

2025 学年第二学期正达外国语学校

八年级数学学科限时作业

(本试卷满分: 100 分 答题时长: 90 分钟)

答题注意: 所有答案务必填写在答题纸上, 做在试卷上不予评分

一、选择题 (6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 一本笔记本 5 元, 买 x 本共付 y 元, 则 5 和 x 分别是 ()

- A. 常量, 变量
B. 变量, 变量
C. 常量, 常量
D. 变量, 常量

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了常量和变量的定义, 在一个变化过程中变化的量是变量, 始终不变的量是常量. 根据常量, 变量的定义解法即可.

【详解】解: 由题意得, $y = 5x$,

变量 y 是随本数 x 的变化而变化的, 而本的单价 5 元不变, 故 5 是常量, x 是变量,
故选: A.

2. 下列各点中, 在正比例函数 $y = 2x$ 的图像上的是 ()

- A. (1,4) B. (-2,-1) C. (-1,-2) D. (2,1)

【答案】C

【解析】

【分析】判断点是否在正比例函数图像上, 可将点的横坐标代入函数解析式, 计算对应的纵坐标, 若与点的纵坐标相等, 则该点在函数图像上, 据此逐一验证选项即可.

【详解】解: A、 $\because$ 当 $x = 1$ 时, $y = 2 \times 1 = 2 \neq 4$, $\therefore$ 此点不在 $y = 2x$ 的图像上.

B、 $\because$ 当 $x = -2$ 时, $y = 2 \times (-2) = -4 \neq -1$, $\therefore$ 此点不在 $y = 2x$ 的图像上.

C、 $\because$ 当 $x = -1$ 时, $y = 2 \times (-1) = -2$, $\therefore$ 此点在 $y = 2x$ 的图像上.

D、 $\because$ 当 $x = 2$ 时, $y = 2 \times 2 = 4 \neq 1$, $\therefore$ 此点不在 $y = 2x$ 的图像上.

3. 下列函数中, 不是反比例函数的是 ()

A. $y = \frac{6}{x}$

B. $y = 5x^{-1}$

C. $y = -\frac{x}{9}$

D. $y = -\frac{1}{7x}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的定义.

反比例函数的一般形式为 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$), 选项 C 为正比例函数, 不符合反比例函数定义.

【详解】解: 反比例函数形式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

A: $y = \frac{6}{x}$, 是反比例函数;

B: $y = 5x^{-1} = \frac{5}{x}$, 是反比例函数;

C: $y = -\frac{x}{9}$, 是正比例函数, 不是反比例函数;

D: $y = -\frac{1}{7x}$, 是反比例函数;

故选: C.

4. 在反比例函数 $y = \frac{1-k}{x}$ 的图像的每一条曲线上, y 都随 x 的增大而增大, 则 k 的值可能是 ()

A. 2

B. 1

C. 0

D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】根据题目中 y 随 x 增大而增大的条件, 列出关于 k 的不等式, 解不等式得到 k 的取值范围, 再从选项中筛选符合条件的数值.

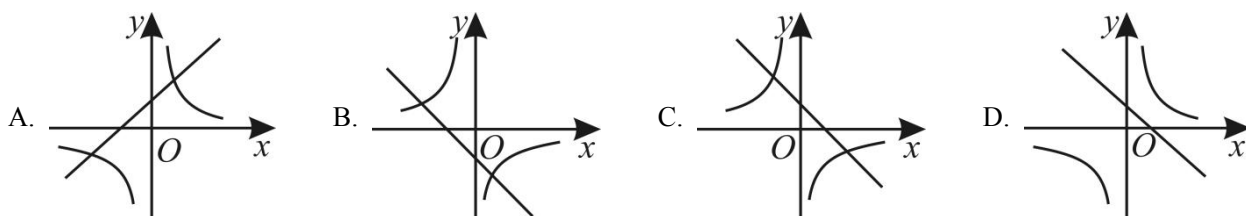
【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1-k}{x}$ 的图像的每一条曲线上, y 都随 x 的增大而增大,

$\therefore 1-k < 0$, 解得 $k > 1$.

观察选项, 只有 $2 > 1$, 因此 k 的值可能是 2,

故选: A.

5. 一次函数 $y = k(x-1)$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在同一直角坐标系中的大致图像是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一次函数与反比例函数的图像，根据一次函数与反比例函数的图像特点进行判断即可.

【详解】解：当 $k > 0$ 时，一次函数 $y = k(x-1)$ 的图像经过第一、三、四象限，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过第一、三象限. 故各选项的图像均不符合；

当 $k < 0$ 时，一次函数 $y = k(x-1)$ 的图像经过第一、二、四象限，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过第二、四象限. 故选项 C 的图像符合.

故选：C

6. 小星在阅读《天工开物》时，看到一种名为桔槔的古代汲水工具（如图1），有一横杆固定于桔槔上的 O 点，并可绕 O 点转动. 在横杆 A 处连接一竹竿，在横杆 B 处固定 300N 的物体，且 $OB = 1\text{m}$. 若图中人物竖直向下施加的拉力为 F ，当改变点 A 与点 O 的距离时，横杆始终处于水平状态，小星发现 F 与 l 有一定的关系，他记录了拉力的大小 F 与 l 的变化情况如图2所示，下列说法错误的是（ ）

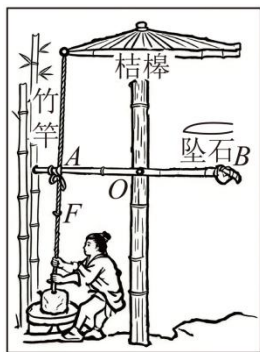


图1

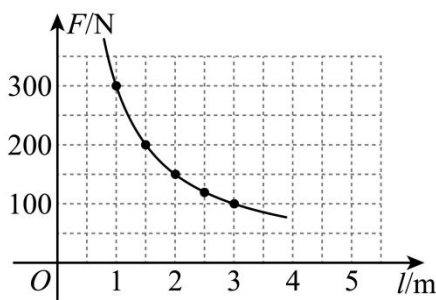


图2

- A. 拉力的大小 F 与 l 符合反比例函数关系
- B. 当 OA 的长增大时，拉力 F 在减小
- C. OA 的长每增大 1m ，所施加的拉力就减小 150N
- D. 当 OA 的长从 1m 增加到 3m 时，所施加的拉力减小了 200N

【答案】C

【解析】

【分析】仔细观察图象，得出 F 与 l 的积为定值，从而得出满足反比例函数关系，利用函数的图象和性质逐项判断即可.

【详解】解：由图象中数据发现：

$$1 \times 300 = 1.5 \times 200 = 2 \times 150 = 3 \times 100 = 300,$$

$\therefore$ 拉力 F 与距离 l 的乘积不变，

$\therefore$ 拉力的大小 F 与 l 之间满足反比例函数关系，故 A 正确，不符合题意；

由图象可得，当 OA 的长 l 增大时，拉力 F 在减小，故 B 正确，不符合题意；

由图象知，当 $l=1$ 时， $F=300$ ，当 $l=2$ 时， $F=150$ ，当 $l=3$ 时， $F=100$ ，

$$300 - 150 \neq 150 - 100,$$

$\therefore OA$ 的长每增大 1m ，所施加的拉力不一定减小 150N ，故 C 错误，符合题意；

当 OA 的长从 1m 增加到 3m 时，所施加的拉力减小了 $300 - 100 = 200\text{N}$ ，故 D 正确，不符合题意。

二、填空题 (12 题，每题 2 分，共 24 分)

7. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了求自变量的取值范围、分式有意义的条件，熟练掌握分式有意义的条件是分母不为 0 是解题的关键。根据分式有意义的条件即可求解。

【详解】 解：由题意得， $x-1 \neq 0$ ，

解得 $x \neq 1$ ，

故答案为： $x \neq 1$ 。

8. 直线 $y = 2x - 6$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】

-6

【解析】

【分析】 直线与 y 轴交点的纵坐标叫做这条直线在 y 轴上的截距，依据定义即可求解。

【详解】 解：当 $x=0$ 时， $y = 2 \times 0 - 6 = -6$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 6$ 在 y 轴上的截距为 -6

9. “冰冻三尺，非一日之寒。”这句谚语体现了冰的厚度随时间的变化而变化。在这个变化过程中，自变量为_____。（填“冰的厚度”或“时间”）

【答案】 时间

【解析】

【分析】根据函数的定义，在冰的厚度随时间变化的过程中，时间是独立变化的量，因此是自变量.

本题主要考查自变量的概念：在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y ，并且对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量， y 叫做因变量。熟记函数的概念是解题的关键.

【详解】在冰的厚度随时间变化的过程中，时间不断变化，冰的厚度随之变化，所以自变量是时间.

故答案为：时间.

10. 把直线 $y=3x$ 的图象向上平移 2 个单位，则平移后直线的解析式为_____.

【答案】 $y=3x+2$ ## $y=2+3x$

【解析】

【分析】根据“上加下减”的原则进行解答即可.

【详解】解：把直线 $y=3x$ 的图象向上平移 2 个单位，则平移后直线的解析式为 $y=3x+2$.

故答案为： $y=3x+2$.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象的平移，熟知“上加下减”的原则是解答此题的关键.

11. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-2,3)$ ，则其图象在_____象限.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质， $y=\frac{k}{x}$ ，当 $k>0$ 时，图象在一、三象限，当 $k<0$ 时，图象在二、四象限，正确掌握该性质是解题的关键. 用待定系数法求出 k 的值，根据反比例函数的性质判断其图象所在的象限即可.

【详解】解：将点 $(-2,3)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $3=\frac{k}{-2}$ ，解得： $k=-6$ ，

因为 $k<0$ ，所以 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限.

故答案为：二、四.

12. 已知点 $A(1,y_1)$ ， $B(2,y_2)$ ， $C(-3,y_3)$ 都在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，则用 “>” 将 y_1 ， y_2 ， y_3 按从大到小的顺序排列为_____.

【答案】

$y_1 > y_2 > y_3$

【解析】

【分析】根据题意得反比例函数在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，由此问题可求解.

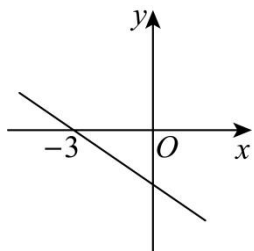
【详解】解：由反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 可知该函数在第一、第三象限，则有在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 点 $A(1, y_1), B(2, y_2), C(-3, y_3)$ 都在反比例函数的图象上， $-3 < 0 < 1 < 2$ ，

$\therefore y_1 > y_2 > 0 > y_3$ ，

故 $y_1 > y_2 > y_3$ 。

13. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，则不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____。



【答案】 $x < -3$

【解析】

【分析】结合函数图象求解即可。

【详解】解：根据函数图象可知，当 $x < -3$ 时， $y > 0$ ，

所以不等式 $kx + b > 0$ 的解集为 $x < -3$ 。

14. 已知一次函数 $y = kx + 4$ 的图象与两坐标轴围成的三角形的面积为16，则 $k =$ _____。

【答案】 $\pm \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】先求出一次函数 $y = kx + 4$ 与 x 轴、 y 轴的交点坐标，再依据三角形的面积公式建立关于 k 的方程，通过解方程并结合绝对值的性质求出 k 的值。

【详解】解：对于一次函数 $y = kx + 4$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ，则该函数图象与 y 轴的交点为 $(0, 4)$ ，

当 $y = 0$ 时， $kx + 4 = 0$ ，解得 $x = -\frac{4}{k}$ ，则该函数图象与 x 轴的交点为 $\left(-\frac{4}{k}, 0\right)$ ，

已知该函数图象与两坐标轴围成的三角形的面积为16，

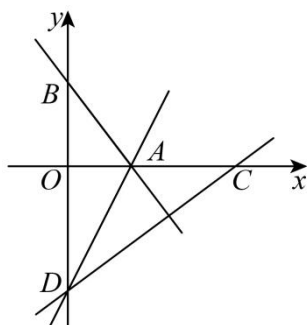
根据三角形面积公式可得 $\frac{1}{2} \times 4 \times \left| -\frac{4}{k} \right| = 16$ ，

化简得 $2 \times \left| \frac{4}{k} \right| = 16$ ，即 $\left| \frac{4}{k} \right| = 8$ ，

由绝对值的性质可知 $|k| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ，

因此 $k = \pm \frac{1}{2}$ 。

15. 如图，直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点，在 y 轴的负半轴上有一点 D ，若将 $\triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠得到 $\triangle DAC$ ，点 C 在 x 轴上，则点 D 的坐标为_____。



【答案】 $(0, -12)$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数图象上点的坐标特征，折叠的性质、勾股定理的应用等，解决问题的关键是根据折叠的性质得出 $AC = CB$ ， $CD = BD$ 。先求得点 A 、 B 的坐标，进而求得 $AB = 10$ ，由题意得：

$AC = AB = 10$ ，故点 $C(16, 0)$ ，设点 D 的坐标为： $(0, m)$ ，根据 $CD = BD$ ，即可得到 m 的值。

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点，

$$\therefore A(6, 0), B(0, 8),$$

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

由题意得： $AC = AB = 10$ ，

$$\therefore OC = OA + AC = 6 + 10 = 16,$$

故点 $C(16, 0)$ ，

设点 D 的坐标为： $(0, m)$ ，

$$\therefore CD = BD,$$

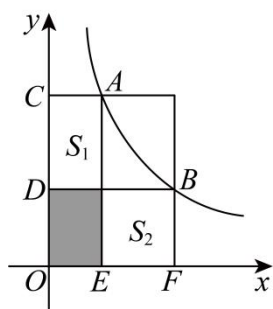
$$\therefore \sqrt{m^2 + 16^2} = 8 - m,$$

解得： $m = -12$ ，

故点 $D(0, -12)$.

故答案为: $(0, -12)$.

16. 在平面直角坐标系中, 矩形 $ACOE$ 与矩形 $BDOF$ 的位置如图所示, 点 C 、 D 在 y 轴上, 点 E 、 F 在 x 轴上, 反比例函数 $y = \frac{5}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 A 、 B , 若 $S_{\text{阴影部分}} = 2$, 则空白部分的面积 $S_1 + S_2$ 的值为 _____.



【答案】 6

【解析】

【分析】该题考查了反比例函数的几何意义, 根据反比例函数中 k 值的几何意义得出 $S_{\text{矩形}ACOE} = S_{\text{矩形}BDOF} = 5$, 再求出 $S_1 = S_2 = 5 - 2 = 3$, 即可解答.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{5}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 A 、 B , 四边形 $ACOE$ 与 $BDOF$ 是矩形,

$$\therefore S_{\text{矩形}ACOE} = S_{\text{矩形}BDOF} = 5,$$

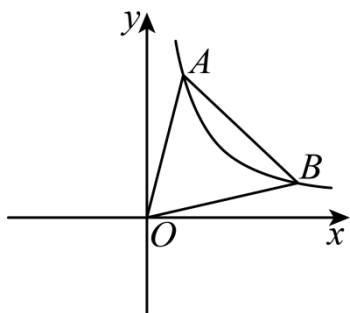
$$\because S_{\text{阴影部分}} = 2,$$

$$\therefore S_1 = S_2 = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 6,$$

故答案为: 6.

17. 如图所示, 点 $A(1, m)$ 是反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上一点, 点 B 是点 A 关于直线 $y = x$ 的对称点, 则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

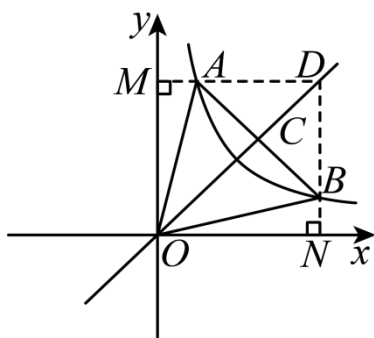
【分析】先求出点 A 的坐标；再根据关于直线 $y = x$ 对称的性质，通过构造辅助线证明全等三角形，推导出点 B 的坐标；最后构造正方形，用正方形面积减去周边直角三角形的面积，即可算出 $\triangle AOB$ 的面积.

【详解】解： $\because$ 点 $A(1, m)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上，

$$\therefore m = \frac{4}{1} = 4,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 4)$.

如图，过点 A 作 $AM \perp y$ 轴，过点 B 作 $BN \perp x$ 轴，设直线 $y = x$ 与 AB 交于点 C .



$\because$ 直线 $y = x$ 平分 $\angle xOy$,

$$\therefore \angle MOC = \angle NOC.$$

$\because$ 点 B 是点 A 关于直线 $y = x$ 的对称点，

$\therefore OC$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AO = BO, \angle AOC = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle AOM = \angle BON,$$

$$\text{又 } \angle AMO = \angle BNO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = BN = 1, OM = ON = 4,$$

$$\therefore B(4,1).$$

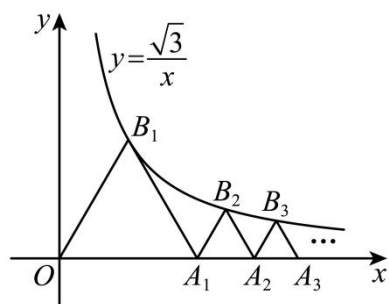
延长 MA , NB 交于点 D , 则 $D(4,4)$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 16 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{15}{2}.$$

18. 如图, $\triangle OB_1A_1$, $\triangle A_1B_2A_2$, $\triangle A_2B_3A_3$, $\dots$, $\triangle A_{n-1}B_nA_n$ 都是一边在 x 轴上的等边三角形, 点 B_1 , B_2 ,

B_3 , $\dots$, B_n 都在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上, 点 A_1 , A_2 , A_3 , $\dots$, A_n 都在 x 轴上, 则 A_{2027} 的

坐标为_____.



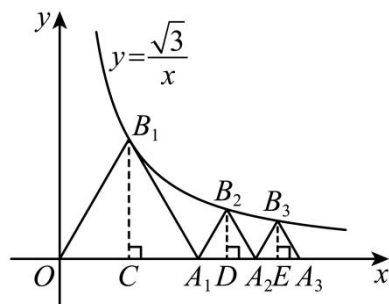
【答案】

$$(2\sqrt{2027}, 0)$$

【解析】

【分析】根据题意过点 B_1 作 $B_1C \perp x$ 轴于 C , 设 $OC = t$, 则 $B_1C = \sqrt{3}t$, 进而 $B_1(t, \sqrt{3}t)$, 代入反比例函数解析式, 求出 $t = 1$, 进而可求出 A_1 的坐标, 同样方法依次求出 A_2 , A_3 的坐标, 找出规律, 继而求出本题答案.

【详解】解: 如图, 过点 B_1 作 $B_1C \perp x$ 轴于 C , 过点 B_2 作 $B_2D \perp x$ 轴于 D , 过点 B_3 作 $B_3E \perp x$ 轴于 E ,



$\because \triangle OB_1A_1$, $\triangle A_1B_2A_2$, $\triangle A_2B_3A_3$, $\dots$, $\triangle A_{n-1}B_nA_n$ 都是一边在 x 轴上的等边三角形,

$\therefore$ 设 $OC = t$, 则 $B_1C = \sqrt{3}t$,

$$\therefore B_1(t, \sqrt{3}t),$$

$\because$ 点 B_1 在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{t}, \text{ 解得 } t = 1 \text{ 或 } t = -1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OC = 1, \quad OA_1 = 2,$$

$$\therefore A_1(2, 0),$$

同理设 A_1D 长度为 m , 则 B_2D 长度为 $\sqrt{3}m$,

$$\therefore B_2(2+m, \sqrt{3}m),$$

$\because$ 点 B_2 在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}m = \frac{\sqrt{3}}{2+m}, \text{ 解得 } m = \sqrt{2} - 1 \text{ 或 } m = -\sqrt{2} - 1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore A_1D = \sqrt{2} - 1, \quad A_1A_2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore OA_2 = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore A_2(2\sqrt{2}, 0),$$

同理设 A_2E 长度为 n , 则 B_3E 长度为 $\sqrt{3}n$,

$$\therefore B_3(2\sqrt{2} + n, \sqrt{3}n),$$

$\because$ 点 B_3 在反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore \sqrt{3}n = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + n}, \text{ 解得 } n = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ 或 } n = -\sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore A_2E = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad A_2A_3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA_3 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A_3(2\sqrt{3}, 0),$$

以此类推可得: $A_n(2\sqrt{n}, 0)$,

$$\therefore A_{2027}(2\sqrt{2027}, 0).$$

三、简答题 (4 题, 每题 6 分, 共 24 分)

19. 已知 $y-2$ 与 x 成正比例, 当 $x=3$ 时, $y=1$.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 若点 $(a, 3)$ 在这个函数的图象上, 求 a 的值.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

(2) $a = -3$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象和性质.

(1) 根据正比例的定义得到 $y-2=kx$, 进而根据“当 $x=3$ 时, $y=1$ ” 计算即可;

(2) 将 $(a, 3)$ 代入函数解析式计算即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $y-2=kx$, 则 $y=kx+2$,

当 $x=3$ 时, $y=1$, 代入得: $1=3k+2$,

解得: $k = -\frac{1}{3}$,

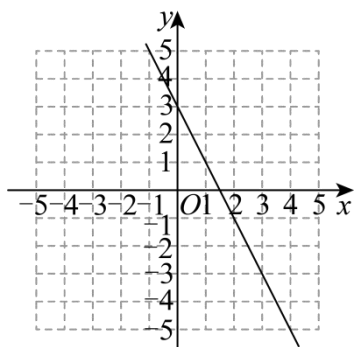
$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为: $y = -\frac{1}{3}x + 2$;

【小问 2 详解】

解: 将点 $(a, 3)$ 代入 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 得: $-\frac{1}{3}a + 2 = 3$,

解得: $a = -3$.

20. 如图, 根据函数 $y = -2x + 3$ 的图象, 回答下列问题:



- (1) y 的值随 x 值的增大而_____ (选填“增大”或“减小”);
- (2) 图象与 x 轴的交点坐标是_____, 图象与 y 轴的交点坐标是_____;
- (3) 当 x _____时, $y < 3$.

【答案】(1) 减小

(2) $\left(\frac{3}{2}, 0\right); (0, 3)$

(3) > 0

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象与性质, (1) 由一次函数图象求解即可;

(2) 由一次函数图象求解即可;

(3) 由一次函数图象求解即可.

【详解】 解: (1) 由图可得, y 的值随 x 值的增大而减小,

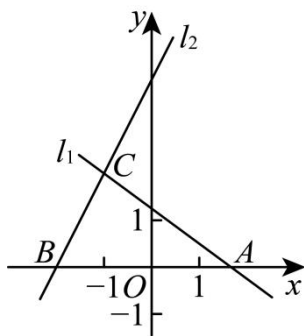
故答案为: 减小.

(2) 由图象得, 图象与 x 轴的交点坐标是 $(1.5, 0)$, 图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, 3)$,

故答案为: $(1.5, 0), (0, 3)$.

(3) 由图象得, 当 $x > 0$ 时, $y < 3$.

21. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 与 x 轴交于点 A ; 直线 $l_2: y = 2x + 4$ 与 x 轴交于点 B , 且与直线 l_1 交于点 C .



- (1) 求点 A 、点 B 、点 C 的坐标；
 (2) 若反比例函数经过点 C ，求反比例函数解析式.

【答案】 (1) $A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, $B(-2, 0)$, $C(-1, 2)$

(2) $y = -\frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与坐标轴的交点、两直线的交点及反比例函数的待定系数法. 解题的关键是掌握求直线与坐标轴交点的方法及联立方程组求交点坐标.

(1) 先分别求出两条直线与 x 轴的交点坐标，再联立两条直线的方程组求出交点 C 的坐标，先令 $y = 0$ 求出与 x 轴交点，再联立方程组求出两直线交点；

(2) 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，将点 C 的坐标代入求出 k 的值，从而得到反比例函数解析式.

【小问 1 详解】

解：对于直线 $l_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$,

令 $y = 0$, 得 $-\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$,

解得 $x = \frac{5}{3}$,

$\therefore A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$,

对于直线 $l_2: y = 2x + 4$,

令 $y = 0$, 得 $2x + 4 = 0$,

解得 $x = -2$,

$\therefore B(-2, 0)$,

联立两直线方程:
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

解得,
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases},$$

$\therefore C(-1,2);$

【小问 2 详解】

解: 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0),$

$\because$ 反比例函数经过点 $C(-1,2),$

$\therefore 2 = \frac{k}{-1},$

解得 $k = -2,$

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = -\frac{2}{x}.$

22. 【问题背景】垃圾分类，人人有责，为响应国家号召推进垃圾分类工作，某小区物业在小区内引入了智能回收机供居民使用，为实现小区垃圾分类收益最优化，物业积极筹划.



背景	小区每日需处理可回收垃圾和厨余垃圾共 15 吨，收益如下： ①处理可回收垃圾：每吨收益 50 元（如废纸、塑料瓶）； ②处理厨余垃圾：每吨收益 30 元（如剩饭剩菜）；
环保约束	①可回收垃圾量不超

	过厨余垃圾的 2 倍 (避免积压). ②厨余垃圾每天至少处理 4 吨 (防止腐败, 保障社区卫生).
--	--

【问题建构】设每日处理可回收垃圾 x 吨, 厨余垃圾 y 吨, 此时总收益为 W 元.

(1) 用含 x 的代数式表示 y , 则 $y =$ _____; 写出总收益 W (元) 关于 x 的函数关系式, $W =$ _____;

【优化决策】

(2) 为使每日净收益 W 最大, 物业应如何分配两类垃圾的处理量?

【答案】(1) $y = 15 - x$; $W = 20x + 450$

(2) 为使每日净收益 W 最大, 处理可回收垃圾 10 吨, 厨余垃圾 5 吨

【解析】

【分析】(1) 根据小区每日需处理可回收垃圾和厨余垃圾共 15 吨可得 $y = 15 - x$; 然后根据处理可回收垃圾每吨收益 50 元, 处理厨余垃圾每吨收益 30 元可表示出 W ;

(2) 根据题意求出自变量 x 的取值, 再根据一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 每日需处理可回收垃圾和厨余垃圾共 15 吨,

$$\therefore y = 15 - x;$$

$\because$ 处理可回收垃圾每吨收益 50 元, 处理厨余垃圾每吨收益 30 元

$$\therefore W = 50x + 30(15 - x) = 20x + 450;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 根据题意, } x \text{ 应满足 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2(15 - x), \\ 15 - x \geq 4 \end{cases}$$

解得 $0 \leq x \leq 10$.

$$\therefore W = 20x + 450, \quad 20 > 0,$$

$\therefore W$ 随 x 的增大而增大,

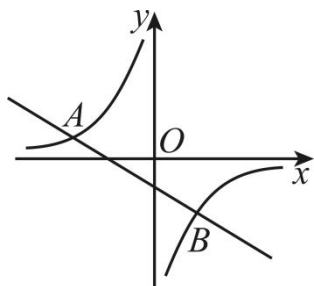
$$\therefore \text{当 } x = 10 \text{ 时, } W \text{ 有最大值, 最大值为 } W = 20 \times 10 + 450 = 650,$$

此时 $15 - x = 15 - 10 = 5$,

∴ 为使每日净收益 W 最大，应处理可回收垃圾 10 吨，厨余垃圾 5 吨，最大收益 650 元.

四、解答题 (4 题, 8+8+8+10, 共 34 分)

23. 如图，反比例函数 $y_1 = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 与一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图像相交于 A 、 B 两点，点 A 的坐标为 $(-6, 2)$ ，点 B 的坐标为 $(3, n)$.



(1) 求反比例函数和一次函数的解析式.

(2) 连接 AO 、 BO ，求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = -\frac{12}{x}$, $y = -\frac{2}{3}x - 2$

(2) 9

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的综合、一次函数与几何的综合.

(1) 利用待定系数法求出函数的解析式;

(2) 根据一次函数的解析式求出直线与坐标轴的交点坐标，根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COD}$ 求出 $\triangle AOB$ 的面积.

【小问 1 详解】

解：将 $A(-6, 2)$ 代入 $y_1 = \frac{m}{x}$,

可得： $m = -6 \times 2 = -12$,

∴ 反比例函数解析式为 $y = -\frac{12}{x}$,

将 $B(3, n)$ 代入反比例函数解析式 $y = -\frac{12}{x}$,

可得： $n = -4$,

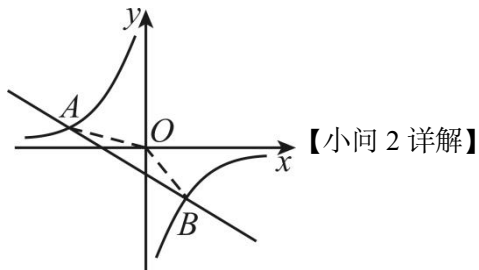
∴ 点 B 的坐标为 $(3, -4)$,

将 A 、 B 两点的坐标代入 $y = kx + b$,

可得：
$$\begin{cases} -6k + b = 2 \\ 3k + b = -4 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = -2 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$.



解: $y = -\frac{2}{3}x - 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{2}{3}x - 2 = -2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0, -2)$,

$\therefore OC = 2$,

当 $y = 0$, $-\frac{2}{3}x - 2 = 0$,

解得: $x = -3$,

$\therefore$ 点 D 的坐标是 $(-3, 0)$,

$\therefore OD = 3$,

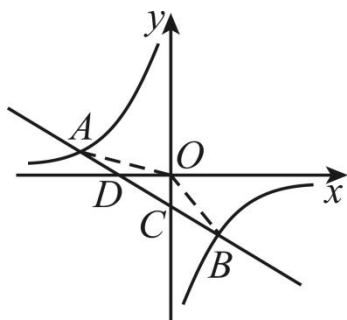
$\therefore A(-6, 2)$, $B(3, -4)$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COB}$

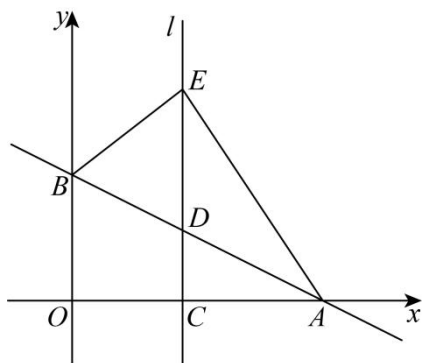
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3$

$= 3 + 6$

$= 9$.



24. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的图象分别与 x 轴、 y 轴交于点 A , B , 点 C 是线段 OA 上的一个动点 (不与点 O , 点 A 重合), 过点 C 作 x 轴的垂线 l 交直线 AB 于点 D , 在射线 CD 上取点 E , 使 $CE = 2OC$, 设点 C 的横坐标为 m .



- (1) 求 A , B 两点的坐标;
 (2) 若 $\triangle ABE$ 的面积等于 $\triangle AOB$ 面积的一半, 求 m 的值.

【答案】 (1) $A(6,0)$, $B(0,3)$

(2) $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 分别令 $x=0$ 、 $y=0$, 求出对应的 y 、 x , 即可求解;

(2) 先确定 $D\left(m, -\frac{1}{2}m + 3\right)$, $E(m, 2m)$, 得 $DE = \left|\frac{5}{2}m - 3\right|$, 然后分别求得 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = 9$,

$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ADE} = 3DE$, 然后建立关于 DE 的方程进行求解, 继而得到关于 m 的方程, 可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的图象分别与 x 轴、 y 轴交于点 A , B ,

当 $x=0$ 时, $y=3$; 当 $y=0$ 时, $x=6$,

$\therefore A(6,0)$, $B(0,3)$;

【小问 2 详解】

$\because$ 点 C 是线段 OA 上的一个动点 (不与点 O , 点 A 重合), 过点 C 作 x 轴的垂线 l 交直线 AB 于点 D , 设点 C 的横坐标为 m ,

$\therefore D\left(m, -\frac{1}{2}m + 3\right)$,

$\because$ 在射线 CD 上取点 E , 使 $CE = 2OC$,

$$\therefore E(m, 2m),$$

$$\therefore DE = \left| 2m - \left(-\frac{1}{2}m + 3 \right) \right| = \left| \frac{5}{2}m - 3 \right|,$$

$$\therefore A(6, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore OA = 6, OB = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9,$$

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times DE \times OC + \frac{1}{2} \times DE \times AC = \frac{1}{2} \times DE \times (OC + AC) = \frac{1}{2} \times DE \times OA = \frac{1}{2} \times DE \times 6 = 3DE$$

,

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积等于 } \triangle AOB \text{ 面积的一半, 即 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB},$$

$$\therefore 3DE = \frac{1}{2} \times 9,$$

$$\therefore DE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \left| \frac{5}{2}m - 3 \right| = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } \frac{5}{2}m - 3 = \frac{3}{2} \text{ 时, 解得: } m = \frac{9}{5};$$

$$\text{当 } \frac{5}{2}m - 3 = -\frac{3}{2} \text{ 时, 解得: } m = \frac{3}{5};$$

综上所述, m 的值为 $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题是一次函数综合运用, 考查了一次函数图象与坐标轴的交点, 坐标与图形, 三角形的面积等知识点, 利用方程的思想解决问题是解题的关键.

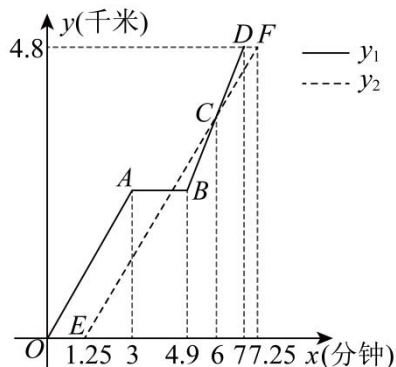
25. 项目式学习

项目主题: 为智慧农场设计无人机与运输车协同作业方案.

项目背景: 在现代智慧农业中, 为大型农田喷洒农药常采用无人机与运输车协同作业的模式. 运输车承载农药和操作人员, 无人机进行快速喷洒. 为确保作业效率与通信稳定, 两种设备需保持合理距离. 某农场计划对一块长条形标准化农田 (长度 4.8 千米) 进行喷洒作业, 数学实践小组受邀通过建立函数模型, 为此协同作业设计最优方案.

数据搜集: 小组根据设备性能参数, 模拟绘制了无人机与运输车从起点出发, 驶向农田另一端 (4.8 千米处) 的作业过程. 下图中, 折线 $OABCD$ 表示无人机行程, 线段 EF 表示运输车行程, 它们分别表示无人机、

运输车所走路程 y_1 (千米)、 y_2 (千米) 与时间 x (分钟) 之间的函数关系对应的图象. 运输车因装载农药, 比无人机晚出发; 无人机在途中因临时指令停留, 随后提速飞往终点.
请结合图象信息, 完成下列任务:



分析作业过程: (1) 运输车比无人机晚出发_____分钟, 无人机在途中因接收临时指令停留了_____分钟;

建立行程模型: (2) 分别求出无人机在接收完指令后 (即 $4.9 \leq x \leq 7.25$ 时段) 所走路程 y_1 , 和运输车所走路程 y_2 , 与时间 x 之间的函数关系式;

(3) 无人机在接收完指令后, 立即提速飞往终点. 请问无人机在接收指令时, 距离起点多少公里?

评估协同方案: (4) 为保证作业指令实时传输及安全, 无人机在接受指令后提速飞行过程中, 与运输车之间的路程不超过 250 米. 请通过计算判断: 按图象所示的走法, 两设备的距离是否符合上述约定?

【答案】 (1) 1.25, 1.9; (2) $y_1 = x - 2.2$; $y_2 = 0.8x - 1$; (3) 2.7 千米; (4) 符合约定

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图象可得获取信息即可;

(2) 先求出运输车所行路程直线 EF 的表达式是 $y_2 = 0.8x - 1$, 得到点 C 的坐标是 $(6, 3.8)$. 再由点 $C(6, 3.8)$ 、点 $D(7, 4.8)$ 在直线 BD 上, 求出 BD 的表达式 $y_1 = x - 2.2$.

(3) 求出 $B(4.9, 2.7)$, 得到无人机在排除故障时, 距出发点的路程是 2.7 千米.

(4) 求出当 $4.9 \leq x < 6$ 时, 当 $x = 4.9$ 时, $h_{\text{最大}} = 0.22$ (千米) = 220 米 < 250 米; 当 $6 \leq x < 7$ 时, $x = 7$ 时, $h_{\text{最大}} = 0.2 \times 7 - 1.2 = 0.2$ (千米) = 200 米 < 250 米; 按图象所表示的走法符合约定.

【详解】 解: (1) 根据函数图象可得, 运输车比无人机晚出发 1.25 分钟, 无人机在途中因接收临时指令停留了 $4.9 - 3 = 1.9$ 分钟;

(2) 设运输车所行路程直线 EF 的表达式为 $y_2 = kx + b$,

$\therefore$ 点 $E(1.25, 0)$, 点 $F(7.25, 4.8)$ 均在直线 EF 上,

$$\therefore \begin{cases} 1.25k + b = 0 \\ 7.25k + b = 4.8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 0.8 \\ b = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 运输车所行路程直线 EF 的表达式是 $y_2 = 0.8x - 1$.

$\therefore$ 点 C 在直线 EF 上, 且点 C 的横坐标为 6,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 $0.8 \times 6 - 1 = 3.8$,

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(6, 3.8)$.

设直线 BD 的解析式为 $y_1 = mx + n$,

$\therefore$ 点 $C(6, 3.8)$ 、点 $D(7, 4.8)$ 在直线 BD 上,

$$\therefore \begin{cases} 6m + n = 3.8 \\ 7m + n = 4.8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 1 \\ n = -2.2 \end{cases},$$

$\therefore$ 无人机在接收完指令后 (即 $4.9 \leq x \leq 7.25$ 时段) BD 的表达式 $y_1 = x - 2.2$.

(3) $\therefore$ B 点在直线 BD 上且点 B 的横坐标为 4.9, 代入 y 得 $B(4.9, 2.7)$,

$\therefore$ 无人机在排除故障时, 距出发点的路程是 2.7 千米.

(4) 符合约定;

方法一: 由图象可知: 无人机和运输车第一次相遇后在 B 和 D 相距最远.

在点 B 处有 $y_2 - y_1 = 0.8 \times 4.9 - 1 - (4.9 - 2.2) = 0.22$ 千米 = 220 米 < 250 米;

在点 D 有 $y_1 - y_2 = 7 - 2.2 - (0.8 \times 7 - 1) = 0.2$ 千米 = 200 米 < 250 米,

$\therefore$ 按图象所表示的走法符合约定.

方法二: 设两设备之间的距离为 h 千米,

当 $4.9 \leq x < 6$ 时, $h = y_2 - y_1 = 0.8x - 1 - (x - 2.2) = -0.2x + 1.2$,

$\therefore -0.2 < 0$, $\therefore h$ 随着 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = 4.9$ 时, $h_{\text{最大}} = -0.2 \times 4.9 + 1.2 = 0.22$ (千米) = 220 米 < 250 米;

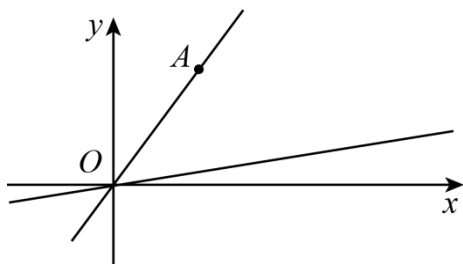
当 $6 \leq x < 7$ 时, $h = y_1 - y_2 = x - 2.2 - (0.8x - 1) = 0.2x - 1.2$,

$\because 0.2 > 0$, $\therefore h$ 随着 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 7$ 时, $h_{\text{最大}} = 0.2 \times 7 - 1.2 = 0.2$ (千米) = 200 米 < 250 米;

$\therefore$ 按图象所表示的走法符合约定.

26. 如图, 在直角坐标平面内, 点 O 是坐标原点, 点 A 坐标为 $(3, 4)$, 将直线 OA 绕点 O 顺时针旋转 45° 后得到直线 $y = kx$ ($k \neq 0$).



(1) 求直线 OA 的表达式;

(2) 求 k 的值;

(3) 在直线 $y = kx$ ($k \neq 0$) 上有一点 B , 其纵坐标为 1. 若 x 轴上存在点 C , 使 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 请直接写出满足要求的点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x$

(2) $\frac{1}{7}$

(3) $(7+2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(7-2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(0, 0)$ 或 $(6, 0)$ 或 $(\frac{25}{8}, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法可求解;

(2) 过点 A 作 $AD \perp OA$, 交直线 $y = kx$ 于 D , 作 $EF \perp y$ 轴于 E , 过点 D 作 $DF \perp EF$ 于 F , 由 “ AAS ” 可证 $\triangle AOE \cong \triangle DAF$, 可得 $OE = AF = 4$, $AE = DF = 3$, 进而可得点 D 坐标, 代入解析式可求 k 的值;

(3) 分三种情况讨论, 利用等腰三角形的性质和两点距离公式可求解.

【小问 1 详解】

设直线 OA 解析式为 $y = ax$,

$\because$ 点 $A(3, 4)$,

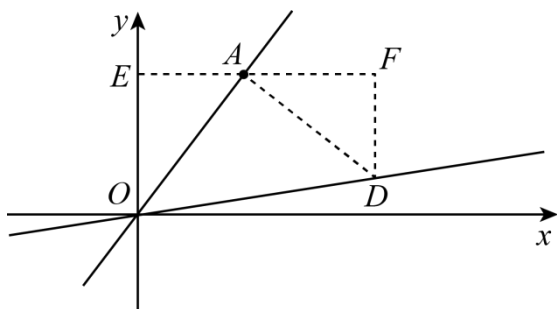
$\therefore 4 = 3a$,

$$\therefore a = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } OA \text{ 解析式为 } y = \frac{4}{3}x,$$

【小问 2 详解】

如图，过点 A 作 $AD \perp OA$ ，交直线 $y = kx$ 于 D ，作 $EF \perp y$ 轴于 E ，过点 D 作 $DF \perp EF$ 于 F ，



$$\because \angle AOD = 45^\circ, \quad \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ADO = 45^\circ,$$

$$\therefore AO = AD,$$

$$\because EF \perp EO, \quad EF \perp DF,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE + \angle AOE = 90^\circ = \angle EAO + \angle FAD,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle DAF (AAS),$$

$$\therefore OE = AF = 4, \quad AE = DF = 3,$$

$$\therefore \text{点 } D(7,1),$$

$$\therefore 1 = 7k,$$

$$\therefore k = \frac{1}{7};$$

【小问 3 详解】

$$\because k = \frac{1}{7},$$

$$\therefore y = \frac{1}{7}x,$$

$$\text{当 } y = 1 \text{ 时, } x = 7,$$

$$\therefore \text{点 } B(7,1);$$

设点 $C(x, 0)$,

$\because$ 点 $C(x, 0)$, 点 $B(7, 1)$, 点 $A(3, 4)$,

$$\therefore AB^2 = (7-3)^2 + (1-4)^2 = 25,$$

$$AC^2 = (3-x)^2 + 16, \quad BC^2 = (7-x)^2 + 1,$$

若 $AB = AC$ 时,

$$\therefore 25 = (3-x)^2 + 16,$$

解得: $x = 0$ 或 6 ,

$\therefore$ 点 $C(0, 0)$ 或 $(6, 0)$;

当 $AB = BC$ 时,

$$\therefore 25 = (7-x)^2 + 1,$$

$$\therefore x = 7 \pm 2\sqrt{6},$$

$\therefore$ 点 $C(7+2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(7-2\sqrt{6}, 0)$;

当 $AC = BC$ 时,

$$\therefore (3-x)^2 + 16 = (7-x)^2 + 1,$$

$$\therefore x = \frac{25}{8},$$

$\therefore$ 点 $C(\frac{25}{8}, 0)$,

综上所述: 点 C 坐标为 $(7+2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(7-2\sqrt{6}, 0)$ 或 $(0, 0)$ 或 $(6, 0)$ 或 $(\frac{25}{8}, 0)$.

【点睛】 本题是一次函数综合题, 考查了待定系数法求解析式, 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 两点距离公式等知识, 利用分类讨论思想解决问题是解题的关键.

附加题 (2 题, 共 10 分)

27. 设实数 a, b, c 满足 $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$, $a \geq b \geq c$, 则直线 $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ 必定经

过定点_____.

【答案】 $(1, -1)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 把所给等式两边平方, 得出 $a = -b - c$, 从而可得

$y = \frac{-b-c}{b}x + \frac{c}{b} = \frac{c}{b}(1-x) - 1$, 把 $x=1$ 代入即可求解.

【详解】解: 将 $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$ 两边平方, 得 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac}$,

$$\text{即 } \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} = 0,$$

整理得 $2c + 2a + 2b = 0$,

即 $a = -b - c$;

将 $a = -b - c$ 代入 $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, 得

$$y = \frac{-b-c}{b}x + \frac{c}{b} = \frac{c}{b}(1-x) - 1;$$

当 $x=1$ 时, $y=-1$;

即直线 $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ 经过定点 $(1, -1)$.

故答案为: $(1, -1)$.

28. 已知: 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1 \perp l_2$, 直线 l_1 解析式 $y_1 = k_1x + b_1$, 直线 l_2 解析式 $y_2 = k_2x + b_2$,

两条直线均不与坐标轴平行. 求证: $k_1k_2 = -1$

【答案】见解析

【解析】

【分析】设直线 l_1 与 l_2 的交点为 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = k_1x_0 + b_1$, $y_0 = k_2x_0 + b_2$, 在直线 l_1 上取点 $A(x_0 + 1, y_1')$, 根据一次函数的性质可得 $y_1' = y_0 + k_1$, 即 $A(x_0 + 1, y_0 + k_1)$, 同理在直线 l_2 上取点 $B(x_0 + 1, y_0 + k_2)$, 由 $l_1 \perp l_2$ 可得 $\triangle APB$ 是直角三角形, 再利用勾股定理得到 $AP^2 + BP^2 = AB^2$, 列出关于 k_1, k_2 的等式, 整理式子即可证明结论.

【详解】证明: 设直线 l_1 与 l_2 的交点为 $P(x_0, y_0)$,

则 $y_0 = k_1x_0 + b_1$, $y_0 = k_2x_0 + b_2$,

在直线 l_1 上取点 $A(x_0 + 1, y_1')$,

代入 l_1 解析式得 $y_1' = k_1(x_0 + 1) + b_1 = k_1x_0 + b_1 + k_1 = y_0 + k_1$,

即 $A(x_0 + 1, y_0 + k_1)$,

$$\therefore AP^2 = (x_0 + 1 - x_0)^2 + (y_0 + k_1 - y_0)^2 = 1 + k_1^2,$$

同理在直线 l_2 上取点 $B(x_0 + 1, y_2')$, 可得 $y_2' = y_0 + k_2$,

即 $B(x_0 + 1, y_0 + k_2)$,

$$\therefore BP^2 = (x_0 + 1 - x_0)^2 + (y_0 + k_2 - y_0)^2 = 1 + k_2^2, \quad AB^2 = (y_0 + k_2 - y_0 - k_1)^2 = (k_2 - k_1)^2,$$

$$\therefore l_1 \perp l_2,$$

$\therefore \triangle APB$ 是直角三角形, $\angle APB = 90^\circ$,

$$\therefore AP^2 + BP^2 = AB^2,$$

$$\therefore 1 + k_1^2 + 1 + k_2^2 = (k_2 - k_1)^2,$$

整理得: $k_1 k_2 = -1$.