

2025 学年八年级第二学期数学节点练习

一、选择题 ((本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分))

1. 过某个多边形一个顶点的所有对角线, 将这个多边形分成 6 个三角形, 则这个多边形的内角和是 ()

- A. 1080° B. 720° C. 1400° D. 540°

【答案】A

【解析】

【分析】根据“从 n 边形的一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线, 这些对角线将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形”确定 n 的值, 再代入内角和公式: $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$, n 为正整数) 进行计算即可.

【详解】解: $\because$ 过某个多边形一个顶点的所有对角线, 将这个多边形分成 6 个三角形, 设该多边形的边数为 n ,

$$\therefore n-2=6,$$

$$\text{解得: } n=8,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和是: } (8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ.$$

2. 下列四组条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

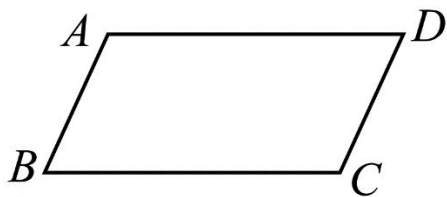
- A. $AD=BC$, $AD \parallel BC$ B. $AD \parallel BC$, $AB=DC$
C. $AD=BC$, $AB=DC$ D. $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理判断即可.

【详解】解: 如图所示,



A. $\because AD=BC$, $AD \parallel BC$,

四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (一组对边平行且相等的四边形是平行四边形), 故该选项不符合题意;

B. $\because AD \parallel BC$, $AB=DC$,

$\therefore$ 一组对边平行, 另一组对边相等, 不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故该选项符合题意;

C. $\because AD=BC$, $AB=DC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (两组对边分别相等的四边形是平行四边形), 故该选项不符合题意;

D. $\because AD \parallel BC, AB \parallel DC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (两组对边分别平行的四边形是平行四边形), 故该选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定, 熟练掌握平行四边形的判定条件是解题的关键.

3. 四边形具有不稳定性, 从数学角度看不稳定性主要体现在 ()

A. 内角可发生变化

B. 边长发生变化

C. 周长发生变化

D. 内角和发生变化

【答案】 A

【解析】

【分析】 四边形的不稳定性是指在边长固定的情况下, 其形状可以发生改变, 导致内角发生变化, 而周长和内角和保持不变.

根据稳定性的变化逐一判断即可.

【详解】 A: 四边形边长固定时, 通过调整形状, 内角会改变, 体现不稳定性, 故 A 正确;

B: 不稳定性指边长固定时形状改变, 边长本身不变, 故 B 错误;

C: 周长是边长的总和, 边长固定则周长不变, 故 C 错误;

D: 四边形的内角和恒为 360° , 与形状无关, 故 D 错误;

故选: A.

4. 如果矩形的一边与对角线的夹角是 50° , 则两条对角线相交所成的锐角的度数为 ()

A. 50°

B. 60°

C. 70°

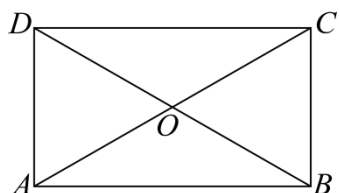
D. 80°

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据矩形的性质和等边对等角, 进行求解即可.

【详解】 解: 如图, 矩形 $ABCD$, $\angle ADB = 50^\circ$,



则: $OA = OB = OC = OD$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 50^\circ, \angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$,

$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ, \angle COD = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ,$$

$\therefore$ 两条对角线相交所成的锐角的度数为 80° ;

故选 D.

【点睛】 本题考查矩形的性质，等腰三角形的判定和性质. 熟练掌握矩形的对角线相等且平分，是解题的关键.

5. 下列命题中，假命题是 ()

A. 矩形的对角线相等

B. 菱形的对角线互相垂直

C. 正方形的对角线相等且互相垂直

D. 平行四边形的对角线相等

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查判断命题的真假，根据矩形的性质，菱形的性质，正方形的性质和平行四边形的性质，逐一进行判断即可. 熟练掌握相关性质，是解题的关键.

【详解】 解： A、矩形的对角线相等，是真命题，不符合题意；

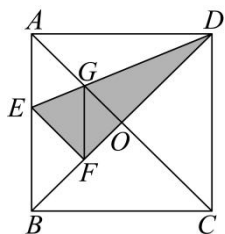
B、菱形的对角线互相垂直，是真命题，不符合题意；

C、正方形的对角线相等且互相垂直，是真命题，不符合题意；

D、平行四边形的对角线互相平分，不一定相等，原命题是假命题，符合题意；

故选： D.

6. 如图，在正方形纸片 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，折叠正方形纸片 $ABCD$ ，使 AD 落在 BD 上，点 A 恰好与 BD 上的点 F 重合，展开后，折痕 DE 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 G ，连接 GF ，下列结论：① $\angle AGD = 112.5^\circ$ ；② $\frac{AD}{AE} = 2$ ；③ $S_{\triangle AGD} = S_{\triangle OGD}$ ；④ 四边形 $AEFG$ 是菱形；⑤ $BE = 2OG$ ，其中正确结论有 () 个



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】

【分析】 ①由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ$ ，又由折叠的性质，可求得 $\angle ADG$ 的度数；②由 $AE = EF < BE$ ，可得 $AD > 2AE$ ；③由 $AG = GF > OG$ ，可得 $\triangle AGD$ 的面积 $>$ $\triangle OGD$ 的面积；

④由折叠的性质与平行线的性质，易得 $\triangle EFG$ 是等腰三角形，即可证得 $AE = GF$ ，易证得四边形 $AEFG$ 是菱形；⑤由菱形性质，等腰直角三角形的性质，勾股定理，即可得 $BE = 2OG$ 。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ,$$

$$\text{由折叠的性质可得：}\angle ADG = \frac{1}{2}\angle ADO = 22.5^\circ$$

$$\text{故}\angle AGD = 180^\circ - 45^\circ - 22.5^\circ = 112.5^\circ, \text{故①正确.}$$

$$\because \text{由折叠的性质可得：} AE = EF, \angle EFD = \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\angle AE = EF < BE,$$

$$\angle AE < \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} > 2,$$

$$\therefore AD > 2AE, \text{故②错误.}$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\angle AG = FG > OG, \triangle AGD \text{与} \triangle OGD \text{同高},$$

$$\therefore S_{\triangle AGD} > S_{\triangle OGD}, \text{故③错误.}$$

$$\because \angle EFD = \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\angle FEG = \angle AGE,$$

$$\because \angle AGE = \angle FGE,$$

$$\angle FEG = \angle FGE,$$

$$\therefore EF = GF,$$

$$\because AE = EF,$$

$$\therefore AE = GF,$$

$$\because AE = EF = GF, AG = GF,$$

$$\angle AE = EF = GF = AG,$$

$$\therefore \text{四边形} AEFG \text{是菱形},$$

$$\text{故四边形} AEFG \text{是菱形, 故④正确.}$$

$$\because \text{四边形} AEFG \text{是菱形},$$

$$\angle OGF = \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OGF = \angle OFG = 45^\circ,$$

$$\therefore OF = OG,$$

$$\therefore EF = GF = \sqrt{OF^2 + OG^2} = \sqrt{2}OG,$$

同理可得 $BE = \sqrt{2}EF = \sqrt{2} \times \sqrt{2}OG = 2OG$. 故⑤正确.

故选: C.

【点睛】此题考查的是折叠的性质, 正方形的性质, 等腰直角三角形的性质以及菱形的判定与性质等知识. 此题综合性较强, 难度较大, 注意掌握折叠前后图形的对应关系, 注意数形结合思想的应用.

二、填空题 (本大题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

7. 如果一个多边形的每一个外角都是 45° , 那么这个多边形的边数为_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形外角和定理, 多边形的外角和为 360° , 每个外角都是 45° , 因此边数为外角和除以每个外角的度数的值.

【详解】 解: $360 \div 45 = 8$,

$\therefore$ 这个多边形的边数为 8,

故答案为: 8.

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 40^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数是_____.

【答案】 110° ## 110 度

【解析】

【分析】 根据平行四边形的邻角互补, 得到 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, 再根据对角相等, 即可得解.

【详解】 解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 40^\circ$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$,

$$\therefore 2\angle A = 220^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 110^\circ,$$

故答案为: 110° .

【点睛】 本题考查平行四边形的性质. 熟练掌握平行四边形的对角相等, 邻角互补, 是解题的关键.

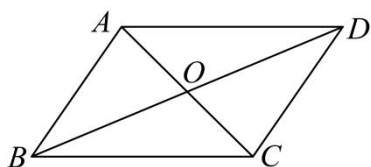
9. 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 30 厘米, AC 、 BD 相交于点 O , 且 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长小 5 厘米, 则 $AB =$ _____厘米.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质结合已知得出 $AB + BC = 15$ 厘米, $BC - AB = 5$ 厘米, 进而得出答案.

【详解】 解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AC 、 BD 相交于点 O ,

$\therefore OA = OC$, $AB = CD$, $AD = BC$,

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 30 厘米,

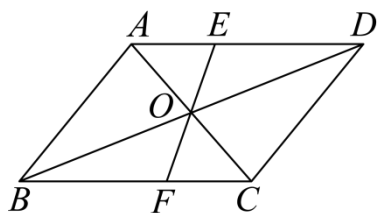
$\therefore 2(AB + BC) = 30$ 厘米, 即 $AB + BC = 15$ 厘米,

$\because \triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长小 5 厘米,

$\therefore BC - AB = 5$ 厘米,

$\therefore BC = 10$ 厘米, $AB = 5$ 厘米.

10. 如图, EF 过平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点 O , 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 若平行四边形 $ABCD$ 的周长是 36, $OE = 3$, 则四边形 $ABFE$ 的周长为_____.



【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质及全等三角形的判定与性质. 先由 ASA 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 得 $OE = OF$, $AE = CF$, 再求得 $AB + BC = 18$, 由四边形 $ABFE$ 的周长 $= AB + AE + BF + EF = AB + BF + CF + 2OE$, 即可求得答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 对角线的交点为 O ,

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$, $OA = OC$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,
$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF(ASA)$,

$\therefore OE = OF$, $AE = CF$,

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 36,

$$\therefore AB + BC = \frac{1}{2} \times 36 = 18,$$

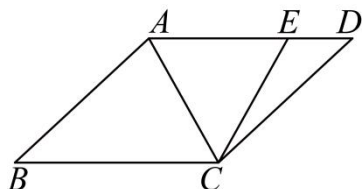
$$\therefore \text{四边形 } ABFE \text{ 的周长} = AB + AE + BF + EF$$

$$= AB + BF + CF + 2OE$$

$$= AB + BC + 2 \times 3 = 18 + 6 = 24,$$

故答案为：24.

11. 如图，在 $\square ABCD$ 中，若 $\angle ACB = 54^\circ$ ， $\angle D = 40^\circ$ ， $AE = AC$ ，则 $\angle ECD =$ _____.



【答案】 23° ##23 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的性质，三角形外角性质，由平行四边形的性质得 $AD \parallel BC$ ，即得 $\angle CAE = \angle ACB = 54^\circ$ ，进而根据等腰三角形的性质得 $\angle AEC = \angle ACE = 63^\circ$ ，再根据三角形的外角性质即可求解，熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 解： $\because \square ABCD$ ，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACB = 54^\circ,$$

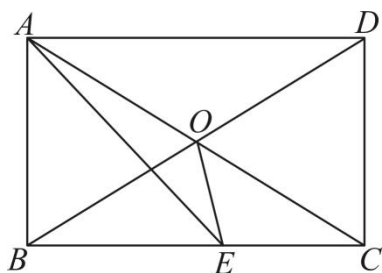
$$\because AE = AC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle AEC - \angle D = 63^\circ - 40^\circ = 23^\circ,$$

故答案为： 23° .

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， AC, BD 相交于点 O ， AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E ，若 $\angle DAO = 30^\circ$ ，则 $\angle BEO$ 为_____.



【答案】 75° ##75 度

【解析】

【分析】由矩形 $ABCD$ ，得到 $OA = OB$ ，根据 AE 平分 $\angle BAD$ ，得到等边三角形 OAB ，推出 $AB = OB$ ，求出 $\angle OAB$ 、 $\angle OBC$ 的度数，根据平行线的性质和等角对等边得到 $OB = BE$ ，根据三角形的内角和定理即可求出答案.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC, AC = BD, OA = OC, OB = OD, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore OA = OB, \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE = 45^\circ = \angle AEB,$$

$$\therefore AB = BE, \quad \because \angle DAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle DAE - \angle DAO = 15^\circ, \quad \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAO \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore AB = OB, \angle ABO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

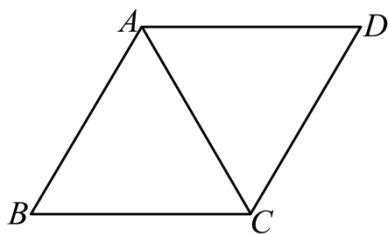
$$\because AB = OB = BE,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BEO = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

故答案为 75° .

【点睛】本题主要考查了三角形的内角和定理，矩形的性质，等边三角形的性质和判定，平行线的性质，角平分线的性质，等腰三角形的判定等知识点，解此题的关键是求出 $\angle OBC$ 的度数和求 $OB = BE$.

13. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 10$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积为_____.

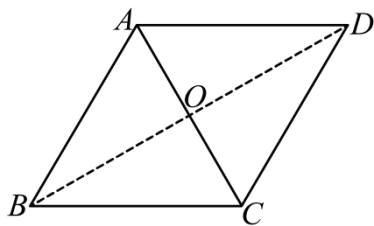


【答案】 $50\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先证明 ABC 是等边三角形，求出 $AC = 10$ ， $BD = 10\sqrt{3}$ ，进而利用菱形的面积公式即可解决问题.

【详解】解：如图，连接 BD ，交 AC 于 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ， $AB = AD = 10$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC = 10$ ， $\angle ABO = 30^\circ$ ，

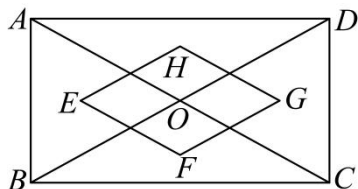
$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 5$ ，

$\therefore BO = \sqrt{3}OA = 5\sqrt{3}$ ，

$\therefore BD = 2BO = 10\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ 。

14. 如图，矩形 $ABCD$ 的面积为 24，对角线 AC 、 BD 交于点 O 。如果 E 、 F 、 G 、 H 分别是 $\triangle ABO$ 、 $\triangle BCO$ 、 $\triangle CDO$ 、 $\triangle ADO$ 的重心，那么四边形 $EFGH$ 的面积是_____。



【答案】 $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】根据矩形 $ABCD$ 可得 $OA = OB = OC = OD$ ， $S_{AOB} = S_{COB} = S_{COD} = S_{AOD} = 6$ ，连接 OE 并延长交 AB 于 M ，连接 OF 并延长交 BC 于 N ，连接 MN ，由重心，可得 $OE = 2ME$ ， $OF = 2FN$ ， $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ ， $BN = CN = \frac{1}{2}BC$ ，则 $\frac{OE}{OM} = \frac{2}{3} = \frac{OF}{ON}$ ， $S_{MOB} = \frac{1}{2}S_{AOB} = 3$ ， $S_{NOB} = \frac{1}{2}S_{COB} = 3$ ， $OM \perp AB$ ， $ON \perp BC$ ，即可证明四边形 $OMBN$ 是矩形，得到 $S_{OMN} = \frac{1}{2}S_{\text{四边形}OMBN} = 3$ ，接着证明 $\triangle EOF \sim \triangle MON$ ，得到 $S_{EOF} = \frac{4}{9}S_{OMN} = \frac{4}{3}$ ，

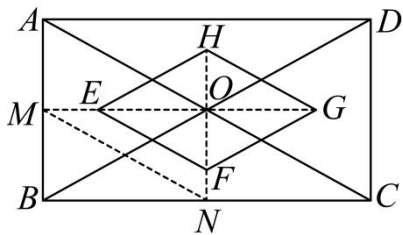
同理可得 $S_{EOF} = S_{EOH} = S_{HOG} = S_{GOF} = \frac{4}{3}$, 最后根据四边形 $EFGH$ 的面积

$= S_{EOF} + S_{EOH} + S_{HOG} + S_{GOF}$ 计算即可.

【详解】解: $\because$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 24,

$$\therefore OA = OB = OC = OD, S_{AOB} = S_{COB} = S_{COD} = S_{AOD} = 6,$$

连接 OE 并延长交 AB 于 M , 连接 OF 并延长交 BC 于 N , 连接 MN ,



$\because E, F, G, H$ 分别是 $\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle CDO, \triangle ADO$ 的重心,

$$\therefore OE = 2ME, OF = 2FN, AM = BM = \frac{1}{2}AB, BN = CN = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{OE}{OM} = \frac{2}{3} = \frac{OF}{ON}, S_{MOB} = \frac{1}{2}S_{AOB} = 3, S_{NOB} = \frac{1}{2}S_{COB} = 3, OM \perp AB, ON \perp BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BMO = \angle BNO = 90^\circ, S_{\text{四边形} OMBN} = S_{MOB} + S_{NOB} = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $OMBN$ 是矩形,

$$\therefore S_{OMN} = \frac{1}{2}S_{\text{四边形} OMBN} = 3,$$

$$\therefore \frac{OE}{OM} = \frac{2}{3} = \frac{OF}{ON}, \angle EOF = \angle MON,$$

$$\therefore \triangle EOF \sim \triangle MON,$$

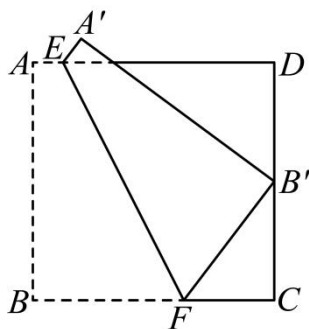
$$\therefore \frac{S_{\triangle EOF}}{S_{\triangle OMN}} = \left(\frac{OE}{OM}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{EOF} = \frac{4}{9}S_{OMN} = \frac{4}{3},$$

$$\text{同理可得 } S_{EOF} = S_{EOH} = S_{HOG} = S_{GOF} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的面积是 } S_{EOF} + S_{EOH} + S_{HOG} + S_{GOF} = \frac{4}{3} \times 4 = \frac{16}{3}.$$

15. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, 将正方形沿着 EF 翻折, 点 B 恰好落在 CD 边上的点 B' 处, 若四边形 $ABFE$ 的面积为 6, 则线段 DE 的长为_____.

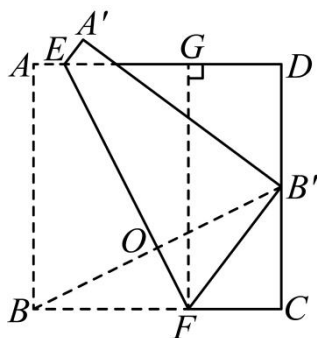


【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，图形翻折的特征，矩形的判定和性质，三角形全等判定和性质，勾股定理，作出合理的辅助线是解决问题的关键．连接 BB' 交 EF 于 O ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ．根据四边形 $ABFE$ 的面积为 6，得到 $AE + BF = 3$ ，设 $AE = x$ ，利用翻折特征，得到 $BB' \perp EF$ ，证明 $\triangle EGF \cong \triangle B'CB$ ，依次得到 $B'C = EG = 3 - 2x$ ， $B'F = 3 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle FB'C$ 利用勾股定理即可解决问题．

【详解】 解：连接 BB' 交 EF 于 O ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是梯形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 的面积为 $S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF) \cdot AB = 6$ ，又 $AB = 4$ ，

$\therefore AE + BF = 3$ ，

设 $AE = x$ ，则 $BF = 3 - x$ ， $FC = BC - BF = 4 - (3 - x) = 1 + x$ ，

$\because AD \parallel BC$ ， $FG \perp AD$ ， $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GDCF$ 为矩形，

$\therefore GD = FC = 1 + x$ ，

$\therefore EG = AD - AE - GD = 4 - x - (1 + x) = 3 - 2x$ ，

$\because$ 四边形 $GDCF$ 为矩形，

$$\therefore \angle EFB + \angle EFG = 90^\circ,$$

$\because$ 点 B' 是点 B 沿着 EF 的翻折点,

$$\therefore BB' \perp EF,$$

$$\therefore \angle B'BC + \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle B'BC, \text{ 又 } FG = CD = BC, \angle EGF = \angle B'CB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EGF \cong \triangle B'CB,$$

$$\therefore B'C = EG = 3 - 2x,$$

在 $\text{Rt}\triangle FB'C$ 中, 根据翻折特征, $B'F = BF = 3 - x$, 利用勾股定理得,

$$B'F^2 = B'C^2 + FC^2, \text{ 即 } (3-x)^2 = (3-2x)^2 + (1+x)^2,$$

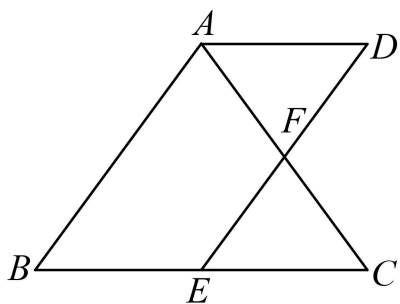
$$\text{解得 } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = AD - AE = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{2}.$$

三、简答题 (16 题 12 分, 17 题 12 分, 18 题 16 分, 共 40 分)

16. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AC 的中点, 过点 A 作 BC 的平行线, 交射线 EF 于点 D .



(1) 求证: 四边形 $ABED$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AB = AC$, 连接 AE 、 CD , 求证: 四边形 $AECD$ 为矩形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据三角形中位线的性质得到 $DE \parallel AB$, 根据平行四边形的判定定理即可得到结论;

(2) 连接 AE , 先证明四边形 $AECD$ 为平行四边形, 再根据等腰三角形的性质得到 $\angle AEC = 90^\circ$, 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明：∵点 E 、 F 分别是 BC 、 AC 边上的中点，

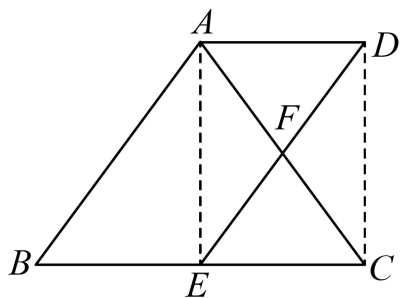
∴ $DE \parallel AB$ ，

又∵ $AD \parallel BC$ ，

∴ 四边形 $ABED$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明：连接 AE 、 CD ，如图，



由 (1) 知：四边形 $ABED$ 是平行四边形，

∴ $AD = BE$ ，

∵ 点 E 是边上的中点

∴ $BE = CE$

∴ $AD = CE$

又∵ $AD \parallel BC$ ，

∴ 四边形 $AECD$ 为平行四边形，

∵ $AB = AC$ ， $BE = CE$ ，

∴ $AE \perp BC$ ，

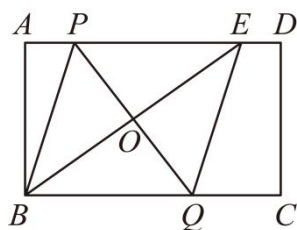
∴ $\angle AEC = 90^\circ$ ，

∴ 四边形 $AECD$ 为矩形。

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定和性质，矩形的判定，三角形中位线的性质，等腰三角形的性质，正确的识别图形是解题的关键。

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 AD 上一点， PQ 垂直平分 BE ，分别交 AD 、 BE 、 BC 于点 P 、 O 、 Q ，

连接 BP 、 EQ ， $AB = 6$ ， $BE = 10$ ；



(1) 求 PE 的长;

(2) 求四边形 $BPEQ$ 的面积.

【答案】 (1) $PE = \frac{25}{4}$

(2) $\frac{75}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据垂直平分线的性质得 $PB = PE$, 再由勾股定理求出 $AE = 8$,

设 $PE = BP = x$, 则 $AP = 8 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $AP^2 + AB^2 = BP^2$, 由此列方程求解即可;

(2) 先判定 $\triangle BOQ \cong \triangle EOP$ (ASA), 即可得出 $PE = QB$, 进而得到四边形 $BPEQ$ 是平行四边形, 即可求四边形 $BPEQ$ 的面积.

【小问 1 详解】

解: $\because PQ$ 垂直平分 BE ,

$$\therefore PB = PE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$

设 $PE = BP = x$, 则 $AP = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $AP^2 + AB^2 = BP^2$,

$$\text{即 } (8 - x)^2 + 6^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{4},$$

$$\therefore PE = \frac{25}{4};$$

【小问 2 详解】

解: $\because PQ$ 垂直平分 BE ,

$$\therefore PB = PE, \quad OB = OE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PEO = \angle QBO,$$

在 $\triangle BOQ$ 与 $\triangle EOP$ 中,

$$\begin{cases} \angle PEO = \angle QBO \\ BO = OE \\ \angle POE = \angle QOB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOQ \cong \triangle EOP (\text{ASA}),$$

$$\therefore PE = QB,$$

$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BPEQ$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\text{四边形}BPEQ} = PE \cdot AB = \frac{25}{4} \times 6 = \frac{75}{2}.$$

18. 问题发现

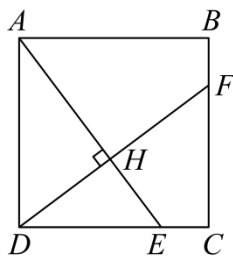


图1

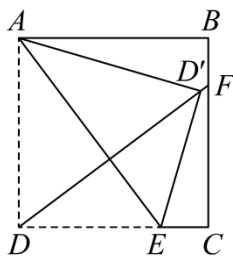


图2

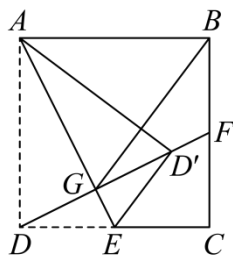


图3

(1) 基本模型——十字架模型

如图1所示, 在正方形 $ABCD$ 内, 点 E 在边 DC 上, 点 F 在边 BC 上, AE 、 DF 交于点 H , ①若 $AE \perp DF$ 则有结论 $AE = DF$; ②反之若有 $AE = DF$, 则有结论 $AE \perp DF$.

对于上述问题请选择一个命题加以证明.

(2) 模型运用

如图2, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, 点 E 在边 CD 上 (不与 C 、 D 重合), 连接 AE , 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折, 得到 $\triangle AD'E$, 连接 DD' 并延长交 BC 于点 F' .

①若 $DE = 3$, 求 DD' 的值.

②如图3, 若 AE 与 DF 交于点 G , 连接 BG , 若 $BG \parallel D'E$, 求证: $\triangle ADD' \cong \triangle BAG$.

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $DD' = \frac{24}{5}$; ②见解析

【解析】

【分析】 (1) ①根据正方形的性质以及同角的余角相等, 找到相等的边和角, 利用 ASA 证明 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$, 进而可得 $AE = DF$;

②根据正方形的性质得内角为 90° , 根据 HL 证明 $Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle DCF$, 得 $\angle DAE = \angle CDF$, 进而得 $\angle ADF + \angle CDF = \angle ADF + \angle DAE = 90^\circ$, 从而证明 $AE \perp DF$;

(2) ①先根据勾股定理求 AE 的长, 记 AE 与 DD' 相交于点 O , 由翻折得 $AE \perp DD'$ 、 $DD' = 2DO$, 根据等面积法得 $DO = \frac{12}{5}$, 进而根据 $DD' = 2DO$ 计算 DD' ;

②根据正方形和翻折性质得 $AB = AD = AD'$, 根据 $BG \parallel D'E$, 翻折后 $AE \perp DD'$ 和 $Rt\triangle AD'E$ 的性质证明 $\angle ADD' = \angle AED'$, 根据等腰三角形三线合一得 $\angle ADD' = \angle AD'D$, 由 $BG \parallel D'E$ 得 $\angle BGA = \angle AED'$, 由 $AB \parallel CD$ 得 $\angle BAG = \angle AED$, 由翻折得 $\angle AED = \angle AED'$, 等量代换后, 根据 AAS 证明 $\triangle ADD' \cong \triangle BAG$.

【小问 1 详解】

选择①, 证明如下:

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD = DC, \quad \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp DF, \quad \therefore \angle AHD = 90^\circ, \quad \therefore \angle ADF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle CDF \\ AD = DC \\ \angle ADE = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF (ASA),$$

$$\therefore AE = DF;$$

选择②, 证明如下:

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ, \quad AD = DC,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} AD = DC \\ AE = DF \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle DCF (HL),$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle CDF = \angle ADF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp DF;$$

【小问 2 详解】

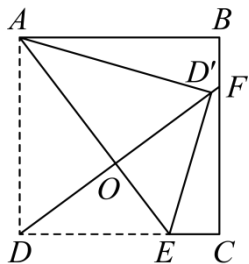
①解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AB = 4$ ，

$$\therefore AD = AB = 4, \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

由翻折得， AE 垂直平分 DD' ，

记 AE 与 DD' 相交于点 O ，则 $AE \perp DD'$ ，且 $DD' = 2DO$ ，



在 $Rt\triangle ADE$ 中，

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AD \cdot DE = \frac{1}{2} \times AE \cdot DO, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times DO,$$

$$\text{解得, } DO = \frac{12}{5},$$

$$\therefore DD' = 2DO = \frac{24}{5};$$

②证明：由翻折得， $AD = AD'$ ， $\angle AED = \angle AED'$ ， $\angle AD'E = \angle ADE = 90^\circ$ ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = AD = AD', AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle AED,$$

$$\because BG \parallel D'E,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle AED',$$

$$\therefore \angle BAG = \angle AED = \angle AED' = \angle BGA,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle BGA,$$

由翻折得， AE 垂直平分 DD' ，

$\therefore \triangle ADD'$ 是等腰三角形， AE 是 $\angle DAD'$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ADD' = \angle AD'D,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AD'E \text{ 中, } \angle AD'E = 90^\circ, \therefore \angle D'AE + \angle AED' = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOD' \text{ 中, } AE \perp DD', \therefore \angle D'AE + \angle ADD' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADD' = \angle AED',$$

$$\therefore \angle ADD' = \angle AD'D = \angle AED' = \angle BGA = \angle BAG ,$$

$$\therefore \angle ADD' = \angle BAG , \quad \therefore \angle AD'D = \angle BGA ,$$

在 $\triangle ADD'$ 和 $\triangle BAG$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADD' = \angle BAG \\ \angle AD'D = \angle BGA , \\ AD' = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADD' \cong \triangle BAG (AAS) .$$