

2025 学年第二学期阶段练习

八年级数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、单选题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, 添加以下条件不能证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

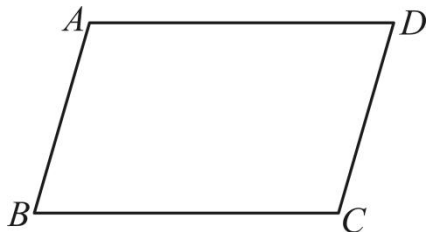
- A. $AB = CD$ B. $BC \parallel AD$ C. $\angle A = \angle C$ D. $\angle A + \angle D = 180^\circ$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理, 逐项验证各条件能否推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形即可.

【详解】解: 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,



A 若 $AB = CD$, 由一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不符合题意;

B 若 $BC \parallel AD$, 由两组对边分别平行的四边形是平行四边形, 可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不符合题意;

C $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$,

又 $\because \angle A = \angle C$,

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$, 因此四边形 $ABCD$ 两组对边分别平行, 可判定是平行四边形, 不符合题意;

D $\because AB \parallel CD$, 本身即可推出 $\angle A + \angle D = 180^\circ$,

无法推出另一组对边平行或 $AB = CD$, 不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 符合题意.

2. 下列命题中正确的是 ()

A. 对角线互相垂直的四边形是平行四边形

B. 平行四边形对角线互相平分

C. 有一个角是直角的四边形是矩形

D. 对角线互相平分的四边形是菱形

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定与性质，菱形的判定，矩形的判定，对四个命题逐一分析，再作出判断即可.

【详解】解：A、对角线互相平分的四边形才是平行四边形，对角线互相垂直不能判定四边形是平行四边形，故 A 错误，不符合题意；

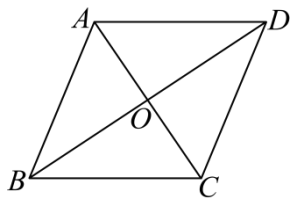
B、平行四边形的性质为对角线互相平分，故 B 正确，符合题意；

C、有一个角是直角的平行四边形才是矩形，仅有一个角是直角的四边形不是矩形，故 C 错误，不符合题意；

D、对角线互相垂直平分的四边形才是菱形，对角线互相平分只能判定四边形是平行四边形，不能判定是菱形，故 D 错误，不符合题意.

故选：B.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AB = 5$. 若 $\angle BAD = 120^\circ$ ，则 AC 的长是 ()



A. 2.5

B. 5

C. 6

D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】首先根据菱形的性质知 $AB = BC$ ，再由 $\angle BAD = 120^\circ$ 求出 $\angle ABC = 60^\circ$ ，得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，即可求出 AC 的长.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，

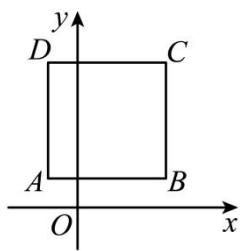
$\because \angle BAD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC = AB = 5$.

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， A 的坐标为 $(-1, 1)$ ， AB 平行于 x 轴，则点 C 的坐标为 ()



- A. $(3,4)$ B. $(4,5)$ C. $(5,3)$ D. $(3,5)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方形的边长加上点 A 的横坐标得到点 C 的横坐标，正方形的边长加上点 A 的纵坐标得到点 C 的纵坐标，从而得解.

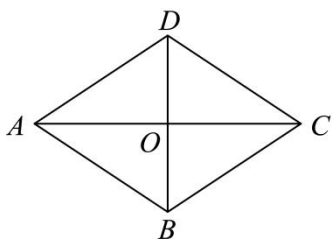
【详解】解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 A 的坐标为 $(-1,1)$ ，

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 $4-1=3$ ，

点 C 的纵坐标为 $4+1=5$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3,5)$.

5. 如图，菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 O ，若 $AC=6$ ， $BD=4$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长是（ ）



- A. 24 B. 26 C. $4\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{13}$

【答案】C

【解析】

【分析】由菱形的性质计算出 OA 和 OB ，利用勾股定理计算出 AB ，从而得出菱形的周长.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

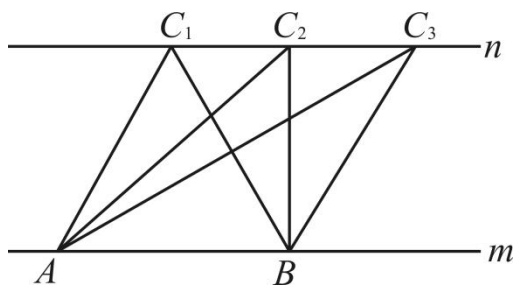
$$\therefore AC \perp BD, OA = \frac{1}{2}AC = 3, OB = \frac{1}{2}BD = 2, AB = BC = CD = AD,$$

$$\text{由勾股定理可得, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的周长为 } AB + BC + CD + AD = 4AB = 4\sqrt{13}.$$

6. 如图， A 、 B 是直线 m 上两个定点， C 是直线 n 上一个动点，且 $m \parallel n$ ，以下说法：①三角形 ABC 的周长不变；②三角形 ABC 的面积不变；③ $\angle C$ 的度数不变；④点 C 到直线 m 的距离不变. 其中正确的是

()



A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了两平行线间的公垂线段相等，等底等高的三角形面积相等知识；根据这些知识逐一判断即可.

【详解】 解: $\because A、B$ 为定点,

则 AB 为定值,

随着点 C 的运动, $AC + BC$ 的长度是变化的, 即 ABC 的周长变化的;

故①错误;

由于两平行线间的距离相等, 即点 C 到底边 AB 的距离不变,

即 ABC 的面积不变;

故②正确;

随着点 C 的运动, $\angle C$ 的度数是变化的;

故③错误;

$\because$ 两平行线间的距离相等,

即点 C 到直线 m 的距离不变;

故④正确;

综上, 正确的有②④;

故选: C.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 过 n 边形的一个顶点可以画出 10 条对角线, 将它分成 m 个小三角形, 则 $m + n$ 的值是_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查多边形的对角线问题, 根据过 n 边形的一个顶点可以画出 $(n - 3)$ 条对角线, 分成 $(n - 2)$

个三角形，进行求解即可.

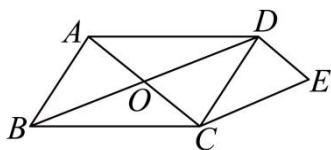
【详解】解：由题意，得： $n-3=10, n-2=m$,

$$\therefore n=13, m=11,$$

$$\therefore m+n=24;$$

故答案为：24.

8. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ，若 $AC=3$ ， $BD=5$ ，则四边形 $OCED$ 的周长为_____.



【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，根据平行四边形对角线互相平分得出 OC 、 OD 的长，再证明四边形 $OCED$ 是平行四边形即可得出结果.

【详解】解： $\because$ 四边形 $\square ABCD$ 是平行四边形， $AC=3$ ， $BD=5$ ，

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}, OD = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2},$$

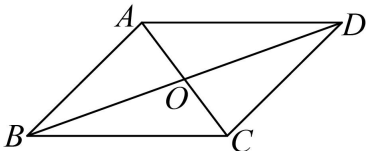
$\because DE \parallel AC, CE \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形，

$$\therefore \text{四边形 } OCED \text{ 的周长} = 2(OC + OD) = 2 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) = 8,$$

故答案为：8.

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，两条对角线交于点 O ，已知 $BO=DO$ ， $AC=6\text{cm}$ ，则当 $AO=$ _____ cm 时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【答案】3

【解析】

【分析】已知 $BO=DO$ ，当 $AO=CO=\frac{1}{2}AC$ 时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，据此即可解答.

【详解】解：当 $AO=3\text{cm}$ 时，

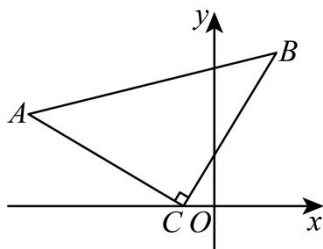
$$CO = AC - AO = 6 - 3 = 3(\text{cm}),$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore BO = DO,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

10. 如图, 在 $\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 C 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 的坐标为 $(2, 5)$, 则 A 点的坐标是 ____.

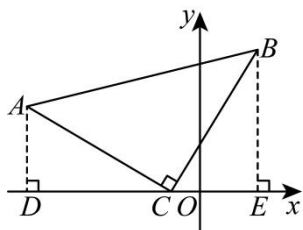


【答案】 $(-6, 3)$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定以及坐标与图形, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E , 构造 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$, 利用全等三角形的性质得到线段之间的关系, 进而求出点 A 的坐标.

【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ,



$\because$ 点 C 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 的坐标为 $(2, 5)$,

$$\therefore CE = 2 - (-1) = 3, BE = 5,$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ,$$

$\because AD \perp x$ 轴, $BE \perp x$ 轴,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, \angle CEB = 90^\circ,$$

$\because \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ \\ \angle CAD = \angle BCE \\ AC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CE = 3, CD = BE = 5,$$

$$\therefore OD = CD + OC = 5 + 1 = 6,$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (-6, 0),$$

$$\therefore AD = 3, AD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore A(-6, 3).$$

故答案为 $(-6, 3)$.

11. 已知点 P 在第四象限, 且到 x 轴的距离是2, 到 y 轴的距离是3, 则点 P 的坐标_____.

【答案】 $(3, -2)$

【解析】

【分析】 根据题意, 点 P 在第四象限, 且到 x 轴的距离是2, 到 y 轴的距离是3, 得到 $x = 3$, $y = -2$ 解答即可.

本题考查了点到坐标轴的距离, 熟练掌握距离的意义是解题的关键.

【详解】 解: 根据题意, 点 P 在第四象限, 且到 x 轴的距离是2, 到 y 轴的距离是3, 得到 $x = 3$, $y = -2$, 故 $P(3, -2)$.

故答案为: $(3, -2)$.

12. 已知点 A 坐标为 $(2 + a, -3a - 4)$, 点 B 的坐标为 $(5, -3)$, 若 $AB \parallel x$ 轴, 则 $a =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【详解】 本题考查了坐标与图形的性质, 由平行于 x 轴的点的纵坐标相同, 可得 $-3a - 4 = -3$, 解得 a 的值, 则可得答案, 熟练掌握平面直角坐标系中的点的坐标特点是解题的关键.

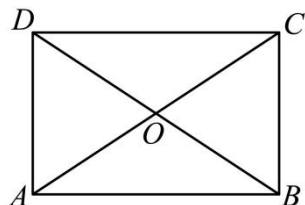
【点睛】 解: $\because$ 点 B 的坐标为 $(5, -3)$, 且 $AB \parallel x$ 轴,

$$\therefore -3a - 4 = -3,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3},$$

故答案为: $-\frac{1}{3}$.

13. 如图平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 且 $OA = OB$, $\angle OAD = 65^\circ$, 则 $\angle ODC =$ _____.



【答案】 25°

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形性质, 等腰三角形性质, 以及矩形的性质和判定, 根据题意证得四边形 $ABCD$ 是矩形, 利用矩形的性质和等腰三角形性质即可计算出 $\angle ODC$ 的度数.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore OA = OB = OC = OD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

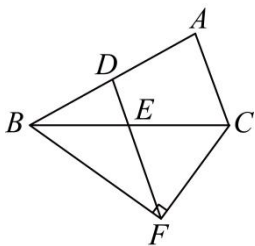
$$\because \angle OAD = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle ADC - \angle ODA = 25^\circ,$$

故答案为: 25° .

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别是边 AB , BC 的中点, 点 F 在线段 DE 的延长线上, 且 $\angle BFC = 90^\circ$, 若 $AC = 4$, $BC = 8$, 则 DF 的长是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线定理、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，熟练掌握三角形的中位线定理是解题关键。先根据三角形的中位线定理可得 $DE = \frac{1}{2}AC = 2$ ，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $EF = \frac{1}{2}BC = 4$ ，然后根据 $DF = DE + EF$ 求解即可得。

【详解】 解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是边 AB ， BC 的中点， $AC = 4$ ，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC = 2,$$

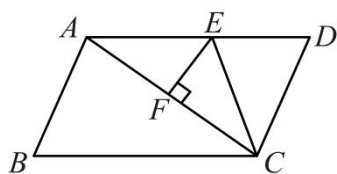
$$\because \angle BFC = 90^\circ, \quad BC = 8,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore DF = DE + EF = 6,$$

故答案为：6.

15. 如图，已知 $\square ABCD$ 的周长为12， AC 的垂直平分线交 AD 于点 E ，交 AC 于点 F ，连接 CE ，则 $\triangle CDE$ 的周长是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质得到 $AD + CD = 6$ ，根据垂直平分线的性质可知 $\triangle CDE$ 的周长 $= AD + CD$.

【详解】 解： $\because \square ABCD$ 的周长为12，

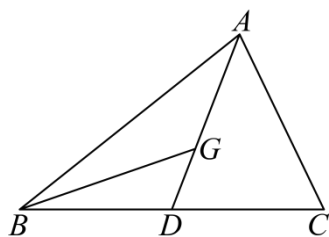
$$\therefore AD + CD = 6,$$

由题意可得：点 E 在 AC 的垂直平分线上，

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \triangle CDE \text{ 的周长} = CE + DE + CD = AE + DE + CD = AD + CD = 6.$$

16. 如图，已知： G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $S_{\triangle ABC} = 12$ ，那么 $S_{\triangle GBD} =$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查了三角形重心的性质，三角形的中线的性质，根据 G 是 ABC 的重心，得出 AD 是 ABC 的中线，可得 $S_{\triangle ABD} = 6$ ，根据重心的性质可得 $\frac{AG}{GD} = 2$ ，即可得出 $S_{\triangle GBD}$ 。

【详解】解： $\because G$ 是 ABC 的重心，

$\therefore AD$ 是 ABC 的中线， $\frac{AG}{GD} = 2$ ，

$$\therefore \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 12,$$

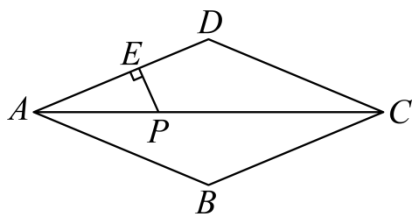
$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle GBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} = 2,$$

故答案为： 2。

17. 如图， P 是菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点， $PE \perp AD$ 于点 E ， $PE = 2$ ，则点 P 到 AB 的距离为

_____。



【答案】 2

【解析】

【分析】先利用菱形对角线的性质得出 AC 平分 $\angle BAD$ ，再结合角平分线的性质，推导出点 P 到 AB 的距离等于 PE 的长度。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

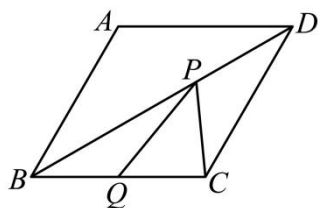
$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$ 。

$\because PE \perp AD$ 于点 E ，且点 P 在 AC 上，

$\therefore$ 点 P 到 AB 的距离等于 PE 的长度，即为 2。

18. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 P 是对角线 BD 上一点， Q 是 BC 中点，若菱形周长是 16， $\angle A = 120^\circ$ ，

则 $PC + PQ$ 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

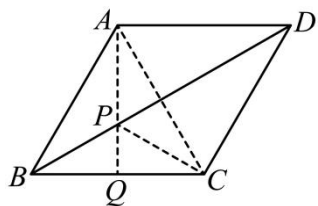
【解析】

【分析】点 Q 和点 C 是定点，点 P 在直线 BD 上一动点，是轴对称最值问题，连接 AC ，由菱形的对称性可知，点 A 和点 C 关于 BD 对称，连接 AQ ， AQ 即为所求.

【详解】解：如图，由菱形的对称轴可知，点 A 和点 C 关于 BD 对称，连接 AQ ，

$\therefore AP = CP$ ，

$\therefore AQ$ 即为所求 $PC + PQ$ 的最小值.



连接 AC ，

$\because \angle BAD = 120^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = BC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\because$ 点 Q 为 BC 的中点，

$\therefore AQ \perp BC$ ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 16，

$\therefore AB = BC = 4$ ，

$\because$ 在 $Rt\triangle ABQ$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAQ = 30^\circ$ ，

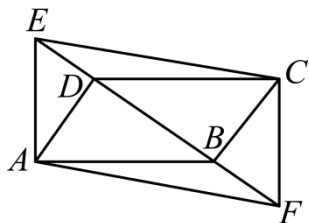
$\therefore BQ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，

$\therefore AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore PC + PQ$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

三、解答题 (本大题共有 6 题, 第 19~21 题每题 6 分, 第 22~24 题每题 8 分, 第 25 题 10 分, 满分 52 分)

19. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 连接对角线 BD , 点 E 和点 F 是直线 BD 上的两点且 $DE = BF$.



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 若 $AD \perp BD$, $AB = 5$, $BC = 3$, $DE = 2$, 求 $\triangle AEF$ 的面积.

【答案】(1) 详见解析

(2) $S_{\triangle AEF} = 12$

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定和性质, 勾股定理, 全等三角形的判定与性质等知识点,

(1) 根据平行四边形的性质, 得 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 根据平行线的性质, 得 $\angle ADB = \angle CBD$, 则 $\angle ADE = \angle CBF$, 根据 SAS 可以证明 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$, 得 $AE = CF$, $\angle AED = \angle CBF$, 从而证明 $AE \parallel CF$, 根据一组对边平行且相等的四边形, 即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 根据勾股定理得到 $BD = 4$, 连接 AC 交 EF 于 O , 进而可以得到 EF 的长, 然后利用三角形面积公式即可得解;

熟练掌握其性质并能正确得到 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ 是解决此题的关键.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$,

$\therefore \angle ADE = \angle CBF$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle ADE = \angle CBF, \\ DE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF (SAS),$$

$$\therefore AE = CF, \quad \angle AED = \angle CBF,$$

$$\therefore AE \parallel CF$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\because BD \perp AD, AB = 5, BC = AD = 3,$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore DE = BF = 2,$$

$$\therefore EF = 2DE + BD = 4 + 4 = 8,$$

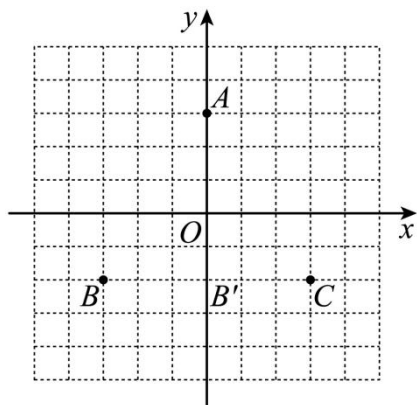
$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AD = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$$

20. 如图, 在直角坐标平面内, 点 A 的坐标是 $(0, 3)$, 点 B 的坐标是 $(-3, -2)$

(1) 图中点 C 关于 x 轴对称的点 D 的坐标是_____.

(2) 如果将点 B 沿着与 x 轴平行的方向向右平移 3 个单位得到点 B' , 那么 A、 B' 两点之间的距离是_____.

(3) 求四边形 ABCD 的面积



【答案】(1) D $(3, 2)$; (2) 5; (3) 21.

【解析】

【分析】(1) 先求出点 C 的坐标, 根据关于 x 轴对称的点的坐标特点: 横坐标不变, 纵坐标互为相反数可得 D 点坐标;

(2) 根据点的平移: 横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减可得 B' 点坐标, 进而得到答案;

(3) 用 $\triangle ABC$ 的面积加上 $\triangle ACD$ 的面积即可.

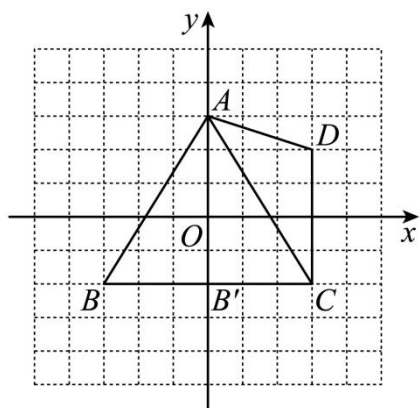
【详解】解：(1) 根据题意， $\therefore$ 点 A 的坐标是 $(0, 3)$ ，点 B 的坐标是 $(-3, -2)$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3, -2)$ ，

$\therefore$ 点 C 关于 x 轴对称的点 D 的坐标是 $(3, 2)$ ；

故答案为： $(3, 2)$ ；

(2) 如图：



将点 B 沿着与 x 轴平行的方向向右平移 3 个单位得到点 B' $(-3+3, -2)$ ，即 $(0, -2)$ ，

$\therefore$ A、B' 两点之间的距离是： $3 - (-2) = 5$ ；

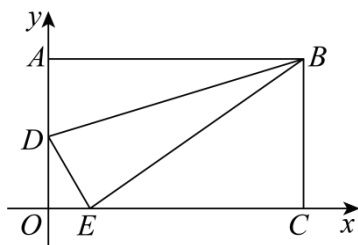
故答案为： 5；

(3) 四边形 ABCD 的面积为：

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 15 + 6 = 21；$$

【点睛】此题主要考查了坐标与图形变化——平移，关于 x 轴对称的点的坐标，平面直角坐标系，以及三角形的面积，关键是掌握点的坐标的变化规律.

21. 长方形 ABCO 在平面直角坐标系中的位置如图，已知点 B 的坐标为 $(15, 9)$ ，将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 折叠，点 A 恰好落在边 OC 上的点 E 处.



(1) 点 A 的坐标为 _____，点 C 的坐标为 _____；

(2) 求 CE 和 AD 的长；

(3) 求四边形 DOEB 的面积.

【答案】 (1) $(0, 9)$ ； $(15, 0)$

(2) $CE=12$, $AD=5$

(3) $\frac{87}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系、折叠的性质、勾股定理，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 结合长方形 $ABCO$ 的性质和点 B 的坐标，即可解答；

(2) 由折叠的性质得 $BE=AB=15$ ， $DE=AD$ ，在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 利用勾股定理求出 CE 的长，得到 OE 的长，设 $DE=AD=x$ ，在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中利用勾股定理建立方程解出 x 的值，得到 AD 的长，即可解答；

(3) 利用四边形 $DOEB$ 的面积 $=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ODE}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵ 长方形 $ABCO$ ，点 B 的坐标为 $(15,9)$ ，

$$\therefore AO=BC=9, \quad OC=AB=15,$$

∴ 点 A 的坐标为 $(0,9)$ ，点 C 的坐标为 $(15,0)$.

故答案为： $(0,9)$ ； $(15,0)$.

【小问 2 详解】

解：由折叠的性质得， $BE=AB=15$ ， $DE=AD$ ，

$$\therefore CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12,$$

$$\therefore OE=OC-CE=15-12=3,$$

设 $DE=AD=x$ ，则 $OD=AO-AD=9-x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中， $OE^2+OD^2=DE^2$ ，

$$\text{即 } 3^2+(9-x)^2=x^2,$$

解得： $x=5$ ，即 $AD=5$ ，

∴ 综上所述， $CE=12$ ， $AD=5$.

【小问 3 详解】

解：由 (2) 得， $AD=5$ ，

$$\therefore OD=9-5=4,$$

由折叠的性质得， $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle EBD}$ ，

$$\therefore \text{四边形 } DOEB \text{ 的面积} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ODE}$$

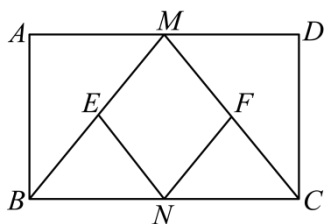
$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD + \frac{1}{2} OE \cdot OD$$

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$= \frac{87}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $DOEB$ 的面积为 $\frac{87}{2}$.

22. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点, E 、 F 分别是线段 BM 、 CM 的中点.



(1) 求证: $MB = MC$;

(2) 判断四边形 $MENF$ 是什么特殊四边形, 并证明你的结论;

(3) 当 $AB: AD = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 四边形 $MENF$ 是正方形 (只写结论, 不需证明).

【答案】 (1) 证明见解析;

(2) 四边形 $MENF$ 是菱形, 说明见解析;

(3) 当 $AB: AD = 1:2$ 时, 四边形 $MENF$ 是正方形.

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质, 可得 $AB = DC$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 根据全等三角形的判定和性质, 即可;

(2) 根据三角形中位线的性质, 则 $NF = \frac{1}{2} BM$, $NF \parallel BM$; $NE = \frac{1}{2} CM$, $NE \parallel CM$, 根据菱形的判定, 即可;

(3) 当 $AB: AD = 1:2$ 时, 四边形 $MENF$ 是正方形, 根据有一个角为直角的菱形是正方形得到结论.

【小问 1 详解】

解: 证明如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = DC$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$,

$\because M$ 是 AD 的中点,

$\therefore AM = DM$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 中,

$$\begin{cases} AB = DC \\ \angle A = \angle D, \\ AM = DM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle DCM (SAS),$$

$$\therefore MB = MC.$$

【小问 2 详解】

解：四边形 $MENF$ 是菱形，证明如下：

$\because$ 点 N 是 BC 的中点，点 F 是 MC 的中点，

$$\therefore NF = \frac{1}{2}BM, \quad NF \parallel BM,$$

$\because$ 点 N 是 BC 的中点，点 E 是 MB 的中点，

$$\therefore NE = \frac{1}{2}CM, \quad NE \parallel CM,$$

$\therefore$ 四边形 $MENF$ 是平行四边形，

$$\because MB = MC,$$

$$\therefore NE = NF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $MENF$ 是菱形.

【小问 3 详解】

解：当 $AB: AD = 1:2$ 时，四边形 $MENF$ 是正方形，证明如下：

$$\because AB: AD = 1:2,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AD,$$

$\because M$ 是 AD 的中点，

$$\therefore AM = MD = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AB = AM = MD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = DC, \quad \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = AM = MD = DC,$$

$\therefore \triangle ABM, \triangle CMD$ 是等腰直角三角形，

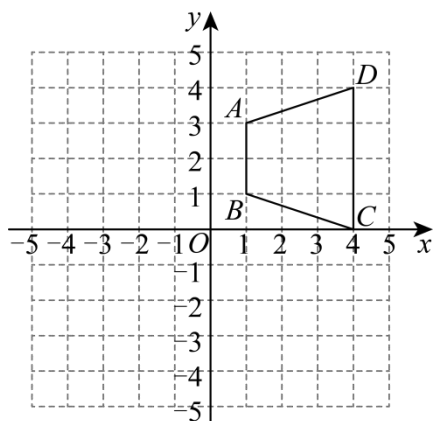
$$\therefore \angle AMB = \angle ABM = 45^\circ, \quad \angle DMC = \angle DCM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BMC = 180^\circ - \angle AMB - \angle DMC = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

由 (2) 可得，四边形 $MENF$ 是菱形，

∴ 四边形 $MENF$ 是正方形.

23. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(1,3)$, $B(1,1)$, $C(4,0)$, $D(4,4)$.



- (1) 把四边形 $ABCD$ 经过平移后得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 点 A 的对应点 A_1 的坐标为 $(-4, -1)$. 请你画出四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 并写出 B_1 , C_1 , D_1 的坐标;
- (2) 若四边形 $ABCD$ 内有一点 $P(a, b)$, 则经过平移后的对应点 P_1 的坐标为_____;
- (3) 求四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析, $B_1(-4, -3)$, $C_1(-1, -4)$, $D_1(-1, 0)$

(2) $(a-5, b-4)$

(3) 9

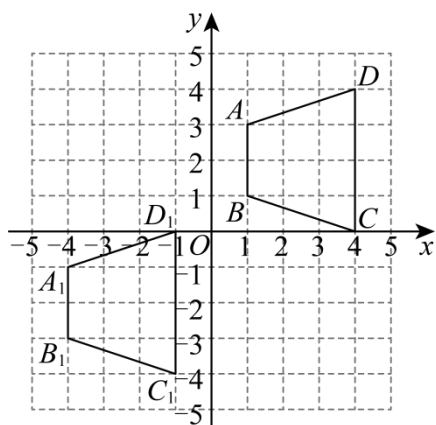
【解析】

【分析】 本题考查作图-平移变换, 熟练掌握平移的性质是解答本题的关键.

- (1) 根据平移的性质作图, 即可得出答案.
- (2) 由 (1) 得平移规律, 再进行解答即可;
- (3) 利用梯形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 即为所求.



$B_1(-4, -3)$, $C_1(-1, -4)$, $D_1(-1, 0)$.

【小问 2 详解】

解：由（1）得平移的规律为：向左平移 5 个单位，再向下平移 4 个单位，

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $(a-5, b-4)$,

故答案为： $(a-5, b-4)$;

【小问 3 详解】

解： $S_{\text{四边形}A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 3 = 9$.

24. 综合与实践

【问题情境】

在数学综合与实践活动课上，老师让同学们以“特殊平行四边形的旋转”为主题开展探究活动.

如图 1，正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ ，连接 DG ， BE .

【操作发现】

(1) 当正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转，如图 2，线段 DG 与 BE 之间的数量关系是_____；直线 DG 与 BE 的夹角度数为_____；

【深入探究】

(2) 如图 3，若四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 都为菱形，且 $AB = 2AE$ ， $\angle DAB = \angle GAE = 60^\circ$ ，猜想 DG 与 BE 的数量关系与直线 DG 与 BE 的夹角度数，并说明理由；

【迁移探究】

(3) 如图 3，在（2）的条件下， $AB = 2$ ，在菱形 $AEFG$ 绕点 A 旋转过程中，直接写出线段 CE 的最小值.

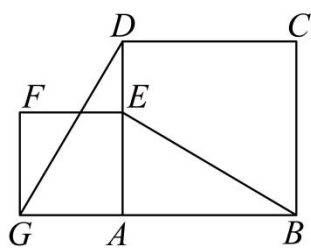


图 1

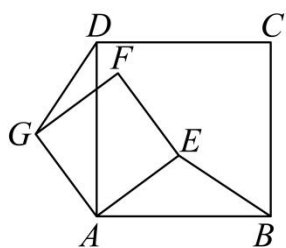


图 2

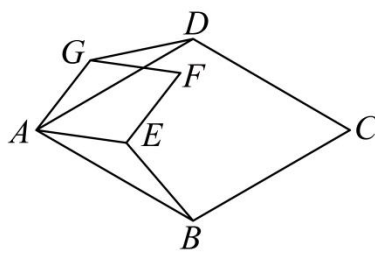


图 3

【答案】(1) $DG = BE$, 90° ; (2) $DG = BE$; 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ; 理由见解析; (3)

线段 CE 的最小值为 $2\sqrt{3} - 1$.

【解析】

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形, 得 $AG = AE$, $AD = AB$, $\angle GAE = \angle DAB = 90^\circ$, 证明 $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS), 得出 $DG = BE$, $\angle ADG = \angle ABE$, 延长 BE 交 GD 于点 M , 交 AD 于点 N , 根据全等三角形的性质和角度和差即可求解;

(2) 由四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是菱形, 得 $AG = AE$, $AD = AB$, $\angle GAE = \angle DAB = 60^\circ$, 证明 $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS), 得出 $DG = BE$, $\angle ADG = \angle ABE$, 延长 BE 交 GD 于点 H , 交 AD 于点 T , 根据全等三角形的性质和角度和差即可求解;

(3) 如图 4, 由于菱形 $AEFG$ 绕点 A 旋转, 所以点 E 的运动轨迹, 是以点 A 为圆心, 半径为 $AE = 1$ 的圆, 连接圆心点 A 与圆外一点 C , 当点 E 在 AC 上时, 线段 CE 取得最小值, 连接 BD , 交 AC 于点 O , 根据菱形的性质得到 $\angle OAB = 30^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, $AC = 2AO$, 根据勾股定理得到 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3}$, 求得 $AC = 2OA = 2\sqrt{3}$, 于是得到结论.

【详解】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形,

$$\therefore AG = AE, AD = AB, \angle GAE = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle EAB,$$

在 $\triangle GAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAD = \angle EAB, \\ AD = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DG = BE, \angle ADG = \angle ABE,$$

如图2，延长 BE 交 GD 于点 M ，交 AD 于点 N ，

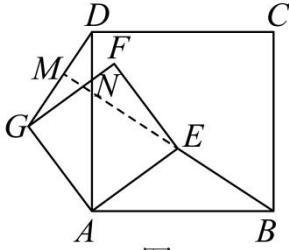


图2

$\because \angle DNM = \angle ANB$, $\angle ABN + \angle ANB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DNM + \angle ADG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DMN = 90^\circ$,

$\therefore$ 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 90° ,

故答案为: $DG = BE$, 90° ;

(2) $DG = BE$; 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ; 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是菱形,

$\therefore AG = AE$, $AD = AB$, $\angle GAE = \angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore \angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE$,

$\therefore \angle GAD = \angle EAB$,

$\therefore$ 在 $\triangle GAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAD = \angle EAB, \\ AD = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB (SAS)$,

$\therefore DG = BE$, $\angle ADG = \angle ABE$,

如图3，延长 BE 交 DG 的延长线于点 H ，交 AD 于点 T ，

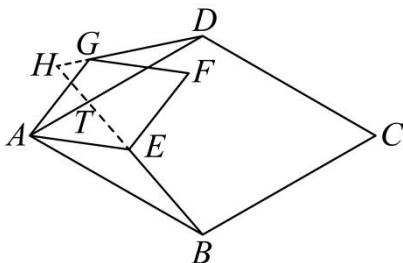


图3

$\because \angle DTH = \angle ATB$, $\angle H + \angle DTH + \angle ADG = 180^\circ$, $\angle DAB + \angle ATB + \angle ABE = 180^\circ$

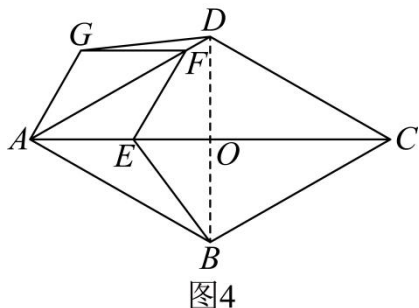
$\therefore \angle H = \angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore$ 直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ;

(3) 如图 4, $\because CE \geq AC - AE$

$\therefore$ 当点 E 在 AC 上时, 线段 CE 取得最小值,

连接 BD , 交 AC 于点 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore \angle OAB = 30^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, $AC = 2AO$,

$\because AB = 2$,

$\therefore OB = \frac{1}{2}AB = 1$,

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{3}$,

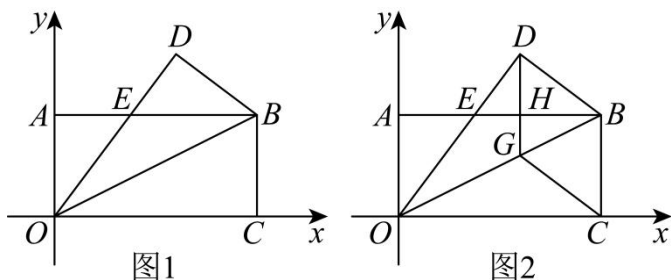
$\because AE = \frac{1}{2}AB = 1$,

$\therefore CE = AC - AE = 2\sqrt{3} - 1$,

即线段 CE 的最小值为 $2\sqrt{3} - 1$.

【点睛】 本题属于四边形综合题, 考查了正方形的性质, 菱形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理的应用, 掌握知识点的应用是解题的关键.

25. 如图 1, 将矩形 $OABC$ 放在直角坐标系中, O 为原点, 点 C 在 x 轴上, 点 A 在 y 轴上, $OA = 8$, $OC = 16$. 把矩形 $OABC$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E .



(1) 点 E 的坐标为____; 点 D 的坐标为____;

(2) 如图 2, 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 OB 于点 G , 交 AB 于点 H , 连接 CG , 试判断四边形 $BCGD$ 的形

状, 并说明理由.

(3) 在 (2) 的条件下, 点 M 是坐标轴上一点, 直线 OB 上是否存在一点 N , 使以 O 、 D 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出点 N 坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $(6, 8)$; $\left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right)$

(2) 四边形 $BCGD$ 是菱形, 理由见解析

(3) $\left(\frac{48}{5}, \frac{24}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{128}{5}, \frac{64}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{48}{5}, -\frac{24}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{128}{5}, -\frac{64}{5}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 证明 $EO = EB$, 设 $AE = x$, 则 $OE - BE = 8 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, 利用勾股定理构建方程求解即可;

(2) 根据邻边相等的平行四边形是菱形证明即可;

(3) 有 5 种情形, 画出图形分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 四边形 $OABC$ 是矩形, $OA = 8, OC = 16$,

$\therefore AB = OC = 16, BC = AO = 8, AB \parallel OC, \angle ABC = \angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABO = \angle BOC$

$\therefore$ 把矩形 $OABC$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E ,

$\therefore \angle BOC = \angle BOD$, $DE = AE$, $BD = BC = 8$, $\angle BDE = \angle OCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EOB = \angle EBO$,

$\therefore EO = EB$,

设 $AE = x$, 则 $OE - BE = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中, $OA^2 + AE^2 = OE^2$,

$\therefore 8^2 + x^2 = (16 - x)^2$,

解得: $x = 6$,

即 $DE = AE = 6$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(6, 8)$, $BE = 10$,

如图, 过点 D 作 $DL \perp OC$ 于点 L , 交 AB 于点 K , 则 $KL = OA = 8$,

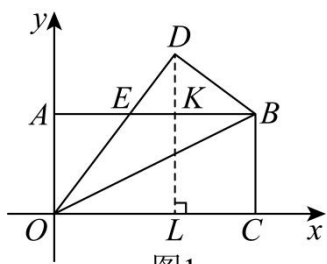


图1

$$\because S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} DE \times BD = \frac{1}{2} DK \times BE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} DK \times 10,$$

$$\text{解得: } DK = \frac{24}{5},$$

$$\therefore DL = \frac{64}{5}, \quad EK = \sqrt{DE^2 - DK^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore AK = \frac{48}{5},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } \left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5} \right);$$

$$\text{故答案为: } (6, 8); \left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5} \right)$$

【小问 2 详解】

解: 四边形 $BCGD$ 是菱形, 理由如下:

$$\because DG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle CBG,$$

$\because$ 把矩形 $OACB$ 沿对角线 OB 所在直线翻折, 点 C 落到点 D 处, OD 交 AB 于点 E ,

$$\therefore \angle DBG = \angle CBG, \quad BD = BC = 8, \quad \angle BDE = \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBG = \angle DGB,$$

$$\therefore DG = DB = CB,$$

$\therefore$ 四边形 $BCGD$ 是平行四边形,

$$\because BD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCGD$ 是菱形;

【小问 3 详解】

解: 当点 N_1 与点 G 重合时, 点 M_1 与点 A 重合时, 四边形 DM_1ON_1 是平行四边形,

在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中, $\angle EDB = 90^\circ$, $EB = AB - AE = 16 - 6 = 10$, $DB = BC = OA = 8$,

$$\therefore DE = \sqrt{EB^2 - DB^2} = 6,$$

$$\therefore DG \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHB = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle EDB} = \frac{1}{2}EB \cdot DH = \frac{1}{2}ED \cdot BD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 10 \times DH = \frac{1}{2} \times 6 \times 8,$$

$$\text{解得: } DH = \frac{24}{5},$$

$$\therefore GH = DG - DH = 8 - \frac{24}{5} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } \frac{24}{5} + 8 = \frac{64}{5}, \text{ 点 } G \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore AH = AE + EH = \frac{48}{5},$$

$$\therefore D\left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right), N_1\left(\frac{48}{5}, \frac{24}{5}\right);$$

当四边形 ODN_1M 是平行四边形时, 此时点 N_1 与 G 重合, $DN_1 \parallel OM$ 且 $DN_1 \parallel OM$, 则 $N_1\left(\frac{48}{5}, \frac{24}{5}\right)$;

当四边形 ODN_2M_2 是平行四边形时, 此时点 M_2 与 C 重合, $DO \parallel N_2M_2$ 且 $DO = N_2M_2$,

即线段 OD 向右平移 8 个单位得到线段 N_2M_2 , 则点 M_2 是点 O 的对应点, 点 N_2 是点 D 的对应点,

$$\therefore O(0,0), D\left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right), M_2(16,0),$$

$$\therefore N_2\left(16 + \frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right), \text{ 即 } N_2\left(\frac{128}{5}, \frac{64}{5}\right);$$

当四边形 ODM_1N_3 是平行四边形时, 此时点 M_1 与 A 重合, $DM_1 \parallel ON_3$, 且 $DM_1 = ON_3$, 即线段 DM_1 向左平移 $\frac{48}{5}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{64}{5}$ 个单位得到线段 ON_3 , 则点 O 是点 D 的对应点, 点 N_3 是点 M_1 的对应点,

$$\therefore O(0,0), D\left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right), M_1(0,4),$$

$$\therefore N_3\left(0-\frac{48}{5}, 8-\frac{64}{5}\right), \text{ 即 } N_3\left(-\frac{48}{5}, -\frac{24}{5}\right);$$

当四边形 ODM_4N_4 是平行四边形时, $DM_4 \parallel ON_4$ 且 $DM_4 = ON_4$,

$\therefore AB \parallel x$ 轴, $AD \parallel OG$,

$\therefore$ 四边形 $ABOM_4$ 是平行四边形,

$$\therefore OM_4 = AB = 16,$$

即线段 DM_4 向左平移 $\frac{48}{5}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{64}{5}$ 个单位得到线段, 则点 O 是点 D 的对应点 N_4 是点 M_4 的对应点,

$$\therefore O(0,0), D\left(\frac{48}{5}, \frac{64}{5}\right), M_4(-8,0),$$

$$\therefore N_4\left(-16-\frac{48}{5}, 0-\frac{64}{5}\right), \text{ 即 } N_4\left(-\frac{128}{5}, -\frac{64}{5}\right);$$

综上所述, 满足条件的点的坐标为 $\left(\frac{48}{5}, \frac{24}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{128}{5}, \frac{64}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{48}{5}, -\frac{24}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{128}{5}, -\frac{64}{5}\right)$.

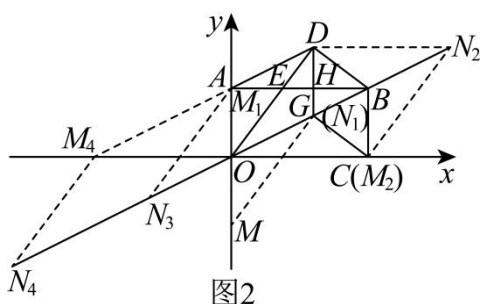


图2

【点睛】 本题属于四边形综合题, 考查了矩形的性质, 平行四边形的判定和性质, 菱形的判定和性质, 勾股定理, 翻折变换和平移等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题.