

2025 学年第二学期八年级数学

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

注意: 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定位置作答, 在本试卷上答题无效.

一、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

1. 下列命题中, 假命题是 ()

- A. 凡有内角为 30° 的直角三角形都相似
B. 凡有内角为 45° 的等腰三角形都相似
C. 凡有内角为 60° 的直角三角形都相似
D. 凡有内角为 90° 的等腰三角形都相似

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据相似三角形的判定定理对各小题分析判断即可判断.

【详解】 A、凡有内角为 30° 的直角三角形都相似, 所以 A 选项的命题为真命题;

B、凡有内角为 45° 的等腰三角形不一定相似, 所以 B 选项的命题为假命题;

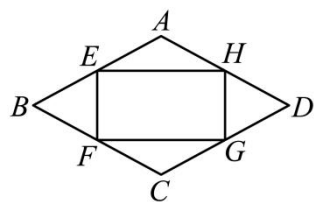
C、凡有内角为 60° 的直角三角形都相似所以 C 选项的命题为真命题;

D、凡有内角为 90° 的等腰三角形都相似, 所以 D 选项的命题为真命题.

故选: B.

【点睛】 题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果...那么...”形式. 有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

2. 如图, 菱形 $ABCD$ 的面积为 10, 点 E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 ()



- A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 4 D. 8

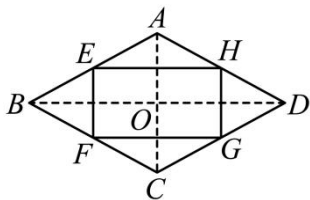
【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是中点四边形, 根据三角形中位线定理得 $EF \parallel AC \parallel HG$, $EH \parallel BD \parallel FG$, $BD = 2EH$, $AC = 2EF$, 证明四边形 $EFGH$ 是矩形, 进而得菱形 $ABCD$ 的面积

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2EF \cdot EH. \text{ 四边形 } EFGH \text{ 面积是 } EF \times EH \text{ 故可得结论.}$$

【详解】解：连接 AC 、 BD 交于 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\because$ 点 E 、 F 、 G 、 H 分别是边 AB 、 BC 、 CD 和 DA 的中点，

$\therefore EH \parallel BD$ ， $FG \parallel BD$ ， $EF \parallel AC$ ， $HG \parallel AC$ ， $BD = 2EH$ ， $AC = 2EF$ ，

$\therefore EH \parallel FG$ ， $EF \parallel HG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$\because AC \perp BD$ ，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$ ，

$\because \angle AEH = \angle ABO$ ， $\angle BEF = \angle EAO$ ，

$\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle HEF = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2EF \cdot EH$ ，

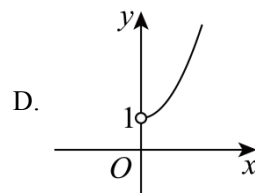
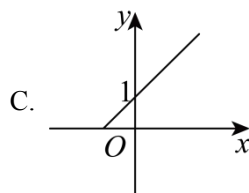
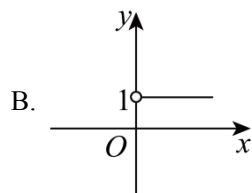
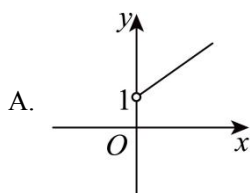
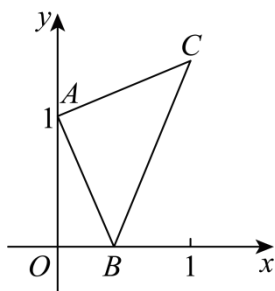
$\therefore 2EF \cdot EH = 10$ ，

$\therefore EF \cdot EH = 5$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积为 5，

故选：B.

3. 如图，点 A 的坐标为 $(0,1)$ ，点 B 是 x 轴正半轴上的一动点，以 AB 为边作等腰直角 ABC ，使 $\angle BAC = 90^\circ$ ，如果点 B 的横坐标为 x ，点 C 的纵坐标为 y ，那么表示 y 与 x 的函数关系的图像大致是()



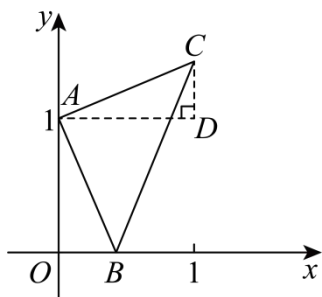
【答案】A

【解析】

【分析】先作出合适的辅助线，再证明 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AOB$ 的关系，即可建立 y 与 x 的函数关系，从而确定函数图像.

【详解】解：由题意可得： $OB = x$ ， $OA = 1$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 C 的纵坐标是 y ，

作 $AD \parallel x$ 轴，作 $CD \perp AD$ 于点 D ，如图所示：



$$\therefore \angle DAO + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle BAD = \angle BAD + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle DAC,$$

在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle DAC$ 中，

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle ADC \\ \angle OAB = \angle DAC \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle DAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore OB = CD,$$

$$\therefore CD = x,$$

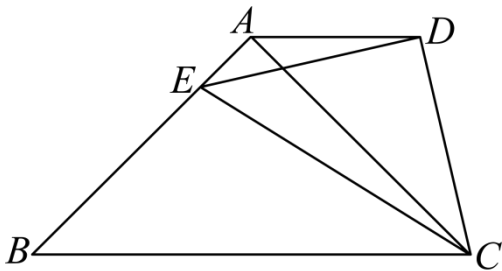
$\therefore$ 点 C 到 x 轴的距离为 y , 点 D 到 x 轴的距离等于点 A 到 x 轴的距离,

$$\therefore y = x + 1 (x > 0),$$

结合选项可得, A 符合题意.

【点睛】 本题考查动点问题的函数图象, 明确题意、建立相应的函数关系式是解答本题的关键.

4. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 E 是边 AB 上一点, $\angle ECD = 45^\circ$, 那么下列结论错误的是 ()



A. $\angle AED = \angle ECB$

B. $\angle ADE = \angle ACE$

C. $BE = \sqrt{2}AD$

D. $BC = \sqrt{2}CE$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据等腰直角三角形的性质得出 $BC = \sqrt{2}AC$, 从而证得 $BC \neq \sqrt{2}CE$, 根据平行线的性质得出 $\angle ACB = \angle ECD = 45^\circ$, 证得 $\angle DAC = \angle ABC$, 因为 $\angle ACD = \angle BCE$, 证得 $\triangle DAC \sim \triangle EBC$, 得出 $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, 证得 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, 得到 $\angle EDC = \angle BAC = 90^\circ$ 从而得到 A, D 在以 EC 为直径的圆上, 根据圆周角定理得到 $\angle AED = \angle ACD$, $\angle ADE = \angle ACE$, 进一步得到 $\angle AED = \angle ECB$, 根据 $\triangle DAC \sim \triangle EBC$, 得到 $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}$ 即可.

【详解】 解: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AC,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore EC > AC,$$

$$\therefore BC \neq \sqrt{2}CE, \text{ 故 D 错误;}$$

$\because AD \parallel BC, \angle ECD = 45^\circ,$
 $\therefore \angle DAC = \angle ABC, \angle ACD = \angle BCE,$
 $\therefore \triangle DAC \sim \triangle EBC,$
 $\therefore \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC},$
 $\because \angle ACB = \angle ECD = 45^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC,$
 $\therefore \angle EDC = \angle BAC = 90^\circ,$
 $\therefore A, D$ 在以 EC 为直径的圆上,
 $\therefore \angle AED = \angle ACD, \angle ADE = \angle ACE,$ 故 B 正确;
 $\because \angle ACD = \angle ECB,$
 $\therefore \angle AED = \angle ECB,$ 故 A 正确;
 $\because \triangle DAC \sim \triangle EBC,$
 $\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2},$
 $\therefore BE = \sqrt{2}AD,$ 故 C 正确,

故选: D.

【点睛】 本题考查了梯形的性质, 等腰直角三角形的性质, 三角形相似的判定和性质, 圆周角定理等, 熟练掌握这些性质定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

5. 已知一个多边形的每一个外角都等于 72° , 则这个多边形的边数是_____.

【答案】 5

【解析】

【详解】 $\because$ 多边形的每个外角都等于 72° ,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$\therefore 360^\circ \div 72^\circ = 5,$

$\therefore$ 这个多边形的边数为 5.

故答案为 5.

6. 已知线段 $AB = 4$, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 则 AP 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{5} - 2$ 或 $6 - 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据题意代入数据，分两种情况即可得出 AP 的长.

【详解】解：当 $AP > BP$ 时，

$$AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\text{当 } AP < BP \text{ 时, } AP = 4 - (2\sqrt{5} - 2) = 6 - 2\sqrt{5},$$

故答案为： $2\sqrt{5} - 2$ 或 $6 - 2\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了黄金分割的概念：把一条线段分成两部分，使其中较长的线段与全线段的比等于较短
线段与较长线段的比，这样的线段分割叫做黄金分割，他们的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金比；熟记黄金分割的公

式：较长的线段=原线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是解题关键. 注意有两种情况.

7. 将反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像向上平移 2 个单位，所得函数图像与 x 轴的交点坐标是_____.

【答案】 $(-3, 0)$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数图象的平移问题，先根据平移方式求出平移后解析式，求出 $y = 0$ 时对应的 x 的值即可.

【详解】解：将反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像向上平移 2 个单位，所得函数的解析式为： $y = \frac{6}{x} + 2$,

$$\text{令 } \frac{6}{x} + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -3,$$

$\therefore$ 所得函数图像与 x 轴的交点坐标是 $(-3, 0)$,

故答案为： $(-3, 0)$.

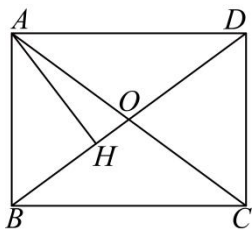
8. 已知矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$, $BC = 4$, 连接 AC 、 BD 交于点 O , 过 A 作 $AH \perp BD$, 垂足为 H , 则 OH 的长为_____.

【答案】 $\frac{7}{10}$ 或 0.7

【解析】

【分析】先利用矩形的性质得到对角线相等且互相平分，再用勾股定理求出对角线 BD 的长，通过等面积法求得 AH 的长，再由勾股定理求出 OH 的长即可.

【详解】解：如图：



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \quad AD = BC = 4, \quad AC = BD, \quad OB = \frac{1}{2}BD, \quad OA = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore OA = OB = \frac{1}{2}BD,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中，由勾股定理得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$$\therefore OA = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2},$$

∵ $AH \perp BD$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \cdot AH,$$

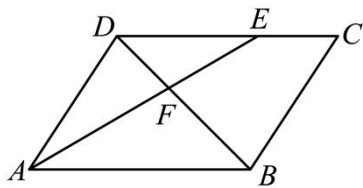
$$\text{即 } 3 \times 4 = 5 \cdot AH,$$

$$\text{解得 } AH = \frac{12}{5},$$

∵ $AH \perp BD$ ，

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AOH \text{ 中，由勾股定理得 } OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{7}{10}.$$

9. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 4$ ， $\angle BAD$ 的平分线 AE 分别交 BD ， CD 于 F ， E ，那么 $\frac{DF}{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质及角平分线的定义得到 $DE = AD = 4$ ，再证明 $\triangle DFE \sim \triangle BFA$ ，得到

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{BF} \text{ 即可得出结果.}$$

【详解】解：在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = 4$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle BAE,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AED,$$

$$\therefore DE = AD = 4,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle DFE \sim \triangle BFA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{BF},$$

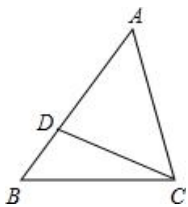
$$\because AB = 6,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}.$$

【点睛】本题考查了三角形相似的判定与性质，平行四边形的性质，角平分线的定义，等腰三角形的性质，证明 $DE = AD = 4$ 是解题的关键.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 5$, 点 D 在边 AB 上, $AC^2 = AD \cdot AB$, 那么 $CD =$ _____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】根据 $AC^2 = AD \cdot AB$ 可以得到 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形对应边的比等于相似比和已知边的长求未知边即可.

【详解】解: $\because AC^2 = AD \cdot AB, \angle A = \angle A,$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC}$$

$$\because AB = 6, BC = 4, AC = 5,$$

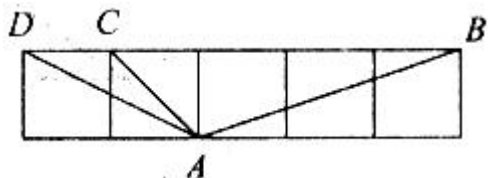
$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{CD}{4}$$

$$\text{解得: } CD = \frac{10}{3},$$

故答案为 $\frac{10}{3}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质及判定，解题的关键是利用已知条件证得两个三角形相似，然后利用相似三角形的对应边成比例求得结论.

11. 如图，5个同样大小的正方形拼成一个长方形，则 $\angle ABC + \angle ADC + \angle ACB =$ _____.



【答案】 90°

【解析】

【分析】 利用勾股定理分别计算出 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ADB$ 的各个边长，根据有三边比值相等的两三角形相似可判定 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ADB$ 相似即可求出，再根据相似三角形的性质：对应角相等和三角形外角和定理即可求出 $\angle ABC + \angle ADC + \angle ACB$ 的度数.

【详解】 设每个小正方形的边长为 1,

由勾股定理得： $AC = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$,

又 $\because DC = 1$, $BD = 5$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

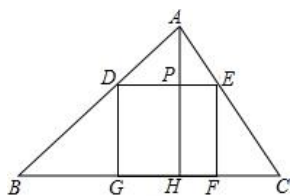
$$\therefore \angle ACB = \angle DAC + \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC + \angle ACB = 90^\circ;$$

故答案为 90° .

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和相似三角形的性质、勾股定理的运用和三角形的外角性质；证明三角形相似是解决问题的突破口.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AH \perp BC$ 于 H ，正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，点 G 、 F 在边 BC 上. 如果 $BC = 20$ ，正方形 $DEFG$ 的面积为 25，那么 AH 的长是_____.



【答案】 $\frac{20}{3}$

【解析】

【分析】根据 $DG \parallel BC$ 得 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形对应边上高的比等于相似比，列方程求解．

【详解】解：由正方形 $DEFG$ 得： $DE \parallel GF$ ，即 $DE \parallel BC$ ．

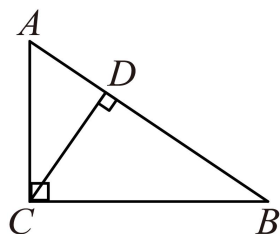
$\because AH \perp BC$ ， $\therefore AP \perp DE$ ．

$\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\therefore \frac{AP}{AH} = \frac{DE}{BC}$ ，即 $\frac{AH-5}{AH} = \frac{5}{20}$ ，解得： $AH = \frac{20}{3}$ ．

故答案为 $\frac{20}{3}$ ．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，正方形的性质，关键是由平行线得到相似三角形，利用相似三角形的性质列方程．

13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ， $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ ， $AB = 5$ ，那么 CD 的长是_____．



【答案】 2.4

【解析】

【分析】先设参数表示 AD 、 CD ，利用 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ 得到线段比例关系，求出 BD 表达式，再由 $AD + BD = AB = 5$ 列方程求解参数，最后算出 CD 长度．

【详解】解：已知 $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ ，设 $AD = 3k$ ， $DC = 4k$ ($k > 0$)

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle BCD$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD$ ，

由相似三角形对应边成比例：

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

代入 $AD = 3k$, $CD = 4k$:

$$\frac{3k}{4k} = \frac{4k}{BD},$$

$$\text{化简得 } \frac{3}{4} = \frac{4k}{BD},$$

$$\text{解得 } BD = \frac{16}{3}k,$$

$$\text{又} \because AB = AD + BD = 5,$$

$$\text{代入表达式: } 3k + \frac{16}{3}k = 5,$$

$$\frac{9k + 16k}{3} = 5,$$

$$\frac{25k}{3} = 5,$$

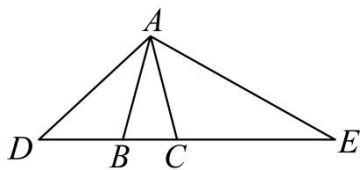
$$25k = 15,$$

$$k = \frac{15}{25} = \frac{3}{5},$$

$$\because CD = 4k, \text{ 把 } k = \frac{3}{5} \text{ 代入}$$

$$\therefore CD = 4k = 4 \times \frac{3}{5} = 2.4.$$

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 20^\circ$, D 、 E 分别在边 CB 和 BC 的延长线上, 若 $AB^2 = DB \cdot CE$, 则 $\angle DAE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】

100°

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质求出 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的度数, 进而求出 $\angle ABD$ 和 $\angle ACE$ 的度数; 利用已知等式 $AB^2 = DB \cdot CE$ 及 $AB = AC$ 推出对应边成比例, 结合夹角相等证明 $\triangle ABD \sim \triangle ECA$; 根据相似三角形的性质得到 $\angle D = \angle CAE$, 最后利用外角的性质及角的和差关系求解即可.

【详解】解: $\because AB = AC$, $\angle BAC = 20^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 180^\circ - \angle ABC, \angle ACE = 180^\circ - \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because AB^2 = DB \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{DB}{AB},$$

$$\text{又} \because AB = AC,$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{DB}{AC},$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECA$ 中,

$$\begin{cases} \frac{AB}{CE} = \frac{DB}{AC} \\ \angle ABD = \angle ACE \end{cases},$$

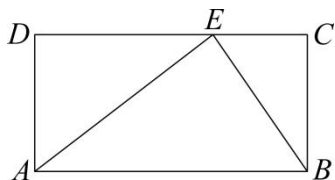
$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore \angle D = \angle CAE,$$

$$\because \angle D + \angle DAB = \angle ABC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = \angle DAB + \angle D + \angle BAC = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ.$$

15. 如果矩形一边的两个端点与它对边上的一点所构成的角是直角，那么我们就把这个点叫做矩形的“直角点”，如图，如果 E 是矩形 $ABCD$ 的一个“直角点”，且 $CD = 3EC$ ，那么 $AD:AB$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】先证明 $\triangle BEC \sim \triangle EAD$ ，可得： $\frac{BC}{ED} = \frac{CE}{DA}$ ，设 $EC = x$ ，则 $AB = CD = 3x$ ， $ED = 2x$ ，结合 $AD = BC$ ，可得： $AD = \sqrt{2}x$ ，进而可得到答案.

【详解】 $\because E$ 是矩形 $ABCD$ 的一个“直角点”，

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle EAD,$$

$$\therefore \angle D = \angle C,$$

$$\therefore \triangle BEC \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{BC}{ED} = \frac{CE}{DA},$$

$$\therefore CD = 3EC,$$

设 $EC = x$, 则 $AB = CD = 3x$, $ED = 2x$,

$$\therefore \frac{BC}{2x} = \frac{x}{DA},$$

$$\therefore AD = BC,$$

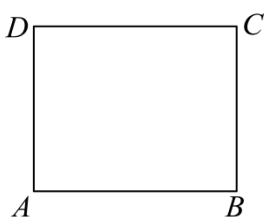
$$\therefore AD^2 = 2x \cdot x = 2x^2, \text{ 即: } AD = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AD : AB = \sqrt{2}x : 3x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故答案是: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定和性质定理, 设 $EC = x$, 用代数式表示线段长, 是解题的关键.

16. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 6$, $AD = BC = 5$, E 为射线 AB 上一点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 得到 $\triangle A_1DE$ (点 A 的对应点为 A_1). 联结 A_1A 、 A_1B , 当 $\triangle A_1AB$ 为以 AB 为腰的等腰三角形时, AE 长是 ____.



【答案】

$$\frac{15}{4} \text{ 或 } 6$$

【解析】

【分析】 点 A 为原点建立平面直角坐标系, 设 $AE = x$, 利用翻折性质得到 $DA_1 = DA = 5$, $EA_1 = EA = x$; 分 2 种情况讨论 $\triangle A_1AB$ 是以 AB 为腰的等腰三角形的条件, 分别求解 AE 的长度即可.

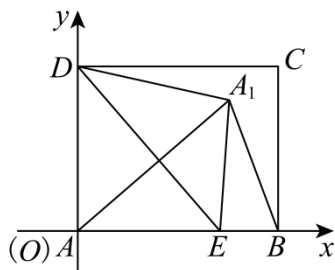
【详解】 解: 以点 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, 建立如图平面直角坐标系, 则

$A(0,0)$, $B(6,0)$, $D(0,5)$, 设 $E(x,0)(x \geq 0)$,

$\therefore \triangle ADE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle A_1DE$,

$\therefore DA_1 = DA = 5$, $EA_1 = EA = x$,

如图, 当 $A_1A = AB = 6$, 设 $A_1(p, q)$,



$\therefore A_1A = 6, DA_1 = 5, D(0,5)$,

$$\therefore \begin{cases} p^2 + q^2 = 6^2 \\ p^2 + (q-5)^2 = 5^2 \end{cases},$$

解得 $p = 4.8, q = 3.6$,

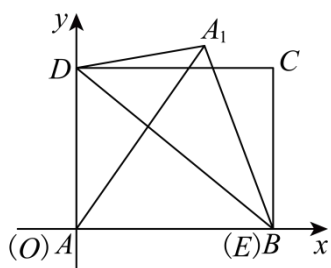
$\therefore A_1(4.8, 3.6)$,

$\therefore EA_1 = x, E(x, 0)$,

$$\therefore (4.8 - x)^2 + 3.6^2 = x^2,$$

解得 $x = \frac{15}{4}$,

如图, 当 $A_1B = AB = 6$, $A_1(p, q)$,



$\therefore A_1B = 6, DA_1 = 5, B(6,0), D(0,5)$,

$$\therefore \begin{cases} (p-6)^2 + q^2 = 6^2 \\ p^2 + (q-5)^2 = 5^2 \end{cases},$$

解得 $p = \frac{300}{61}, q = \frac{360}{61}$,

$$\therefore A_1\left(\frac{300}{61}, \frac{360}{61}\right),$$

$$\therefore EA_1 = x,$$

$$\therefore \left(\frac{300}{61} - x\right)^2 + \left(\frac{360}{61}\right)^2 = x^2,$$

解得 $x = 6$,

综上, AE 的长度为 $\frac{15}{4}$ 或 6 .

三、解答题 (第 17、18 题各 6 分, 19 题 8 分, 20、21 题各 10 分, 22 题 12 分, 共 52 分)

17. 如图, 在 6×5 的正方形网格中, 点 A, B, C 均在格点上, 请仅用无刻度直尺按下列要求完成作图. (保留作图痕迹)

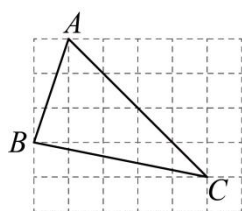


图1

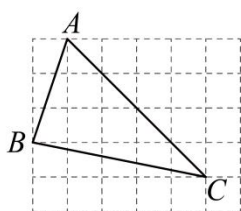
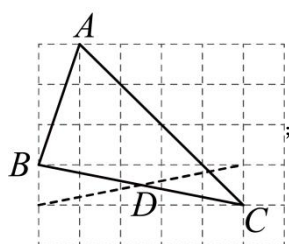


图2

- (1) 在图 1 中作出 BC 的中点;
- (2) 在图 2 中作出 $\triangle ABC$ 的重心.

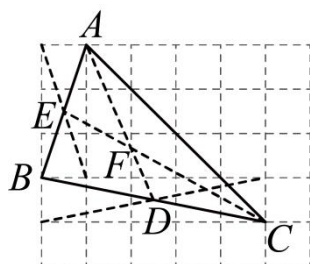
【答案】 (1)

如图, 点 D 即为所作;



(2)

如图, 点 F 即为所作;



【解析】

【分析】 本题考查作图-应用与设计，矩形的性质，以及三角形重心的定义.

(1) 利用矩形的性质即可作出 BC 的中点;

(2) 根据 $\triangle ABC$ 的重心就是三边中线的交点，即可作出图形.

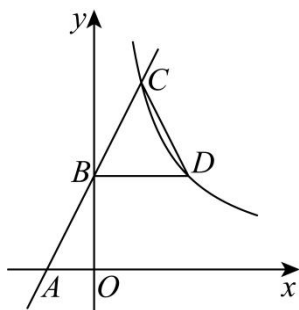
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

18. 如图，一次函数 $y = 2x + 4$ 的图象与 x 轴， y 轴分别交于 A ， B 两点，与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的图象交于点 C ，过点 B 作 x 轴的平行线与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的图象交于点 D ，连接 CD .



(1) 求 A ， B 两点的坐标;

(2) 若 $\triangle BCD$ 是以 BD 为底边的等腰三角形，求 k 的值.

【答案】 (1) $A(-2, 0)$ ， $B(0, 4)$

(2) $k = 16$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何的综合性问题，等腰三角形的三线合一性质，一次函数和反比例函数图象上的坐标特征，利用等腰三角形的三线合一性质求反比例函数图象上点的坐标是解题的关键.

(1) 对于一次函数 $y = 2x + 4$ ，分别令 $y = 0$ ，和 $x = 0$ ，即可求得答案;

(2) 过点 C 作 $CE \perp BD$ ，垂足为 E ，根据等腰三角形的三线合一性质，可得 $BE = DE$ ，于是可逐步求得点 D 和点 C 的坐标，再代入 $y = 2x + 4$ ，即可求得答案.

【小问 1 详解】

解：令 $y = 0$ ，则 $2x + 4 = 0$ ，

解得 $x = -2$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = 4$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 C 作 $CE \perp BD$, 垂足为 E ,

$\because CB = CD$, $CE \perp BD$,

$\therefore BE = DE$,

令 $y = 4$, 则 $4 = \frac{k}{x}$,

$\therefore x = \frac{k}{4}$,

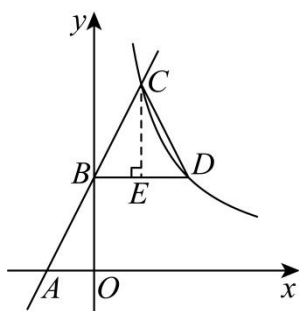
$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}k, 4\right)$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(\frac{1}{8}k, 8\right)$,

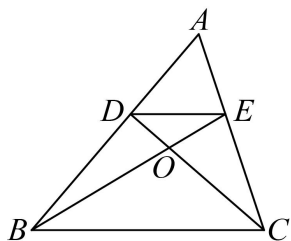
$\because$ 点 C 在一次函数 $y = 2x + 4$ 的图象上,

$\therefore \frac{1}{4}k + 4 = 8$,

解得 $k = 16$.



19. 如图, 已知点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上的两点, $DE \parallel BC$, $AD = 3$, $BD = 4$, CD 和 BE 相交于点 O , 且 $S_{\triangle DOE} = 3$, 求 $\triangle BOC$ 与 $\triangle BCD$ 的面积.



【答案】 $S_{\triangle BOC} = \frac{49}{3}$, $S_{\triangle BCD} = \frac{70}{3}$

【解析】

【分析】先通过相似三角形的判定和性质得出 $\frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{7}$ ，则 $\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{9}{49}$ ，即可求出 $\triangle BOC$ 的面积；

进一步求出 $\triangle DOB$ 的面积，即可求解。

【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+DB} = \frac{3}{7},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{7}, \quad \frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle BOC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49},$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{49}{9} S_{\triangle DOE} = \frac{49}{9} \times 3 = \frac{49}{3};$$

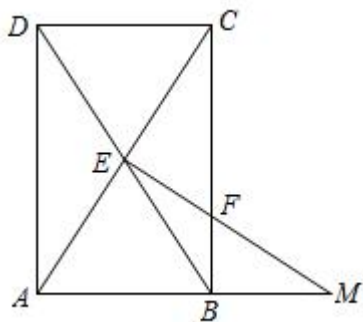
$$\text{在 } \triangle CDB \text{ 中, } \frac{OD}{OC} = \frac{3}{7},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{OD}{OC} = \frac{3}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{3}{7} S_{\triangle COB} = \frac{3}{7} \times \frac{49}{3} = 7;$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle DOB} + S_{\triangle BOC} = 7 + \frac{49}{3} = \frac{70}{3}.$$

20. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 E ，过点 E 作 AC 的垂线交边 BC 于点 F ，与 AB 的延长线交于点 M ，且 $AB \cdot AM = AE \cdot AC$ 。



求证：(1) 四边形 $ABCD$ 是矩形；

$$(2) DE^2 = EF \cdot EM.$$

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $AB \cdot AM = AE \cdot AC$ 可得 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AM}$, 又 $\angle CAB = \angle EAM$, 从而推出 $\triangle ABC \sim \triangle AEM$, 继而推出 $\angle ABC = \angle AEM = 90^\circ$, 从而可得出结论;

(2) 先证明 $\triangle EFB \sim \triangle EBM$, 从而推出 $\frac{EB}{EM} = \frac{EF}{EB}$, 得出 $EB^2 = EF \cdot EM$, 又 $DE = BE$, 从而可得出结论.

【详解】证明: (1) $\because AB \cdot AM = AE \cdot AC$, $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AM}$,

又 $\angle CAB = \angle EAM$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEM$,

$\therefore \angle ABC = \angle AEM = 90^\circ$,

又四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形;

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $\therefore AE = BE = DE = CE$,

$\therefore \angle EAB = \angle EBA$, 又 $\angle EAB + \angle M = 90^\circ$, $\angle EBA + \angle EBF = 90^\circ$

$\therefore \angle M = \angle EBF$,

又 $\angle FEB = \angle BEM$,

$\therefore \triangle EFB \sim \triangle EBM$,

$\therefore \frac{EB}{EM} = \frac{EF}{EB}$,

$\therefore EB^2 = EF \cdot EM$,

$\therefore DE^2 = EF \cdot EM$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质, 矩形的判定与性质以及等腰三角形的性质等知识, 综合运用基本性质进行推理是解题的关键.

21. 综合与实践

【问题情境】某数学兴趣小组研究了课本教材中的《折纸与数学》, 思索折纸与角的关系, 寻求新的折纸方法, 其内容如下:

如果我们身旁没有量角器或三角尺, 又需要作 60° 、 30° 、 15° 等大小的角, 可以采用下面的方法 (如图 1):

(1) 对折矩形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF , 把纸片展平;

(2) 再一次折叠纸片, 使点 B 落在 EF 上, 并使折痕经过点 A , 得到折痕 AM , 点 B 、 E 的对应点分别为 B' 、 E' , 把纸片展平.

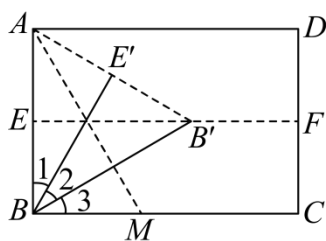


图1

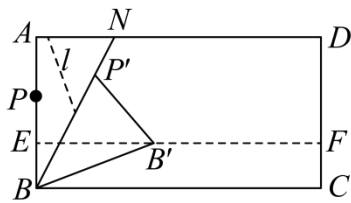


图2

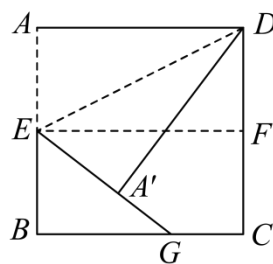


图3

(1) 【知识运用】请根据上述过程，连接 AB' 、 BB' 、 BE' ，观察图 1 中 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ，试猜想这三个角的大小关系是_____；

(2) 【拓展提升】小华再次探究，寻找等分角的方法：如图 2，点 N 为边 AD 上的一点，连接 BN ，在 AB 上取一点 P ，折叠纸片，使 B 、 P 两点重合，展平纸片，得到折痕 EF ；折叠纸片，使点 B 、 P 分别落在 EF 、 BN 上，得到折痕 l ，点 B 、 P 的对应点分别为 B' 、 P' ，展平纸片，连接 BB' 、 $P'B'$ 。求证： BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线；

(3) 【迁移探究】兴趣小组成员继续探究三等分线段的方法：如图 3，将正方形纸片 $ABCD$ 对折，得到折痕 EF ，(其中，点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点)，连接 DE ，将纸片沿 DE 翻折，使点 A 落在点 A' 处，连接 EA' 并延长，交边 BC 于点 G ，求证： $CG:CB=1:3$ 。

【答案】(1) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

(2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由折叠的性质可推出 $AB = BB' = AB'$ ， $AE' = BE'$ ，则可证明 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，得到 $\angle ABB' = 60^\circ$ ，由三线合一定理得到 $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ$ ，再由矩形的性质和角的和差关系可得 $\angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ$ ，则 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ；

(2) 由折叠的性质可得 $BP = B'P'$ ， $\angle BPP' = \angle BB'P'$ ， $\angle BPP' = \angle BP'B'$ ， $\angle PB'E = \angle BB'E$ ，则可证明 $\triangle BPP' \cong \triangle B'BP'$ (ASA)，得到 $\angle P'BB' = \angle PB'B = 2\angle BB'E$ ；证明 $EF \parallel BC$ ，得到 $\angle BB'E = \angle CBB'$ ，可证明 $\angle P'BB' = 2\angle CBB'$ ，则 BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线；

(3) 连接 DG ，可证明 $\text{Rt}\triangle DA'G \cong \text{Rt}\triangle DCG$ (HL)，得到 $A'G = CG$ ；设 $AB = BC = 2x$ ， $CG = y$ ，则 $BG = 2x - y$ ， $EG = x + y$ ；由勾股定理得 $(x + y)^2 = x^2 + (2x - y)^2$ ，可求出 $2x = 3y$ ，即 $BC = 3CG$ ，则 $CG:CB=1:3$ 。

【小问 1 详解】

解：由折叠的性质可得 $AB' = BB'$ ， $AB = AB'$ ， $AE = BE$ ， $AE' = AE$ ， $BE = BE'$ ，
 $\therefore AB = BB' = AB'$ ， $AE' = BE'$ ，

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABB' = 60^\circ$,

又 $\because AE' = BE'$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$;

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 PB' ,

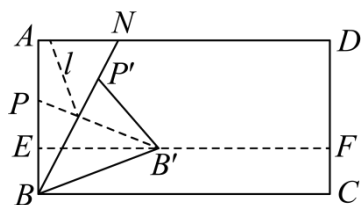


图2

由折叠可知: EF 是 PB 的垂直平分线,

$\therefore PB' = B'B$, $\angle PB'E = \angle BB'E$;

由折叠的性质可得 $BP = B'P'$, $\angle BPB' = \angle BB'P'$, $\angle BPB' = \angle BP'B'$, $\angle PB'E = \angle BB'E$,

$\therefore \triangle BPB' \cong \triangle B'BP'$ (ASA),

$\therefore \angle P'BB' = \angle PB'B = \angle PB'E + \angle BB'E = 2\angle BB'E$;

由折叠的性质可得 $EF \perp AB$,

由矩形的性质可得 $AB \perp BC$,

$\therefore EF \parallel BC$,

$\therefore \angle BB'E = \angle CBB'$,

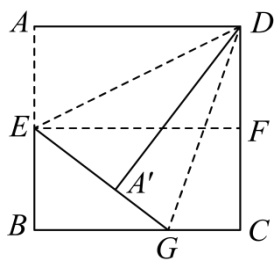
$\therefore \angle P'BB' = 2\angle CBB'$,

$\therefore \angle P'BC = 3\angle CBB'$,

$\therefore BB'$ 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线;

【小问 3 详解】

证明: 如图所示, 连接 DG ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AD = CD = AB = BC,$$

由折叠的性质可得 $AE = A'E$, $AD = A'D$, $\angle DAE = \angle DA'E = 90^\circ$,

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle DA'G = 180^\circ - \angle DA'E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'G = \angle C,$$

又 $\because DG = DG$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle DA'G \cong \text{Rt}\triangle DCG \text{ (HL)},$$

$$\therefore A'G = CG;$$

设 $AB = BC = 2x$, $CG = y$, 则 $BG = 2x - y$,

$\because$ 点 E 为 AB 的中点,

$$\therefore AE = BE = A'E = x,$$

$$\therefore EG = x + y;$$

在 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中, 由勾股定理得 $EG^2 = BE^2 + BG^2$,

$$\therefore (x + y)^2 = x^2 + (2x - y)^2,$$

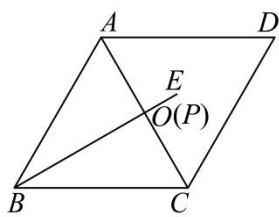
$$\therefore 2x^2 = 3xy,$$

$$\because x > 0,$$

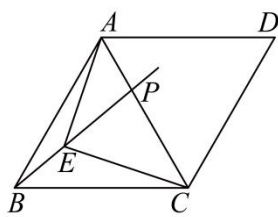
$$\therefore 2x = 3y, \text{ 即 } BC = 3CG,$$

$$\therefore CG : CB = 1 : 3.$$

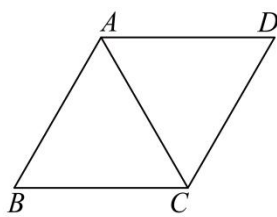
22. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 P 为线段 AC 上一动点, 点 E 为射线 BP 上的一点 (点 E 与点 B 不重合).



图①



图②



备用图

【问题解决】

(1) 如图①, 若点 P 与线段 AC 的中点 O 重合, 则 $\angle PBC =$ _____ 度, 线段 BP 与线段 AC 的位置关系是 _____;

【问题探究】

(2) 如图②, 在点 P 运动过程中, 点 E 在线段 BP 上, 且 $\angle AEP = 30^\circ$, $\angle PEC = 60^\circ$, 探究线段 BE 与线段 EC 的数量关系, 并说明理由;

【拓展延伸】

(3) 在点 P 运动过程中, 将线段 BE 绕点 E 逆时针旋转 120° 得到 EF , 射线 EF 交射线 BC 于点 G , 若 $BE = 2FG$, $AB = 5$, 求 AP 的长.

【答案】 (1) 30 , $BP \perp AC$; (2) $CE = 2BE$, 理由见解析; (3) AP 的长为 2 或 $\frac{10}{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据菱形的性质证明 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 再结合等边三角形的性质可得答案;

(2) 如图, 把 $\triangle ABE$ 绕 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle CBQ$, 证明 $\triangle BEQ$ 为等边三角形, 可得

$$\angle BEQ = 60^\circ = \angle BQE, BE = EQ, \text{ 求解 } \angle BEQ = \angle CEQ = 60^\circ, \angle AEB = \angle BQC = 150^\circ,$$

$$\angle EQC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ, \text{ 可得 } \angle ECQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \text{ 进一步可得结论;}$$

(3) 如图, 当 P 在线段 OA 上, 记 BP 与 AD 交于点 H , 证明 $\triangle HAB \sim \triangle BEG$, 可得 $\frac{AH}{AB} = \frac{BE}{EG}$, 设 $FG = x$, 则 $EF = BE = 2x$, 可得 $AH = \frac{10}{3}$, 证明 $\triangle APH \sim \triangle CPB$, 再进一步解答即可; 如图, 当 P 在线段 OC 上时, 延长 AD 交 BP 于 H , 同理可得: $\triangle BAH \sim \triangle GEB$, 设 $BE = EF = 2m$, 而 $BE = 2FG$, 则 $GF = EG = m$, 可得 $AH = 10$, 证明 $\triangle APH \sim \triangle CPB$, 再进一步可得答案.

【详解】 解: (1) $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

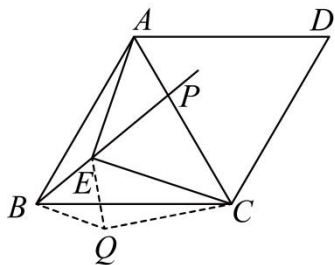
$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形,}$$

$\therefore$ 点 P 与线段 AC 的中点 O 重合,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, \quad BP \perp AC;$$

(2) 如图, 把 $\triangle ABE$ 绕 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle CBQ$,



$$\therefore BE = BQ, \quad \angle EBQ = 60^\circ, \quad \angle AEB = \angle BQC,$$

$\therefore \triangle BEQ$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BEQ = 60^\circ = \angle BQE, \quad BE = EQ,$$

$\therefore$ 点 E 在线段 BP 上, 且 $\angle AEP = 30^\circ, \angle PEC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AEB = 150^\circ, \quad \angle BEC = 360^\circ - 150^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

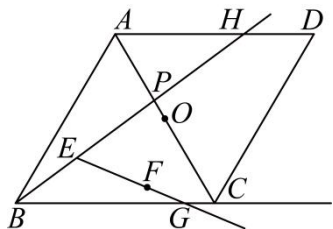
$$\therefore \angle BEQ = \angle CEQ = 60^\circ, \quad \angle AEB = \angle BQC = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle EQC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = 2EQ = 2BE;$$

(3) 如图, 当 P 在线段 OA 上, 记 BP 与 AD 交于点 H ,



$$\therefore AH \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle CBH,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 120^\circ = \angle BEG,$$

$$\therefore \triangle HAB \sim \triangle BEG,$$

$$\therefore \frac{AH}{AB} = \frac{BE}{EG},$$

设 $FG = x$ ，则 $EF = BE = 2x$ ，

$$\therefore EG = 3x,$$

$$\therefore \frac{2x}{3x} = \frac{AH}{5},$$

$$\therefore AH = \frac{10}{3},$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle APH \sim \triangle CPB,$$

$$\therefore \frac{AH}{BC} = \frac{AP}{PC},$$

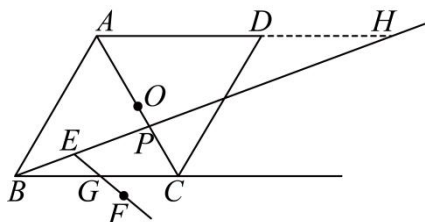
$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{2}{3},$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AC = AB = 5,$$

$$\therefore AP = 5 \times \frac{2}{5} = 2,$$

如图，当 P 在线段 OC 上时，延长 AD 交 BP 于 H ，



同理可得： $\angle H = \angle PBC$ ， $\angle BAH = \angle BEG = 120^\circ$ ，

$$\therefore \triangle BAH \sim \triangle GEB,$$

设 $BE = EF = 2m$ ，而 $BE = 2FG$ ，则 $GF = EG = m$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AH} = \frac{EG}{BE} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AH = 10,$$

同理： $\triangle APH \sim \triangle CPB$ ，

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{AH}{BC} = 2,$$

$$\therefore AP = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$

综上： AP 的长为 2 或 $\frac{10}{3}$ 。

【点睛】 本题考查的是等边三角形的判定与性质，菱形的性质，旋转的性质，相似三角形的判定与性质，含 30° 角的直角三角形的性质，本题的难度大，作出合适的辅助线是解本题的关键.