

初二数学

一、选择题 (共 6 小题)

1. 将 $(-1, 2)$ 向右平移 3 个单位长度后得到点 B , 则点 B 的坐标为 ()

- A. $(-2, 2)$
- B. $(2, -3)$
- C. $(-1, -2)$
- D. $(2, 2)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据点的平移规律：左右平移改变横坐标，右移加左移减，纵坐标不变，本题按规律计算即可得到结果.

【详解】解：将 $(-1, 2)$ 向右平移 3 个单位长度后得到点 B ,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-1+3, 2)$, 即 $(2, 2)$.

2. 下列命题中，假命题的是 ()

- A. 平行四边形的对角线互相平分
B. 对角线垂直的平行四边形是菱形
C. 矩形的对角线互相平分且相等
D. 对角线相等的平行四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了命题与定理的知识，掌握平行四边形的性质、菱形、正方形的判定及矩形的性质是解答本题的关键.

根据平行四边形的性质，菱形的性质及正方形的性质，矩形的判定定理，结合选项即可得出答案.

【详解】解：A、平行四边形的对角线互相平分，根据平行四边形的性质定理，是真命题，故此选项不符合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，根据菱形的判定定理，是真命题，故此选项不符合题意；

C、矩形的对角线互相平分且相等，根据矩形的性质定理，是真命题，故此选项不符合题意；

D、对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是正方形，是假命题，故此选项符合题意；

故选: D.

3. 下列图形中，是中心对称但不是轴对称的图形是 ()

- A. 矩形 B. 菱形 C. 平行四边形 D. 圆形

【答案】 C

【解析】

【详解】解：A、矩形是中心对称图形，也是轴对称图形；

B、菱形是中心对称图形，也是轴对称图形；

C、平行四边形是中心对称图形，但不是轴对称图形；

D、圆形是中心对称图形，也是轴对称图形.

4. 已知点 $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(1, y_3)$ 都在直线 $y = -x$ 上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_1 < y_2 < y_3$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【答案】 A

【解析】

【分析】先根据直线 $y = -x$ 判断出函数图象的增减性，再根据各点横坐标的大小进行判断即可.

【详解】 $\because$ 直线 $y = -x$, $k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

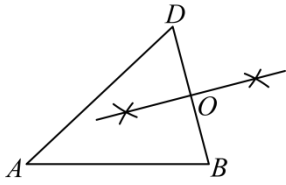
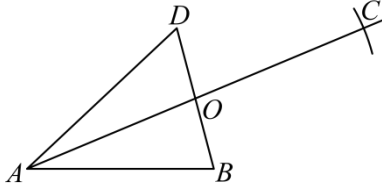
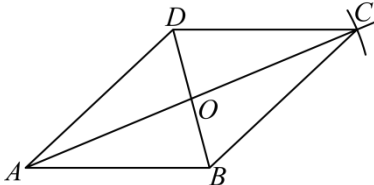
又 $\because -2 < -1 < 1$,

$\therefore y_1 > y_2 > y_3$.

故选: A.

【点睛】此题考查一次函数的增减性，解题关键在于掌握一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中，当 $k > 0$, y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$, y 随 x 的增大而减小.

5. 综合实践课上，嘉嘉画出 $\triangle ABD$ ，利用尺规作图找一点 C ，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 如图是其作图过程. 在嘉嘉的作法中，可直接判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的条件是 ()

(1) 作 BD 的垂直平分线交 BD 于点 O  图1	(2) 连接 AO，在 AO 的延长线上取 $OC = AO$  图2	(3) 连接 DC, BC，则四边形 $ABCD$ 即为所求  图3
--	---	--

- A. 两组对边分别平行 B. 两组对边分别相等
C. 对角线互相平分 D. 一组对边平行且相等

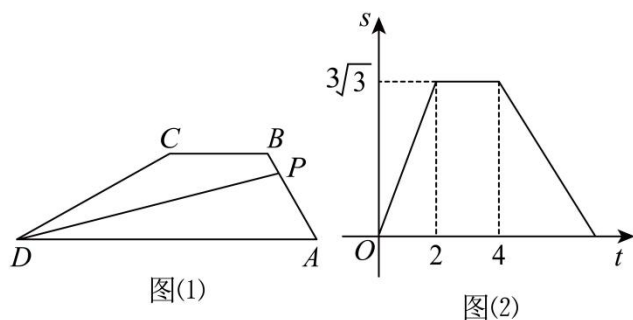
【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判断，解题的关键是掌握基本的作图方法及平行四边形的判定定理。根据作图步骤可知，得出了对角线互相平分，从而可以判断。

【详解】解：根据图 1，得出 BD 的中点 O ，图 2，得出 $OC = AO$ ，可知使得对角线互相平分，从而得出四边形 $ABCD$ 为平行四边形，判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的条件是：对角线互相平分，故选：C。

6. 如图（1）在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，动点 P 从 A 点出发，以 1cm/s 的速度沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向不停移动，直到点 P 到达点 D 后才停止。已知 $\triangle PAD$ 的面积 S （单位： cm^2 ）与点 P 移动的时间 t （单位： s ）的函数关系如图（2）所示，则点 P 从开始移动到停止移动一共用了（ ） s 。



A. 6

B. 7

C. $4+3\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$

【答案】D

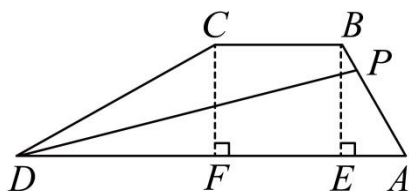
【解析】

【分析】 本题考查了动点问题的函数图象，勾股定理，矩形的判定与性质，掌握知识点的应用是解题的关键。

根据图（2）判断出 AB 、 BC 的长度，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，然后求出梯形 $ABCD$ 的高 BE ，再根据 $t=2$ 时 $\triangle PAD$ 的面积求出 AD 的长度，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ，然后求出 DF 的长度，利用勾股定理列式求出 CD 的长度，然后求出 AB 、 BC 、 CD 的和，再根据时间 = 路程 $\div$ 速度计算即可得解。

【详解】解：由图（2）可知， t 在 2 到 4 秒时， $\triangle PAD$ 的面积不发生变化，
 $\therefore$ 在 AB 上运动的时间是 2 秒，在 BC 上运动的时间是 $4-2=2$ （秒），
 $\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s ，
 $\therefore AB=2\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ，

如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ，



$$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle BEA = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEF + \angle CBE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CFE = \angle CBE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是矩形,

$$\therefore BE = CF, \quad BC = EF = 2\text{cm},$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 1\text{cm},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AD \times BE = 3\sqrt{3}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} \times AD \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = 6\text{cm},$$

$$\therefore DF = AD - AE - EF = 6 - 1 - 2 = 3(\text{cm}),$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDF \text{ 中, } CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{动点 } P \text{ 运动的总路程为 } AB + BC + CD = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s ,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 从开始移动到停止移动一共用了 } (4 + 2\sqrt{3}) \div 1 = 4 + 2\sqrt{3}(\text{秒}),$$

故选: D.

二、填空题 (共 12 小题)

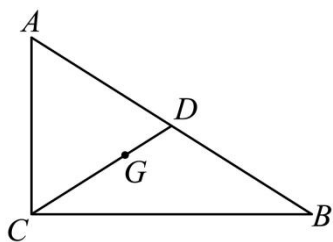
7. $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$, G 为重心, 则 $CG =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的重心: 三角形的重心是三角形三边中线的交点; 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$. 也考查了直角三角形斜边上的中线性质的性质. 根据直角三角形斜边上的中线性质的性质求出 CD , 根据重心的性质求出 CG 的长即可.

【详解】解：如图， $\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，



$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线， $CG = 2DG$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ，

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 3$ ，

$\therefore CG = 2$ ，

故答案为：2.

8. 若正比例函数 $y = (3m - 2)x$ 的图象经过点 $P(1, -3)$ ，则 m 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】将点 P 的坐标代入函数解析式，得到关于 m 的一元一次方程，解一元一次方程即可得到 m 的值.

【详解】解： $\because$ 正比例函数 $y = (3m - 2)x$ 的图象经过点 $P(1, -3)$ ，

$\therefore$ 将 $x = 1$ ， $y = -3$ 代入 $y = (3m - 2)x$ ，得 $3m - 2 = -3$ ，

解得 $m = -\frac{1}{3}$.

9. 已知一个凸多边形的内角和等于五边形外角和的 2 倍，则这个凸多边形的边数是_____.

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查多边形的内角和与外角和的综合应用，根据多边形的内角和的计算公式，以及任意多边形的外角和为 360 度，列出方程进行求解即可.

【详解】解：设这个凸多边形为 n 边形，

由题意，得： $(n - 2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ$ ，

解得： $n = 6$ ；

故这个凸多边形为六边形；

故答案为：6.

10. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A - \angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是_____.

【答案】115 度##115°

【解析】

【分析】根据平行四边形邻角互补的性质，可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，结合已知条件 $\angle A - \angle B = 50^\circ$ ，即可求解.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A - \angle B = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 115^\circ.$$

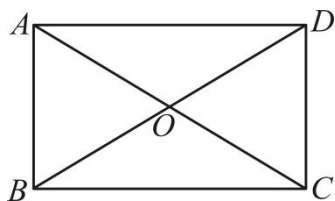
11. 已知矩形的两条对角线的夹角为 60° ，如果一条对角线长为 6，那么矩形的面积为_____.

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】

【详解】分析：先画图，由题意可知四边形 $ABCD$ 是矩形， $AC=6$ ， $\angle AOB=60^\circ$ ，根据矩形性质可知 $OA=OB$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ，易证 $\triangle AOB$ 是等边三角形，即可求出 AB 的长，再利用勾股定理求出 BC 的长，然后再利用矩形的面积公式求解即可.

详解：如图所示，在矩形 $ABCD$ 中， $\angle AOB=60^\circ$ ， $AC=6$ ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OB = OA = \frac{1}{2} AC = 3, \quad \angle ABC = 90^\circ,$$

又 ∵ $\angle AOB = 60^\circ$ ，

∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = AO = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得，

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{矩形} ABCD} = AB \times BC = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

故答案为 $9\sqrt{3}$.

点睛：本题主要考查了矩形的性质、等边三角形的性质及勾股定理.利用矩形的性质及已知条件得出 $\triangle AOB$

是等边三角形是解题的关系.

12. 我们把一条直线上满足横坐标是纵坐标 2 倍的点称为“加倍点”, 那么直线 $y = x + 2$ 上的“加倍点”坐标是_____.

【答案】 $(-4, -2)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 根据加倍点的定义设出加倍点的坐标是解题的关键. 根据加倍点的定义, 设出加倍点的坐标, 代入直线的解析式, 即可求解.

【详解】 解: 设加倍点为: $(2a, a)$,

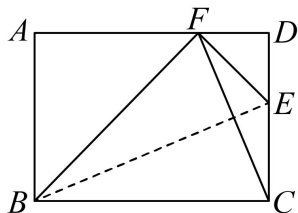
代入直线的解析式得: $a = 2a + 2$,

$\therefore a = -2$,

$\therefore$ 加倍点的坐标为: $(-4, -2)$.

故答案为: $(-4, -2)$.

13. 如图, 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 将这个矩形沿直线 BE 折叠, 使点 C 落在边 AD 上的点 F 处, 折痕 BE 交边 CD 于点 E , 那么 $\angle DCF$ 等于_____度.



【答案】 22.5

【解析】

【分析】 本题考查了翻折问题, 解决本题的关键是由翻折得到 $BF = BC$.

由翻折得到 $BF = BC$, 先根据勾股定理求出 AF , 得到 $\triangle BAF$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle ABF = \angle AFB = 45^\circ$, 进而求出 $\angle FBC = 90^\circ - \angle ABF = 45^\circ$, 再根据 $\triangle BCF$ 为等腰三角形, 得到 $\angle BCF = \angle BFC = (180^\circ - \angle CBF) \div 2 = 67.5^\circ$, 进而求出 $\angle DCF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$.

【详解】 解: 由折叠可得: $BF = BC$,

$\because BC = 2$,

$\therefore BF = BC = 2$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BAF \text{ 中, } AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = 90^\circ - \angle ABF = 45^\circ,$$

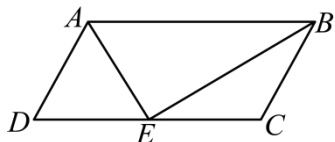
$$\therefore \text{在 } \triangle BCF \text{ 中, } BF = BC, \angle FBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BFC = (180^\circ - \angle CBF) \div 2 = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

故答案为: 22.5.

14. 如图, 已知 $\square ABCD$ 中, BE 平分 $\angle ABC$, $AE \perp BE$, 若 $AB = 4\sqrt{2}$, $\square ABCD$ 的周长为_____.



【答案】 $12\sqrt{2}$

【解析】

【分析】欲求平行四边形 $ABCD$ 的周长则需求出 $AD + BC$ 的值; 根据平行四边形的性质和角平分线的定义可求得 $\angle CEB = \angle CBE$, 根据等角对等边可得 $CE = BC$, 然后根据直角三角形两锐角互余可得

$\frac{1}{2}\angle ABC + \angle EAB = 90^\circ$, 结合 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, 可得 $\angle EAB = \frac{1}{2}\angle DAB$, 从而根据等角对等边得到 $AD = DE$, 进而得到 $AD + BC = CD$, 即可解答.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ, \angle CEB = \angle ABE, \angle BAE = \angle DEA,$$

$$\therefore BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle CBA,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CBE,$$

$$\therefore CE = BC,$$

$$\therefore AE \perp BE,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \angle ABC + \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + 2\angle EAB = 180^\circ = \angle ABC + \angle DAB, \text{ 即 } \angle EAB = \frac{1}{2} \angle DAB,$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长} = 2AB + AD + BC = 2AB + DE + CE = 3AB = 3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

15. 已知一次函数 $y = 4x - 3$ 与 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像的交点坐标是 $(2, 5)$, 则方程组 $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ kx - y = 0 \end{cases}$

的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

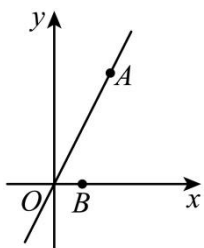
【解析】

【分析】 根据一次函数图象交点坐标与二元一次方程组解的关系, 一次函数图象的交点坐标就是两个一次函数解析式组成的二元一次方程组的解, 据此可得到方程组的解.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = 4x - 3$ 与 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像的交点坐标是 $(2, 5)$,

$$\therefore \text{方程组 } \begin{cases} 4x - y = 3 \\ kx - y = 0 \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $A(2, 4)$ 在正比例函数 $y = 2x$ 的图像上, 点 $B(1, 0)$ 和点 C 都在 x 轴上, 当 $\triangle ABC$ 的面积是 6 时, 点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(4, 0)$ 或 $(-2, 0)$

【解析】

【分析】 设出点 C 的坐标, 得到 BC 的长度, 根据三角形面积计算即可.

【详解】解：点 C 在 x 轴上，设点 $C(m, 0)$ ，

$$\therefore BC = |m - 1|,$$

$\because \triangle ABC$ 的面积是 6，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times y_A = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times |m - 1| \times 4 = 6, \text{ 可得 } |m - 1| = 3,$$

则有 $m - 1 = 3$ 或 $m - 1 = -3$ ，

解得 $m = 4$ 或 $m = -2$ ，

$\therefore$ 点 $C(4, 0)$ 或 $(-2, 0)$ 。

17. 我们规定：在四边形 $ABCD$ 中， O 是边 BC 上一点，如果 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 全等（对应关系不确定），那么点 O 叫做该四边形的“等形点”。在四边形 $EFGH$ 中， $\angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ， $EF = 1$ ， $FG = 3$ ，如果该四边形的“等形点”在边 FG 上，那么四边形 $EFGH$ 的周长是_____。

【答案】

8 或 $6 + \sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle FGH = 90^\circ$ ，结合“等形点”对应关系不确定的条件，分两种全等对应情况讨论，利用全等三角形的性质、勾股定理求出四边形各边长，进而计算周长。

【详解】解： $\because \angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ，

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的“等形点” O 在边 FG 上，

如图 1，当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时，可得 $EF = HG = 1$ ， $OF = OG$ ，

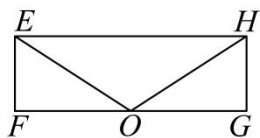


图1

$\therefore FG = OF + OG = 3$ ， $EF \parallel GH$ ， $EF = HG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$$\therefore EH = FG = 3,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长为 $2 \times (1 + 3) = 8$ ；

如图 2, 当 $\triangle OEF \cong \triangle HOG$ 时, 可得 $EF = OG = 1$, $OF = GH$, $OE = OH$, $\angle OEF = \angle HOG$,

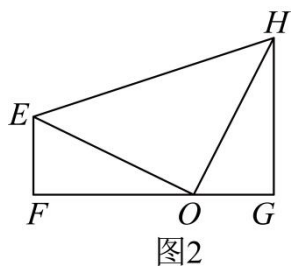


图2

$$\because FG = 3,$$

$$\therefore OF = FG - OG = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore GH = 2,$$

$$\because \angle EFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HOG + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOH = 180^\circ - (\angle HOG + \angle EOF) = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFO \text{ 中, 由勾股定理得 } OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

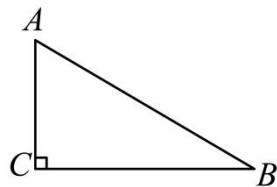
$$\therefore OH = OE = \sqrt{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle EOH \text{ 中, 由勾股定理得 } EH = \sqrt{EO^2 + HO^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{ 四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } EF + FG + GH + EH = 1 + 3 + 2 + \sqrt{10} = 6 + \sqrt{10},$$

综上所述, 四边形 $EFGH$ 的周长为 8 或 $6 + \sqrt{10}$.

18. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, D 是 BC 边上一点, 沿直线 AD 翻折 $\triangle ABD$, 点 B 落在点 E 处, 如果 $\angle ABE = 45^\circ$, 那么 BD 的长为_____.



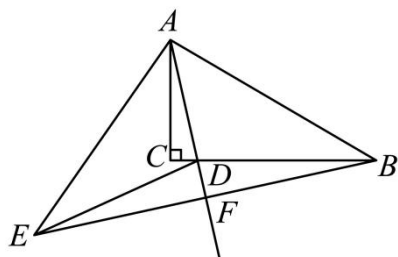
【答案】 $2\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 先根据题意补全图形, 并求出 AC , BC 的长. 再根据折叠的性质可推出 $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形, 从而得出 BF 的长, 设 $CD = x$, 则 $BD = \sqrt{3} - x$, 再证明 $\triangle ACD \sim \triangle BFD$, 得出 $\frac{AC}{BF} = \frac{CD}{DF}$, 从而可用含 x 的

式子表示出 DF 的长，又在 Rt△BDF 中，根据勾股定理可得出关于 x 的方程，解出 x，从而可得出结果.

【详解】解：在 Rt△ACB 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， $BC=\sqrt{3}$ ，



$$\therefore AC=1, AB=2.$$

由折叠的性质可得 $AF \perp BE$,

$$\text{又 } \angle ABF=45^\circ, \therefore \angle BAF=90^\circ-45^\circ=45^\circ,$$

$$\therefore AF=BF, \therefore \sqrt{2} BF=AB, \therefore BF=\sqrt{2}.$$

$$\text{设 } CD=x, \text{ 则 } BD=\sqrt{3}-x,$$

$$\because \angle C=\angle BFD=90^\circ, \angle ADC=\angle BDF,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BF} = \frac{CD}{DF}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{DF},$$

$$\therefore DF=\sqrt{2}x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDF \text{ 中, } BD^2=DF^2+BF^2,$$

$$\therefore (\sqrt{3}-x)^2 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{2})^2,$$

$$\text{整理得, } x^2+2\sqrt{3}x-1=0,$$

$$\text{解得 } x=2-\sqrt{3}, \text{ 或 } x=-2-\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

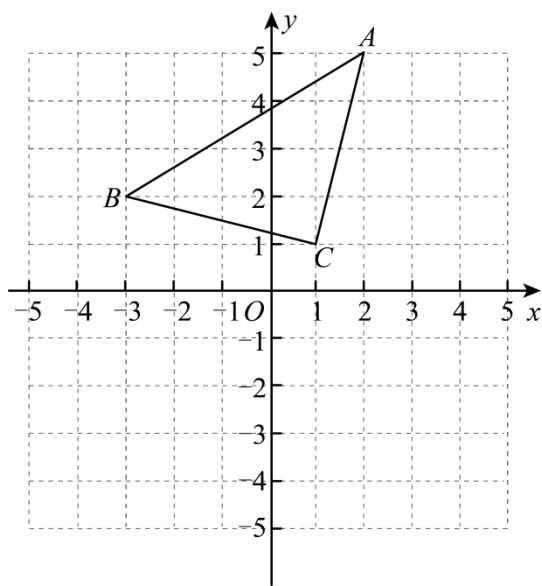
$$\text{即 } CD=2-\sqrt{3}, \therefore BD=\sqrt{3}-x=2\sqrt{3}-2.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{3}-2.$$

【点睛】此题考查了折叠的性质，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质以及解一元二次方程等知识. 注意数形结合思想的应用以及折叠中的对应关系.

三、解答题 (共 7 小题)

19. 如图所示，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是点 $A(2,5)$ ， $B(-3,2)$ ， $C(1,1)$ ， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 x 轴对称，其中 A_1 ， B_1 ， C_1 分别是点 A ， B ， C 的对应点.



- (1) 画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 已知点 D 的坐标为 $(-1,-7)$ ，试判断 $\triangle BCD$ 的形状，并说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\triangle BCD$ 为直角三角形. 理由见解析

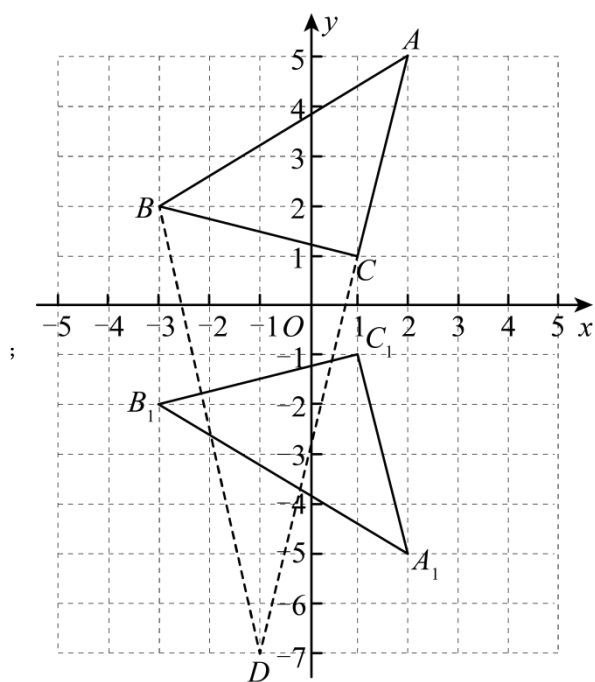
【解析】

【分析】 本题考查作图-轴对称变换、勾股定理、勾股定理的逆定理，熟练掌握轴对称的性质、勾股定理、勾股定理的逆定理是解答本题的关键.

- (1) 根据轴对称的性质作图即可；
- (2) 利用勾股定理以及勾股定理的逆定理可得结论.

【小问 1 详解】

解：如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



【小问 2 详解】

解：△BCD 为直角三角形. 理由如下，

理由：由勾股定理得， $BC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ ，

$$CD = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}，$$

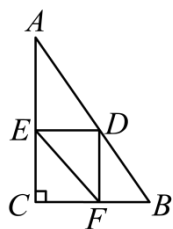
$$BD = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}，$$

$$\therefore BC^2 + CD^2 = BD^2，$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ，$$

$\therefore \triangle BCD$ 为直角三角形.

20. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 为 AB 边上一个动点 (不与点 A 、 B 重合), 过点 D 作 $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 分别交 AC 、 BC 于点 E 、 F , 连结 EF .



(1) 求证：四边形 $ECFD$ 是矩形；

(2) 若 $CB = 2$, $CA = 4$, 求 EF 的最小值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质和判定，勾股定理. 熟练掌握矩形的判定定理和利用面积法求线段长是解题的关键.

(1) 首先证明出四边形 $ECFD$ 为平行四边形，然后由 $\angle C = 90^\circ$ 即可由证明出四边形 $ECFD$ 是矩形；

(2) 首先根据矩形的性质得到 $EF = CD$ ，然后判断出当 $CD \perp AB$ 时， CD 取得最小值， EF 取得最小值，然后利用勾股定理求出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$ ，然后利用等面积法求解即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，

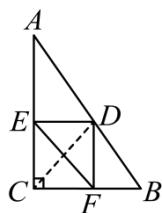
$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 为平行四边形，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 是矩形；

【小问 2 详解】

解： 如图所示，连接 CD



$\because$ 四边形 $ECFD$ 是矩形

$\therefore EF = CD$

$\therefore$ 当 CD 最小时， EF 最小

$\therefore$ 当 $CD \perp AB$ 时， CD 取得最小值

$\because CB = 2$ ， $CA = 4$ ， $\angle C = 90^\circ$

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$

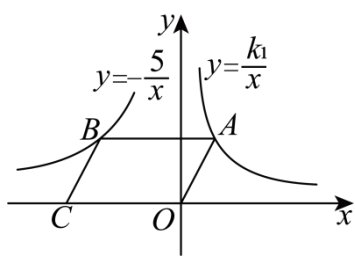
$\therefore$ 当 $CD \perp AB$ 时， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$

$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} CD$

$\therefore CD = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore CD$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，即 EF 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

21. 如图, $\square AOCB$ 的顶点 A, B 分别在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = -\frac{5}{x}$ 上, 顶点 C 在 x 轴上, 已知点 A 的坐标为 $(1, 2)$.



(1) 求双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 的解析式;

(2) 求 $\square AOCB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x}$

(2) 7

【解析】

【分析】 (1) 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ 求解即可;

(2) 连接 OB , 设 AB 与 y 轴交于点 D , 根据反比例函数的比例系数的几何意义可得 $S_{\triangle BOD} = \frac{5}{2}$, $S_{\triangle AOD} = 1$, 从而可知 $S_{\triangle AOB} = \frac{7}{2}$, 即可求得答案.

【小问 1 详解】

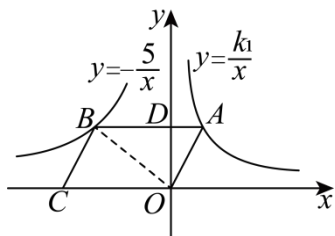
解: 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ 得: $2 = \frac{k_1}{1}$,

解得: $k_1 = 2$,

$\therefore$ 双曲线的解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 连接 OB , 设 AB 与 y 轴交于点 D ,



$\because$ 四边形 $AOCB$ 为平行四边形, 点 C 在 x 轴上,

$\therefore AB \parallel y$ 轴,

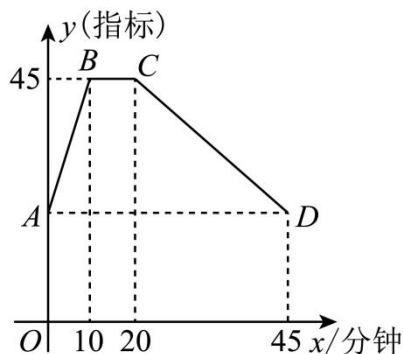
$\because$ 点 A 和点 B 分别在双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{5}{x}$ 上,

$$\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{5}{2}, S_{\triangle AOD} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOD} + S_{\triangle AOD} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOCB} = 2S_{\triangle AOB} = 2 \times \frac{7}{2} = 7.$$

22. 研究发现：初中生在数学课上的注意力指标随上课时间的变化而变化，上课开始时，学生注意力直线上升，中间一段时间，学生的注意力保持平稳状态，随后开始分散，注意力与时间呈反比例关系降回开始时的水平。学生注意力指标 y 随时间 x （分钟）变化的函数图象如图所示。



(1) 求反比例函数的解析式，并求点 A 对应的指标值；

(2) 张老师在一节课上讲解一道数学综合题需要 15 分钟，他能否经过适当的安排，使学生在听这道题的讲解时，注意力指标都不低于 36？请说明理由。

【答案】 (1) $y = \frac{900}{x}$ ， A 点对应的指标值为 20

(2) 能，见解析

【解析】

【分析】 (1) 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，然后把点 $C(20, 45)$ 代入求解即可得到反比例函数解析式，然后令 $x = 45$ ，求出 y 的值，即可求得点 A 对应的指标值；

(2) 求解上升阶段解析式为 $y = 2.5x + 20$ ($0 \leq x \leq 10$)，结合注意力指标都不低于 36，进一步解答即可。

【小问 1 详解】

解：设反比例函数的关系式为 $y = \frac{k}{x}$ ($20 \leq x \leq 45$)，

由图知，反比例函数过点 $C(20, 45)$ ，

代入解析式得 $45 = \frac{k}{20}$ ，

解得 $k = 900$ ，

$\therefore$ 反比例函数的关系式为 $y = \frac{900}{x}$,

当 $x = 45$ 时, $y = \frac{900}{45} = 20$,

则 A 点对应的指标值为 20;

【小问 2 详解】

解: 能. 理由:

设上升阶段的表达式为 $y = mx + n$,

将 $A(0, 20) B(10, 45)$ 代入得:
$$\begin{cases} n = 20 \\ 10m + n = 45 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} m = 2.5 \\ n = 20 \end{cases}$$
,

$\therefore$ 上升阶段解析式为 $y = 2.5x + 20 (0 \leq x \leq 10)$,

当 $y = 36$ 时, $2.5x + 20 = 36$,

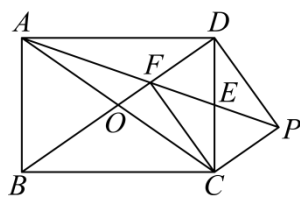
解得: $x = 6.4$,

在下降阶段: $\frac{900}{x} = 36$, 解得 $x = 25$,

$\because 25 - 6.4 = 18.6 > 15$,

$\therefore$ 能安排.

23. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 E 是 CD 的中点, 连接 AE 交 BD 于点 F , 延长 AE 到点 P , 使 $FP = AF$, 连接 CF , CP , DP .



(1) 求证: 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 若四边形 $CFDP$ 是矩形, 且 $AD = \sqrt{2}$, 求 AB 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) AB 的长度为 1

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质推出 OF 是 $\triangle ACP$ 的中位线, 利用 ASA 证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$, 根据全等三角形的性质得到 $EF = EP$, 结合 $DE = CE$, 即可判定四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

(2) 根据矩形的性质得到 $EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD$, $FP = CD$, 根据勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore FP = AF,$$

$\therefore OF$ 是 $\triangle ACP$ 的中位线,

$$\therefore OF \parallel CP,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle PCE,$$

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE,$$

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle FDE = \angle PCE \\ DE = CE \\ \angle DEF = \angle CEP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEP (\text{ASA}),$$

$$\therefore EF = EP,$$

又 $\because DE = CE$,

$\therefore$ 四边形 $CFDP$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB, \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

若四边形 $CFDP$ 是矩形, 则

$$EF = DE = PE = CE = \frac{1}{2}CD, \quad FP = CD,$$

$$\therefore AF = FP,$$

$$\therefore AE = AF + EF = \frac{3}{2}CD,$$

$$\therefore AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \left(\frac{3}{2}CD\right)^2,$$

$$\therefore AD^2 = 2CD^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}CD \text{ 或 } AD = -\sqrt{2}CD \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AD = \sqrt{2},$$

$$\therefore CD = AB = 1.$$

【点睛】此题考查了矩形的性质，三角形中位线的性质，平行四边形的判定，勾股定理，全等三角形的判定与性质，利用矩形的性质证明 $\triangle DEF \cong \triangle CEP$ 是解题的关键.

24. 如图 1，已知一次函数图象 l_1 分别与 x ， y 轴交于点 $A(3,0)$ ， $B(0,2)$ 两点.

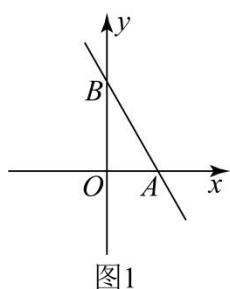


图1

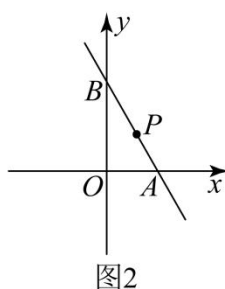
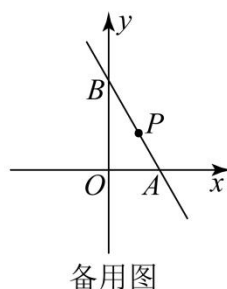


图2



备用图

(1) 求该一次函数解析式;

(2) 点 P 是正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 图象与该一次函数图象 l_1 的交点， x 轴上有一动点 Q ，求 $PQ + QB$ 的最小值及此时点 Q 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下，将一次函数图象 l_1 沿 y 轴翻折，点 P 对应点为 P_1 ， M 是 y 轴上一点，点 N 是正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 图象上一点，当以 P_1 ， Q ， M ， N 为顶点的四边形是平行四边形时，请直接写出点 M 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

(2) $\frac{10}{3}$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

(3) $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{11}{6}\right)$ 或 $\left(0, \frac{11}{6}\right)$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求函数解析式即可;

(2) 先求出点 P 坐标，作点 B 关于 x 轴的对称点 B_1 ，连接 B_1P ，与 x 轴交于点 Q ，根据两点之间的距离公式求 B_1P 的值，求出直线 B_1P 的函数解析式，进一步即可求出点 Q 坐标;

(3) 设点 $M(0, p)$, $N\left(t, \frac{1}{3}t\right)$, 以 P_1, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形, 分情况讨论: ① 以 P_1Q, MN 为对角线, ② 以 P_1M, QN 为对角线, ③ 以 P_1N, QM 为对角线, 分别列二元一次方程组, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设该一次函数解析式为 $y = kx + b$,

将 $A(3,0)$, $B(0,2)$ 两点代入得 $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 该一次函数解析式为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$;

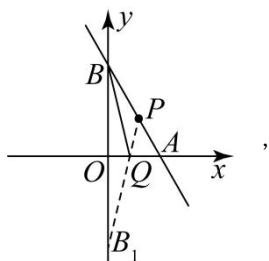
【小问 2 详解】

$$\text{解: 解方程组} \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right),$$

如图, 作点 B 关于 x 轴对称点 $B_1(0, -2)$, 连接 PB_1 交 x 轴于点 Q , 连接 BQ ,



$$\therefore QB = QB_1,$$

$$\text{故 } PQ + QB = PQ + QB_1 = PB_1,$$

即线段 PB_1 为 $PQ + QB$ 的最小值,

在 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = 2$,

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\text{则 } B_1(0, -2),$$

$$\therefore PB_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + 2\right)^2 + (2 - 0)^2} = \frac{10}{3},$$

即 $PQ + QB$ 的最小值为 $\frac{10}{3}$;

此时由 P , B_1 得到直线 PB_1 解析式为 $y = \frac{4}{3}x - 2$,

当 $y = 0$ 时, $x = \frac{3}{2}$,

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, 0\right);$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because P\left(2, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 对应点为 } P_1\left(-2, \frac{2}{3}\right),$$

$$\text{设点 } M(0, p), N\left(t, \frac{1}{3}t\right),$$

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, 0\right);$$

$\therefore$ 以 P_1 , Q , M , N 为顶点的四边形是平行四边形, 分情况讨论:

① 以 P_1Q , MN 为对角线,

$$\text{可得 } \begin{cases} -2 + \frac{3}{2} = t \\ \frac{2}{3} = p + \frac{1}{3}t \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ p = \frac{5}{6} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 M 坐标为 $\left(0, \frac{5}{6}\right)$,

② 以 P_1M , QN 为对角线,

$$\text{可得} \begin{cases} -2 = t + \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} + p = \frac{1}{3}t \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} t = -\frac{7}{2} \\ p = -\frac{11}{6} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 M 坐标为 $\left(0, -\frac{11}{6}\right)$,

③ 以 P_1N , QM 为对角线,

$$\text{得} \begin{cases} -2 + t = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t = p \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ p = \frac{11}{6} \end{cases},$$

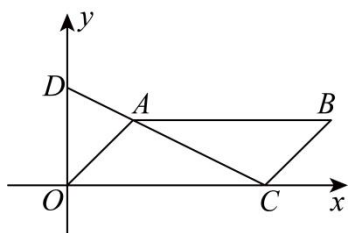
$\therefore$ 点 M 坐标为 $\left(0, \frac{11}{6}\right)$,

综上, 点 M 的坐标为 $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{11}{6}\right)$ 或 $\left(0, \frac{11}{6}\right)$.

【点睛】 本题考查了一次函数的综合应用, 涉及待定系数法求解析式, 利用轴对称性质求最小值, 平行四边形的判定等, 本题综合性较强, 难度较大.

25. 数学活动课上, 老师组织数学小组的同学们以“平面直角坐标系”为背景开展探究活动. 如图, 已知四

边形 $OABC$ 是平行四边形，点 $A(2,2)$ 、点 $C(6,0)$ ，连接 CA ，并延长交 y 轴于点 D 。



(1) 观察发现：直线 AC 的函数表达式为_____。

(2) 探究迁移：若点 P 从点 C 出发，以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动，同时点 Q 从点 O 出发，以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动， P 、 Q 均在线段 OC 上，过点 P 作 x 轴垂线交直线 CD 于点 E ，过点 Q 作 x 轴垂线交直线 OA 于点 F ，连接 EF ，猜想四边形 $EPQF$ 的形状（点 P 、 Q 重合除外），并证明你的结论；

(3) 拓展应用：在 (2) 的条件下，当点 P 运动多少秒时，四边形 $EPQF$ 是正方形？不需说明理由，请直接写出你的结果。

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

(2) 四边形 $EPQF$ 是矩形，证明见解析

(3) $\frac{3}{2}$ 秒或 3 秒

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法，设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，将点 $A(2,2)$ 、点 $C(6,0)$ ，代入即可求解；

(2) 先利用待定系数法求出直线 OA 的解析式，根据 P 、 Q 的运动情况，分类讨论，可求出 OQ 与 OP 的长，分别代入直线 OA 和 AC 解析式，进而求出点 E 、 F 坐标，可得出 $FQ = EP$ ，即可得出结论；

(3) 根据 P 、 Q 的运动情况，分类讨论，求出 PQ ，利用 $PQ = FQ$ 建立方程即可求出时间。

【小问 1 详解】

解：设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

将点 $A(2,2)$ 、点 $C(6,0)$ ，代入得，

$$\begin{cases} 2 = 2k + b \\ 0 = 6k + b \end{cases}$$

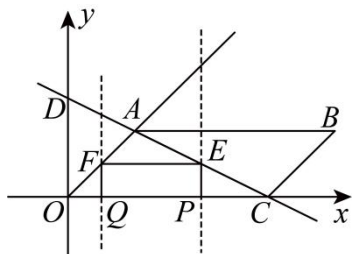
$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

【小问 2 详解】

解：四边形 $EPQF$ 是矩形，理由如下：

当点 P 在 Q 右侧时，如图所示，



$\because$ 点 $A(2,2)$, $O(0,0)$,

$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$,

$\because$ 点 P 从点 C 出发，以 2 个单位/秒的速度沿 x 轴向左运动，同时点 Q 从点 O 出发，以 1 个单位/秒的速度沿 x 轴向右运动，设运动时间为 t ,

$\therefore CP = 2t$, $OQ = t$, $OP = OC - CP = 6 - 2t$,

$\therefore Q(t,0)$, $P(6-2t,0)$,

$\because$ 点 E 在直线 $AC: y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上，点 F 在直线 $OA: y = x$ 上，且 $FQ \perp x$ 轴， $EP \perp x$ 轴，

$\therefore FQ = y_F = t$, $EP = y_E = -\frac{1}{2}(6-2t) + 3 = t$,

$\therefore FQ = EP$,

又 $\because FQ \perp x$ 轴， $EP \perp x$ 轴，

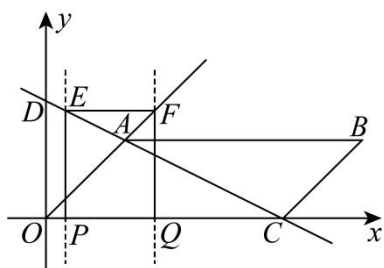
$\therefore FQ \parallel EP$, $\angle FQP = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是平行四边形，

又 $\angle FQP = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EPQF$ 是矩形.

当点 P 在 Q 左侧时，如图所示，



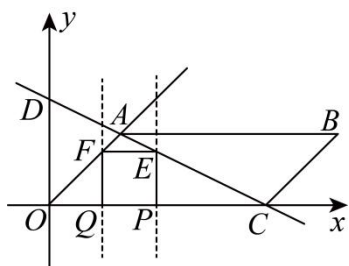
设经过时间 t ，则 $OQ = t$ ， $CP = 2t$ ， $OP = OC - CP = 6 - 2t$ ，

$\therefore Q(t, 0)$ ， $P(6 - 2t, 0)$ ，

同理可证四边形 $EPQF$ 是矩形.

【小问 3 详解】

解：当点 P 在 Q 右侧时，四边形 $EPQF$ 是正方形，如图所示，



第 (2) 问已证四边形 $EPQF$ 是矩形，

$\therefore$ 当 $PQ = FQ$ 时，四边形 $EPQF$ 是正方形，

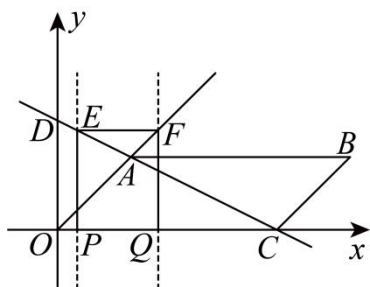
$\because$ 经过时间 t ， $CP = 2t$ ， $OQ = FQ = t$ ， $PQ = OC - OQ - CP = 6 - 3t$ ，

$\therefore t = 6 - 3t$ ，

解得 $t = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 经过 $t = \frac{3}{2}$ ，四边形 $EPQF$ 是正方形.

当点 P 在 Q 左侧时且在原点 O 右侧时，四边形 $EPQF$ 是正方形，如图所示，



经过时间 t ，则 $OQ = FQ = t$ ， $CP = 2t$ ， $OP = OC - CP = 6 - 2t$ ， $PQ = OQ - OP = t - (6 - 2t) = 3t - 6$ ，

综上所述, 当点 P 运动 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = 3$ 时, 四边形 $EPQF$ 是正方形.