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle CNF (\text{SAS}),$$

$$\therefore ME = FN, \angle AEM = \angle CFN,$$

$$\therefore \angle MEF = \angle EFN,$$

$$\therefore ME \parallel FN,$$

$\therefore$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形,

如图 1, 连接 MN ,

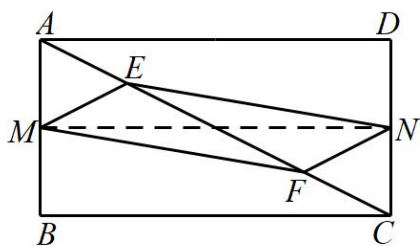


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, M, N 分别是 AB, DC 中点,

$$\therefore MB = CN, MB \parallel CN, \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 是矩形,

$$\therefore MN = BC = 16,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 16$,

$$\therefore MN = BC = 16, AC = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5},$$

$\because$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形,

$\therefore$ 当 $EF = MN = 16$ 时, 四边形 $EMFN$ 是矩形,

$$\therefore 8\sqrt{5} - 4t = 16 \text{ 或 } 4t - 8\sqrt{5} = 16,$$

$$\text{解得: } t = 2\sqrt{5} - 4 \text{ 或 } 2\sqrt{5} + 4;$$

【小问 2 详解】

解: ①由 (1) 知: $AE = CF$,

如图 2, 连接 GH, CH ,

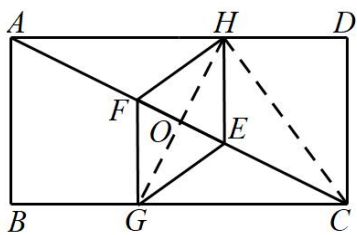


图2

$\because$ 四边形 $EGFH$ 为菱形,

$\therefore AC \perp GH$, $OE = OF$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore AH = HC$,

$\because HC^2 = CD^2 + DH^2$,

$\therefore AH^2 = 64 + (16 - AH)^2$,

$\therefore AH = CH = 10$,

$\therefore DH = 6$,

$\therefore CD + DH = 8 + 6 = 14$,

$\therefore t = \frac{14}{2} = 7$;

②如图 3, 点 G 在 AB 上, 点 H 在 CD 上时, 连接 AQ ,

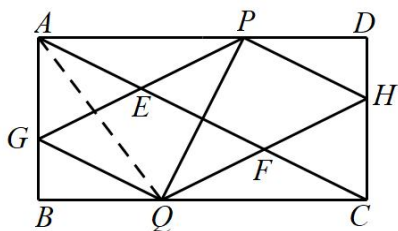


图3

$\because PQ$ 是 AC 的垂直平分线,

$\therefore AQ = CQ$,

设 $AQ = CQ = x$, 则 $BQ = BC - CQ = 16 - x$,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中, $AB^2 + BQ^2 = AQ^2$,

即 $8^2 + (16 - x)^2 = x^2$, 解得 $x = 10$,

$\therefore AQ = CQ = 10$, $BQ = 6$,

同理可得 $AP = 10$,

$$\therefore AP = CQ,$$

$\because G、H$ 分别从点 $A、C$ 沿折线 $A-B-C$, $C-D-A$ 运动,

$$\therefore AG = CH,$$

$$\text{又} \because \angle GAP = \angle QCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle APG \cong \triangle CQH (\text{SAS}),$$

$$\therefore GP = QH,$$

同理可证 $PH = GQ$,

$\therefore$ 四边形 $GQHP$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$,

$$\therefore S_{\square PGQH} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD},$$

$$\therefore 2S_{\triangle PGQ} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{15}{32} \times 8 \times 16 = 60,$$

$$\therefore S_{\triangle PGQ} = 30,$$

$$\because S_{\text{四边形} ABQP} = \frac{1}{2} (AP + BQ) \cdot AB = \frac{1}{2} (CQ + BQ) \cdot AB = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64,$$

$$\therefore S_{\triangle AGP} + S_{\triangle GBQ} = S_{\text{四边形} ABQP} - S_{\triangle PGQ} = 64 - 30 = 34,$$

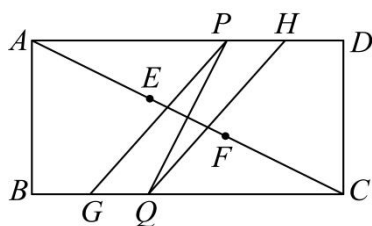
$$\therefore \frac{1}{2} \times AG \times 10 + \frac{1}{2} \times 6 \times (8 - AG) = 34,$$

$$\therefore AG = 5,$$

$$\therefore t = \frac{5}{2}.$$

如图, 点 G 在线段 BQ 上, 同时点 H 在线段 DP 上,

即 $4 < t \leq 7$ 时,



$$GQ = BQ - BG = (AB + BQ) - (AB + BG) = (8 + 6) - 2t = 14 - 2t,$$

$$PH = DP - DH = (CD + DP) - (CD + DH) = 14 - 2t,$$

$$\therefore GQ = PH,$$

$\therefore$ 在矩形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 即 $PH \parallel GQ$,

$\therefore$ 四边形 $PGQH$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\square PGQH} = GQ \cdot AB = (14 - 2t) \times 8 = 112 - 16t,$$

$$\therefore S_{\square PGQH} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD},$$

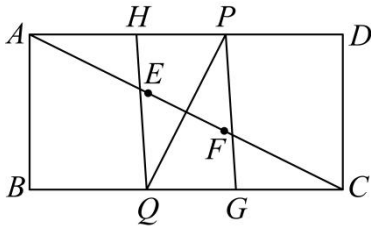
$$\therefore 112 - 16t = \frac{15}{32} \times 8 \times 16,$$

解得 $t = \frac{13}{4} < 4$, 不合题意, 舍去.

故此情况不存在.

如图, 点 G 在线段 QC 上, 同时点 H 在 AP 上,

即 $7 < t \leq 10$ 时,



$$GQ = BQ - BG = 2t - 14, \quad PH = 2t - 14,$$

$$\therefore GQ = PH,$$

$\therefore$ 在矩形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 即 $PH \parallel GQ$,

$\therefore$ 四边形 $PGQH$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\square PGQH} = GQ \cdot AB = (2t - 14) \times 8 = 16t - 112,$$

$$\therefore S_{\square PGQH} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD},$$

$$\therefore 16t - 112 = \frac{15}{32} \times 8 \times 16,$$

解得 $t = \frac{43}{4} > 10$, 不合题意, 舍去.

故此情况不存在.

综上所述, 四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$ 时, t 的值为 $\frac{5}{2}$.