

上海浦东新区民办欣竹中学 2025 学年第二学期

数学学科八年级练习二

一、单选题

1. 下列说法正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形
B. 菱形的对角线相等
C. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
D. 平行四边形的对角线互相垂直

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质与判定，平行四边形的性质与判定，根据平行四边形、菱形的判定与性质，逐一判断各选项，即可作答.

【详解】 解： A、对角线互相垂直的平行四边形才是菱形，故该选项错误；

B、菱形的对角线互相垂直平分，并不相等，故该选项错误；

C、对角线互相平分的四边形是平行四边形，符合平行四边形判定定理，故该选项正确；

D、普通平行四边形的对角线仅互相平分，不互相垂直，故该选项错误；

故选： C

2. 若点 $A(-3, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{9}{x}$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$
B. $y_3 < y_2 < y_1$
C. $y_1 < y_3 < y_2$
D. $y_2 < y_3 < y_1$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查比较反比例函数的函数值的大小关系，根据反比例函数 $y = -\frac{9}{x}$ 的增减性，进行判断即可.

【详解】 解： $\because y = -\frac{9}{x}$,

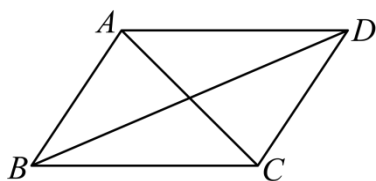
$\therefore$ 反比例函数的图象过二，四象限，在每一个象限内， y 随着 x 的增大而增大，

$\because$ 点 $A(-3, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{9}{x}$ 的图象上，且 $-3 < 0 < 1 < 3$,

$\therefore y_1 > 0 > y_3 > y_2$;

故选 D.

3. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论中不正确的是 ()



A. 当 $AB = BC$ 时，它是菱形

B. 当 $AC \perp BD$ 时，它是菱形

C. 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，它是矩形

D. 当 $AC = BD$ 时，它是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查学生对正方形的判定、平行四边形的性质、菱形的判定和矩形的判定的理解和掌握，此题涉及到的知识点较多，学生答题时容易出错。

根据邻边相等的平行四边形是菱形；根据所给条件可以证出邻边相等；根据有一个角是直角的平行四边形是矩形；根据对角线相等的平行四边形是矩形。

【详解】解：A、根据邻边相等的平行四边形是菱形可知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，当 $AB = BC$ 时，它是菱形，故 A 选项正确，不符合题意；

B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC \perp BD$ ，

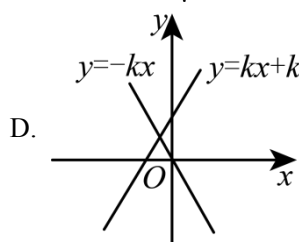
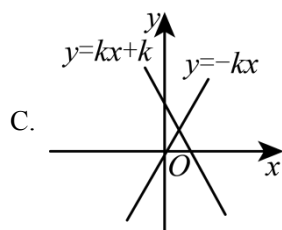
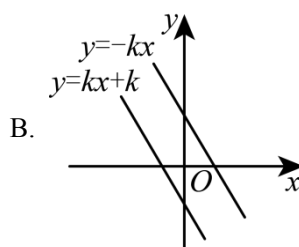
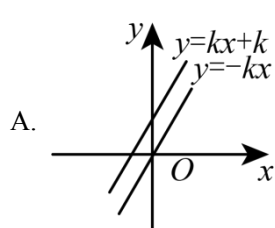
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，故 B 选项正确，不符合题意；

C、有一个角是直角的平行四边形是矩形，故 C 选项正确，不符合题意；

D、根据对角线相等的平行四边形是矩形可知当 $AC = BD$ 时，它是矩形，不是正方形，故 D 选项错误，符合题意。

故选：D.

4. 一次函数 $y = kx + k$ 与正比例函数 $y = -kx$ 的大致图象是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数、正比例函数的图象. 此类题可用数形结合的思想进行解答. 根据正比例函数图象所在的象限判定 k 的符号, 根据 k 的符号来判定一次函数图象所经过的象限即可.

【详解】 解: A、正比例函数 $y = -kx$ 与一次函数 $y = kx + k$ 的自变量系数 k 互为相反数. 故该选项不符合题意;

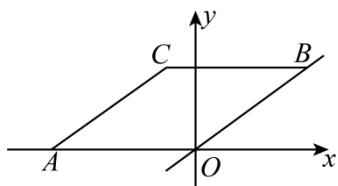
B、正比例函数 $y = -kx$ 与一次函数 $y = kx + k$ 的自变量系数互为相反数. 故该选项不符合题意;

C、正比例函数图象经过第一、三象限, 则 $k < 0$, 那么一次函数 $y = kx + k$ 应经过二、三、四象限, 故该选项不符合题意;

D、正比例函数图象经过第二、三象限, 则 $k > 0$, 那么一次函数 $y = kx + k$ 经过一、二、三象限, 故该选项符合题意.

故选: D.

5. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $AOBC$ 的顶点 A 在 x 轴负半轴上, 顶点 B 在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上, 若点 B 的横坐标是 8, 则点 C 的坐标为 ()



A. $(-1, 6)$

B. $(-2, 6)$

C. $(-3, 6)$

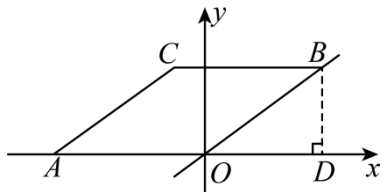
D. $(-4, 6)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴, 垂足为点 D , 先求出 $B(8, 6)$, 由勾股定理求得 $BO = 10$, 再由菱形的性质得到 $BC = BO = 10, BC \parallel x$ 轴, 最后由平移即可求解.

【详解】 解: 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴, 垂足为点 D ,



$\because$ 顶点 B 在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上, 点 B 的横坐标是 8,

$\therefore y_B = 8 \times \frac{3}{4} = 6$, 即 $BD = 6$,

$$\therefore B(8,6),$$

$$\because BD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } BO = \sqrt{BD^2 + DO^2} = 10,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BC = BO = 10, BC \parallel x \text{ 轴},$$

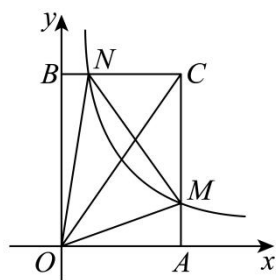
$\therefore$ 将点 B 向左平移 10 个单位得到点 C ,

$$\therefore \text{点 } C(-2,6),$$

故选: B.

【点睛】 本题考查了一次函数的图像, 勾股定理, 菱形的性质, 点的坐标平移, 熟练掌握知识点, 正确添加辅助线是解题的关键.

6. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A , B 分别是横、纵轴正半轴上的动点, 四边形 $OACB$ 是矩形, 函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象与边 AC 交于点 M , 与边 BC 交于点 N (M , N 不重合). 给出下面四个结论:



① $\triangle COM$ 与 $\triangle CON$ 的面积一定相等;

② $\triangle MON$ 与 $\triangle MCN$ 的面积可能相等;

③ $\triangle MON$ 一定是锐角三角形;

④ $\triangle MON$ 可能是等边三角形.

上述结论中, 所有正确结论的序号是 ()

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何综合, 反比例函数的图形和性质, 矩形的性质, 熟练掌握反比例函数图象的性质是解题的关键. 根据矩形的性质结合反比例函数 k 的意义即可判断①②, 根据等边三角形和反比例函数的对称性即可判断④, 根据 M, N 是反比例函数图象上的动点, 可得 $\angle OMN$ 或 $\angle ONM$ 为钝角, 即可判断③, 即可求解.

【详解】解：∵ 四边形 $OACB$ 是矩形，

$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle AOC}$$

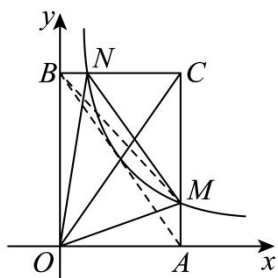
又∵ M, N 是反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 图象上的动点， $BN \perp y$ 轴， $MA \perp x$ 轴，

$$\therefore S_{\triangle OBN} = S_{\triangle OAM} = \frac{1}{2}$$

∴ $S_{\triangle OBC} - S_{\triangle OBN} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle OAM}$ ，即 $\triangle COM$ 与 $\triangle CON$ 的面积一定相等；故①正确，

$$\text{由①可得 } S_{\triangle OBN} = S_{\triangle OAM} = \frac{1}{2}$$

当 $\triangle MON$ 与 $\triangle MCN$ 的面积相等时，如图，连接 AB ， BM



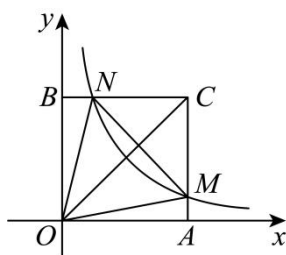
$$\therefore S_{\triangle NCM} + S_{\triangle OAM} = S_{\triangle MON} + S_{\triangle OBN} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} OACB} = S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BOM}$$

∴ N 在直线 BM 上，则 M, N 重合，

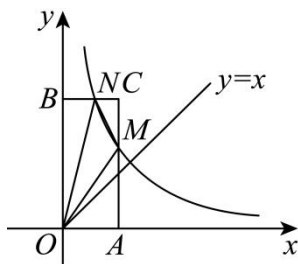
∴ $\triangle MON$ 与 $\triangle MCN$ 的面积不可能相等，故②不正确，

∵ 等边三角形和反比例函数都是轴对称图形，当 $\angle NOM = 60^\circ$ 且对称轴都为直线 $y = x$ ， $\triangle MON$ 可能是等边三角形，故④正确，

如图



当 M, N 在 $y = x$ 的同侧时， $\triangle MON$ 可能是钝角三角形，故③错误



综上, ①④正确、②③错误.

故选: B.

二、填空题

7. 在平面直角坐标系中, 将点 $A(2, -5)$ 向左平移 4 个单位长度得到点 B , 则点 B 关于 x 轴的对称点 C 的坐标是_____.

【答案】 $(-2, 5)$

【解析】

【分析】 先根据“左减右加, 上加下减”的平移规律求出点 B 的坐标, 再根据关于 x 轴对称的点横坐标相同、纵坐标互为相反数的特征求出点 C 的坐标.

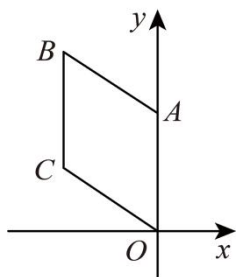
【详解】 解: $\because$ 点 $A(2, -5)$ 向左平移 4 个单位长度得到点 B ,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2-4, -5)$, 即 $(-2, -5)$,

$\because$ 点 B 关于 x 轴的对称点为 C ,

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(-2, 5)$.

8. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴上. 若点 C 的坐标为 $(-3, 2)$, 则点 A 的坐标为_____.



【答案】 $(0, \sqrt{13})$

【解析】

【分析】 利用勾股定理求得 OC 的长, 再利用菱形的性质求得 $OA = OC = \sqrt{13}$, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 C 的坐标为 $(-3, 2)$,

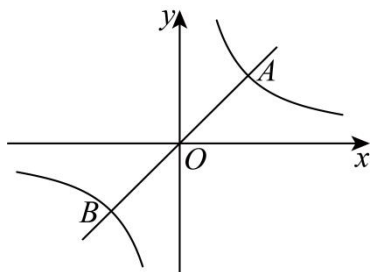
$\therefore OC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$\therefore OA = OC = \sqrt{13}$,

$\therefore A$ 点的坐标为 $(0, \sqrt{13})$.

9. 如图, 过原点的直线与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 $A(m, n)$, $B(m-6, n-6)$ 两点, 则 k 的值为_____.



【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题, 求反比例函数的解析式, 关于原点对称的点的性质, 先根据题意得出 $-m = m-6$, $-n = n-6$, 解得 $m = 3$, $n = 3$, 即 $A(3, 3)$, 再把 $A(3, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 进行计算, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 过原点的直线与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 $A(m, n)$, $B(m-6, n-6)$ 两点,

$\therefore A(m, n)$, $B(m-6, n-6)$ 两点关于原点 O 对称,

即 A 的横坐标与 B 的横坐标互为相反数, A 的纵坐标与 B 的纵坐标互为相反数,

$$\therefore -m = m-6, \quad -n = n-6,$$

$$\therefore m = 3, \quad n = 3,$$

$$\therefore A(3, 3),$$

把 $A(3, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

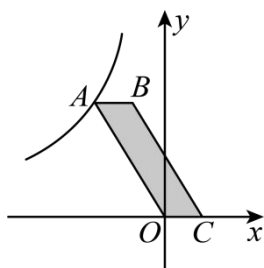
$$\text{得 } 3 = \frac{k}{3},$$

解得 $k = 9$,

故答案为: 9.

10. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象经过平行四边形 $ABCO$ 的顶点 A , OC 在 x 轴上, 若点 $B(-1, 3)$,

$S_{\square ABCO} = 3$, 则实数 k 的值为_____.



【答案】 -6

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数，根据 A, B 的纵坐标相同以及点 A 在反比例函数上得到 A 的坐标，进而用代数式表达 AB 的长度，然后根据 $S_{\square ABCO} = 3$ 列出一元一次方程求解即可.

【详解】 $\because \square ABCO$ 是平行四边形

$\therefore A, B$ 纵坐标相同

$\because B(-1, 3)$

$\therefore A$ 的纵坐标是 3

$\because A$ 在反比例函数图象上

$\therefore$ 将 $y = 3$ 代入函数中，得到 $x = \frac{k}{3}$

$\therefore A\left(\frac{k}{3}, 3\right)$

$\therefore |AB| = -1 - \frac{k}{3}$

$\because S_{\square ABCO} = 3, B$ 的纵坐标为 3

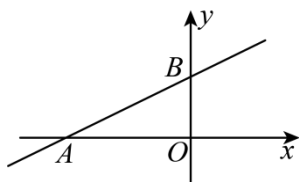
$\therefore |AB| \times 3 = 3$

即: $\left(-1 - \frac{k}{3}\right) \times 3 = 3$

解得: $k = -6$

故答案为: -6.

11. 如图，已知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象分别与 x, y 轴交于 A, B 两点，若 $OA = 2, OB = 1$ ，则关于 x 的方程 $kx + b = 0$ 的解为_____.



【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与一元一次方程之间的关系，难度不大，认真分析题意即可.

根据一次函数与 x 轴交点坐标可得出答案.

【详解】 解: $\because OA = 2$,

$\therefore A(-2, 0)$,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$,

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时, $x = -2$, 即 $kx + b = 0$ 时, $x = -2$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $kx + b = 0$ 的解是 $x = -2$.

故答案为: $x = -2$.

12. 将直线 $y = 3x - 1$ 向上平移 m 个单位长度, 若平移后的直线经过第三、第二、第一象限, 则 m 的值可以是_____ (写出一个即可).

【答案】 2 (答案不唯一, 满足 $m > 1$ 即可)

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象的平移, 根据直线经过的象限, 求参数的范围, 根据平移规则求出新的解析式, 根据图象经过第三、第二、第一象限, 得到 $k > 0, b > 0$, 进行求解即可.

【详解】 解: 由题意, 平移后的解析式为: $y = 3x - 1 + m$,

$\therefore$ 平移后的直线经过第三、第二、第一象限,

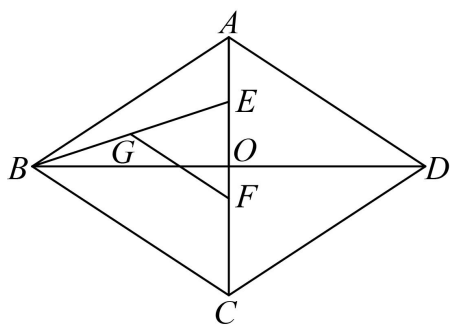
$\therefore m - 1 > 0$,

$\therefore m > 1$;

$\therefore m$ 的值可以是 2;

故答案为: 2 (答案不唯一, 满足 $m > 1$ 即可)

13. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AC = 8$, $BD = 12$, 点 E 在线段 OA 上, $AE = 2$, 点 F 在线段 OC 上, $OF = 1$, 连接 BE , 点 G 为 BE 的中点, 连接 FG , 则 FG 的长为_____.



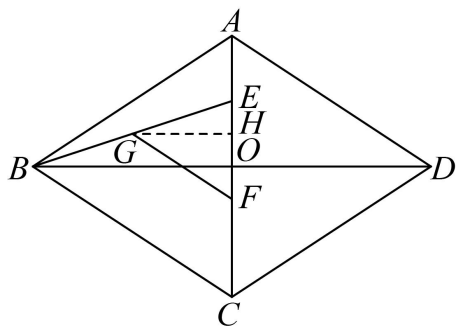
【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质，勾股定理，三角形中位线的性质等．由菱形对角线互相垂直且平分，可得 $OA = \frac{1}{2}AC = 4$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 6$ ， $AC \perp BD$ ，取 OE 中点 H ，连接 GH ，则 $GH = \frac{1}{2}OB$ ， $GH \parallel OB$ ，再用勾股定理解 $\text{Rt}\triangle GHF$ 即可．

【详解】 解： $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AC = 8$ ， $BD = 12$ ，
 $\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 4$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 6$ ， $AC \perp BD$ ，
 $\because AE = 2$ ，
 $\therefore OE = OA - AE = 4 - 2 = 2$ ，

如图，取 OE 中点 H ，连接 GH ，



$\because$ 点 G 为 BE 的中点，点 H 为 OE 的中点，

$\therefore GH = \frac{1}{2}OB = 3$ ， $GH \parallel OB$ ，

$\therefore \angle GHE = \angle BOA = 90^\circ$ ，

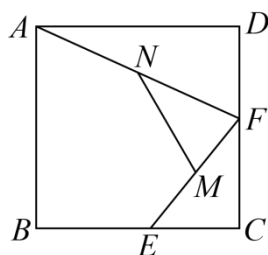
$\because OF = 1$ ，

$\therefore HF = OH + OF = \frac{1}{2}OE + OF = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$ ，

$\therefore GF = \sqrt{GH^2 + HF^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ，

故答案为： $\sqrt{13}$ ．

14. 如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别是 BC ， CD 上的动点， M ， N 分别是 EF ， AF 的中点，则 MN 的最大值为_____.

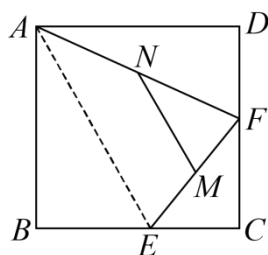


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 首先证明出 MN 是 $\triangle AEF$ 的中位线，得到 $MN = \frac{1}{2}AE$ ，然后由正方形的性质和勾股定理得到 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2}$ ，证明出当 BE 最大时， AE 最大，此时 MN 最大，进而得到当点 E 和点 C 重合时， BE 最大，即 BC 的长度，最后代入求解即可.

【详解】 如图所示，连接 AE ，



$\because M$ ， N 分别是 EF ， AF 的中点，

$\therefore MN$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2},$$

$\therefore$ 当 BE 最大时， AE 最大，此时 MN 最大，

$\because$ 点 E 是 BC 上的动点，

$\therefore$ 当点 E 和点 C 重合时， BE 最大，即 BC 的长度，

$$\therefore \text{此时 } AE = \sqrt{4 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AE = \sqrt{2},$$

$\therefore MN$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 此题考查了正方形的性质, 三角形中位线的性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

15. 已知点 A 坐标为 $(2+a, -3a-4)$, 点 B 的坐标为 $(5, -3)$, 若 $AB \parallel x$ 轴, 则 $a =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【详解】 本题考查了坐标与图形的性质, 由平行于 x 轴的点的纵坐标相同, 可得 $-3a-4=-3$, 解得 a 的值, 则可得答案, 熟练掌握平面直角坐标系中的点的坐标特点是解题的关键.

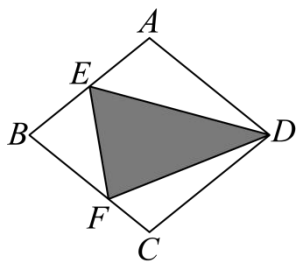
【点睛】 解: $\because$ 点 B 的坐标为 $(5, -3)$, 且 $AB \parallel x$ 轴,

$$\therefore -3a-4=-3,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3},$$

故答案为: $-\frac{1}{3}$.

16. 如图, 菱形 $ABCD$ 的面积为 24, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 BC 上的动点. 若 $\triangle BEF$ 的面积为 4, 则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 10

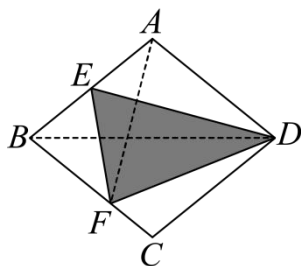
【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 三角形中线的性质, 利用菱形的性质、三角形中线的性质求出 $S_{\triangle ADE} = 6$,

$S_{\triangle ABF} = 8$, 根据 $\triangle ABF$ 和菱形的面积求出 $\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{BF}{CF} = 2$, 则可求出 $\triangle CDF$ 的面积, 然后利用

$S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF}$ 求解即可.

【详解】解：连接 AF 、 BD ，



$\because$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 24，点 E 是 AB 的中点， $\triangle BEF$ 的面积为 4，

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} S_{\text{菱形}ABCD} = 6, \quad S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle BEF} = 8,$$

设菱形 $ABCD$ 中 BC 边上的高为 h ，

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\text{菱形}ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{BC \cdot h}, \quad \text{即 } \frac{8}{24} = \frac{\frac{1}{2} BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = 2,$$

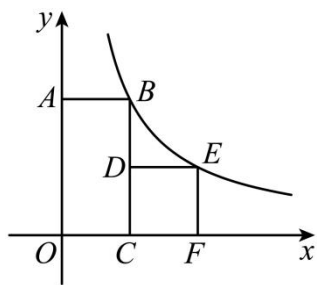
$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{\frac{1}{2} CF \cdot h} = \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = 4,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF} = 10,$$

故答案为：10.

17. 如图，在矩形 $OABC$ 和正方形 $CDEF$ 中，点 A 在 y 轴正半轴上，点 C 、 F 均在 x 轴正半轴上，点 D 在边 BC 上， $BC = 2CD$ ， $AB = 3$ ．若点 B 、 E 在同一个反比例函数的图象上，则这个反比例函数的表达式是_____.



【答案】 $y = \frac{18}{x}$

【解析】

【分析】设正方形 $CDEF$ 的边长为 m ，根据 $BC = 2CD$ ， $AB = 3$ ，得到 $B(3, 2m)$ ，根据矩形对边相等得到 $OC = 3$ ，推出 $E(3+m, m)$ ，根据点 B, E 在同一个反比例函数的图象上，得到 $3 \times 2m = (3+m)m$ ，得到 $m = 3$ ，推出 $y = \frac{18}{x}$ 。

【详解】解：∵ 四边形 $OABC$ 是矩形，
 $\therefore OC = AB = 3$ ，

设正方形 $CDEF$ 的边长为 m ，

$\therefore CD = CF = EF = m$ ，

$\therefore BC = 2CD$ ，

$\therefore BC = 2m$ ，

$\therefore B(3, 2m)$ ， $E(3+m, m)$ ，

设反比例函数的表达式为 $y = \frac{k}{x}$ ，

$\therefore 3 \times 2m = (3+m)m$ ，

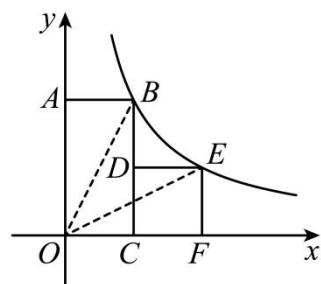
解得 $m = 3$ 或 $m = 0$ （不合题意，舍去），

$\therefore B(3, 6)$ ，

$\therefore k = 3 \times 6 = 18$ ，

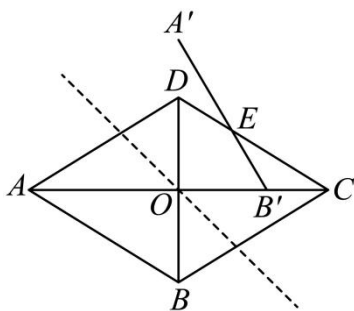
$\therefore$ 这个反比例函数的表达式是 $y = \frac{18}{x}$ ，

故答案为： $y = \frac{18}{x}$ 。



【点睛】本题主要考查了反比例函数，解决问题的关键是熟练掌握矩形性质，正方形性质，反比例函数性质， k 的几何意义。

18. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\frac{AC}{BD} = \frac{5}{3}$ 。线段 AB 与 $A'B'$ 关于过点 O 的直线 l 对称，点 B 的对应点 B' 在线段 OC 上， $A'B'$ 交 CD 于点 E ，则 $\triangle B'CE$ 与四边形 $OB'ED$ 的面积比为



【答案】 $1:3$ $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了菱形的性质，轴对称性质，全等三角形的性质和判定等知识，解题的关键是掌握以上知识点.

设 $AC = 10a$ ， $BD = 6a$ ，首先根据菱形的性质得到 $OA = OC = \frac{1}{2}AC = 5a$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 3a$ ，连接 $A'D$ ， OE ，直线 l 交 BC 于点 F ，交 AD 于点 G ，得到点 A' ， D ， O 三点共线， $A'D = A'O - OD = 2a$ ， $B'C = OC - OB' = 2a$ ， $\frac{S_{\triangle CEB'}}{S_{\triangle OEB'}} = \frac{B'C}{OB'} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$ ，然后证明出 $\triangle A'ED \cong \triangle CEB'$ (AAS)，得到 $A'E = CE$ ，

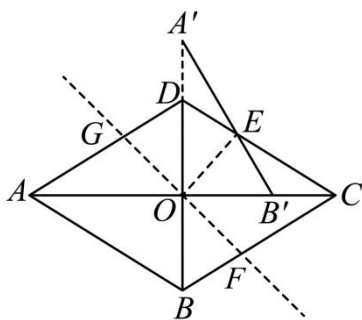
然后证明出 $\triangle ODE \cong \triangle OB'E$ (SSS)，得到 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OB'E}$ ，进而求解即可.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\frac{AC}{BD} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ 设 $AC = 10a$ ， $BD = 6a$

$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 5a$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 3a$

如图所示，连接 $A'D$ ， OE ，直线 l 交 BC 于点 F ，交 AD 于点 G ，



$\because$ 线段 AB 与 $A'B'$ 关于过点 O 的直线 l 对称，点 B 的对应点 B' 在线段 OC 上，

$\therefore \angle BOF = \angle COF = \frac{1}{2}\angle BOB' = 45^\circ$ ， $AO = A'O = 5a$ ， $OB' = OB = 3a$

$\therefore \angle AOG = \angle DOG = 45^\circ$

$\therefore$ 点 A' ， D ， O 三点共线

$\therefore A'D = A'O - OD = 2a$ ， $B'C = OC - OB' = 2a$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEB'}}{S_{\triangle OEB'}} = \frac{B'C}{OB'} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore A'D = B'C$$

$$\therefore CD \parallel AB$$

$$\therefore \angle CDO = \angle ABO$$

由对称可得, $\angle A'B'O = \angle ABO$

$$\therefore \angle A'B'O = \angle CDO$$

$$\therefore \angle A'DE = \angle CB'E$$

$$\text{又} \because \angle A'ED = \angle CEB'$$

$$\therefore \triangle A'ED \cong \triangle CEB' \text{ (AAS)}$$

$$\therefore A'E = CE$$

$$\therefore A'B' = AB = CD$$

$$\therefore DE = B'E$$

$$\text{又} \because OD = OB', OE = OB'$$

$$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OB'E \text{ (SSS)}$$

$$\therefore S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OB'E}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEB'}}{S_{\text{四边形}OB'ED}} = \frac{S_{\triangle CEB'}}{S_{\triangle OEB'} + S_{\triangle ODE}} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

三、解答题

19. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $x+2$ 成反比例, 且当 $x=-1$ 时, $y=3$; 当 $x=3$ 时, $y=7$

求 $x=-3$ 时, y 的值.

【答案】 -11

【解析】

【分析】 首先根据正比例和反比例的定义可得 $y = kx + \frac{m}{x+2}$, 再把 $x=-1$, $y=3$, $x=3$, $y=7$ 代入得到关于 k 、 m 的方程组, 再解可得 k 、 m 的值, 进而可得 y 与 x 的解析式, 再把 $x=-3$ 代入计算出 y 的值即可.

【详解】 解: $\because y_1$ 与 x 成正比例,

$$\therefore \text{设 } y_1 = kx.$$

$\therefore y_2$ 与 $x+2$ 成反比例,

$$\therefore \text{设 } y_2 = \frac{m}{x+2}.$$

$$\therefore y = y_1 + y_2,$$

$$\therefore y = kx + \frac{m}{x+2}.$$

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时, $y=3$; 当 $x=3$ 时, $y=7$,

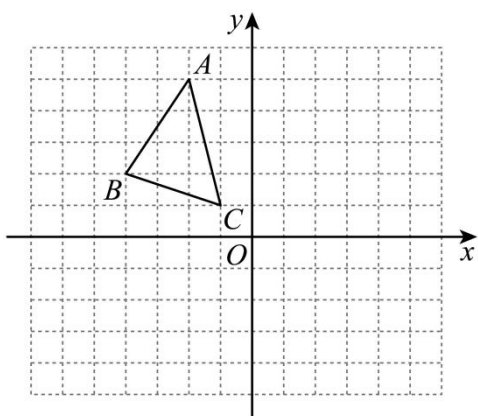
$$\therefore \begin{cases} 3 = -k + m \\ 7 = 3k + \frac{m}{5} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 2 \\ m = 5 \end{cases},$$

$$\therefore y = 2x + \frac{5}{x+2},$$

当 $x=-3$ 时, $y = 2 \times (-3) - 5 = -11$.

【点睛】本题主要考查了待定系数法求正比例函数以及反比例函数解析式,关键是正确表示出 y 与 x 的关系式.

20. 如图,在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(-2,5)$ 、 $(-4,2)$ 、 $(-1,1)$.



- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$;
- (2) 以点 O 为对称中心, 画出 $\triangle ABC$ 的中心对称图形 $\triangle A'B'C'$;
- (3) 借助网格, 用无刻度直尺过点 B 作 $BH \perp AC$, 垂足为 H .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

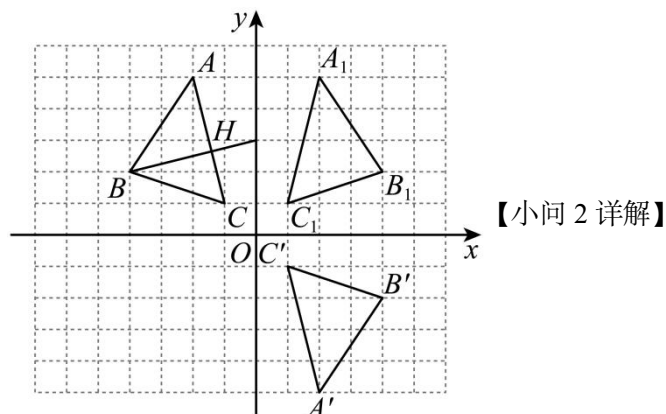
【解析】

【分析】本题考查了轴对称变换的性质, 中心对称的性质, 熟练掌握轴对称变换的性质, 中心对称的性质是解题的关键.

- (1) 根据轴对称变换的性质找出对应点即可求解；
- (2) 根据中心对称的性质找出对应点即可求解；
- (3) 利用“横纵交换”实现垂直，注意坐标符号.

【小问 1 详解】

如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；



如图所示， $\triangle A'B'C'$ 即为所求.

【小问 3 详解】

如图所示， $BH \perp AC$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(2, 5)$.

- (1) 求 k, b 的值；
- (2) 当 $x < 1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的值既小于函数 $y = kx + b$ 的值，也小于函数 $y = x + k$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

【答案】(1) $\begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

(2) $2 \leq m \leq 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数与不等式之间的关系，熟知一次函数的相关知识是解题的关键.

(1) 直接利用待定系数法求解即可；

(2) 由 (1) 可得函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的解析式为 $y = 2x + 1$ ，函数 $y = x + k$ 的解析式为 $y = x + 2$ ，当 $mx < 2x + 1$ 时，则 $(m - 2)x < 1$ ，当 $mx < x + 2$ 时，则 $(m - 1)x < 2$ ，根据当 $x < 1$ 时，两个不等式都成立

可得 $m \geq 2$ ；当 $m = 2$ ， $x < 1$ 时， $2x < 2x + 1$ 和 $x < 2$ 恒成立；当 $m > 2$ 时，则 $x < \frac{1}{m-2}$ 且 $x < \frac{2}{m-1}$ ，再分当 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1}$ 时，则 $\frac{2}{m-1} \geq 1$ ，当 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1}$ 时，则 $\frac{1}{m-2} \geq 1$ ，两种情况分别解不等式即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：∵ 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(2, 5)$ ，

$$\therefore \begin{cases} k + b = 3 \\ 2k + b = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases};$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可得函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的解析式为 $y = 2x + 1$ ，函数 $y = x + k$ 的解析式为 $y = x + 2$ ，

当 $mx < 2x + 1$ 时，则 $(m - 2)x < 1$ ，

当 $mx < x + 2$ 时，则 $(m - 1)x < 2$ ，

∵ 当 $x < 1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的值既小于函数 $y = kx + b$ 的值，也小于函数 $y = x + k$ 的值，

$$\therefore m - 2 \geq 0, \text{ 且 } m - 1 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq 2,$$

当 $m = 2$ ， $x < 1$ 时， $2x < 2x + 1$ 和 $x < 2$ 恒成立，故 $m = 2$ 符合题意；

当 $m > 2$ 时，则 $x < \frac{1}{m-2}$ 且 $x < \frac{2}{m-1}$ ，

当 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1}$ 时，则 $\frac{2}{m-1} \geq 1$ ，

解不等式 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1}$ 得 $m \leq 3$ ，解不等式 $m \leq 3$ ，

$$\therefore 2 < m \leq 3;$$

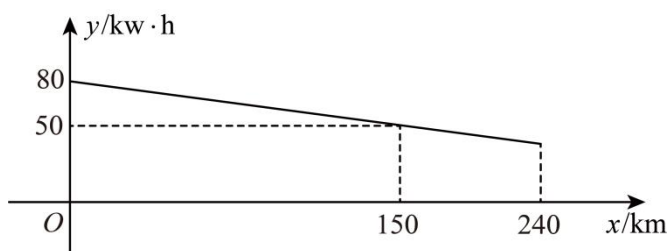
当 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1}$ 时，则 $\frac{1}{m-2} \geq 1$ ，

解不等式 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1}$ 得 $m > 3$ ，解不等式 $\frac{1}{m-2} \geq 1$ 得 $m \leq 3$ ，此时不符合题意；

综上所述， $2 \leq m \leq 3$.

22. 我国新能源汽车快速健康发展，续航里程不断提升，王师傅驾驶一辆纯电动汽车从 A 市前往 B 市，他

驾车从 A 市一高速公路入口驶入时, 该车的剩余电量是 80kWh , 行驶了 240km 后, 从 B 市一高速公路出口驶出, 已知该车在高速公路上行驶的过程中, 剩余电量 $y(\text{kWh})$ 与行驶路程 $x(\text{km})$ 之间的关系如图所示.



(1) 求 y 与 x 之间的关系式;

(2) 已知这辆车的“满电量”为 100kWh , 求王师傅驾车从 B 市这一高速公路出口驶出时, 该车的剩余电量占“满电量”的百分之多少.

【答案】 (1) y 与 x 之间的关系式为 $y = -0.2x + 80$;

(2) 该车的剩余电量占“满电量”的 32% .

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 正确理解题意、求出函数关系式是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求得当 $x = 240$ 时, y 的值, 再计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设 y 与 x 之间的关系式为 $y = kx + b$,

将 $(0, 80)$, $(150, 50)$ 代入得
$$\begin{cases} 80 = b \\ 50 = 150k + b \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b = 80 \\ k = -0.2 \end{cases}$$

$\therefore y$ 与 x 之间的关系式为 $y = -0.2x + 80$;

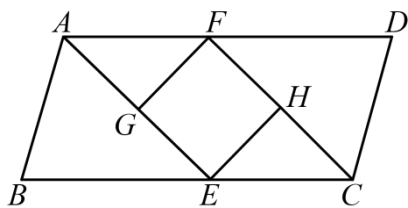
【小问 2 详解】

解: 当 $x = 240$ 时, $y = -0.2 \times 240 + 80 = 32$,

$\frac{32}{100} \times 100\% = 32\%$,

答: 该车的剩余电量占“满电量”的 32% .

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E , $\angle DCB$ 的平分线交 AD 于点 F , 点 G , H 分别是 AE 和 CF 的中点.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 连接 EF . 若 $EF = AF$, 请判断四边形 $GEHF$ 的形状, 并证明你的结论.

【答案】 (1) 见解析 (2) 矩形, 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 由平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $\angle BAD = \angle DCB$, $\angle B = \angle D$, 证出 $\angle DAE = \angle AEB$, $\angle DFC = \angle BCF$, 由 ASA 证明 $\triangle BAE \cong \triangle DCF$, 即可得出结论;

(2) 由全等三角形的性质得出 $AE = CF$, $\angle AEB = \angle DFC$, 证出 $AE \parallel CF$, 由已知得出 $GE \parallel FH$, $GE = FH$, 即可证出四边形 $FGEH$ 是平行四边形.

【小问 1 详解】

解: 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB = CD$, $\angle BAD = \angle DCB$, $\angle B = \angle D$,

$\therefore \angle DAE = \angle AEB$, $\angle DFC = \angle BCF$,

$\because \angle BAD$ 和 $\angle DCB$ 的平分线 AE 、 CF 分别交 BC 、 AD 于点 E 、 F ,

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAD$, $\angle BCF = \angle DCF = \frac{1}{2} \angle DCB$,

$\therefore \angle BAE = \angle DCF$,

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle D \\ AB = CD \\ \angle BAE = \angle DCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DCF$ (ASA).

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle BAE \cong \triangle DCF$,

$\therefore AE = CF$, $\angle AEB = \angle DFC$,

$\therefore \angle AEB = \angle BCF$,

$\therefore AE \parallel CF$,

$\because$ 点 G 、 H 分别为 AE 、 CF 的中点,

$\therefore GE \parallel FH, GE = FH,$

$\therefore$ 四边形 $FGEH$ 是平行四边形

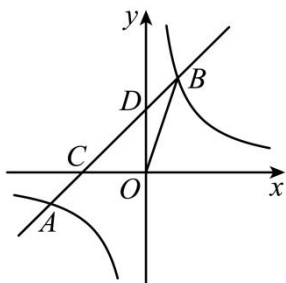
$\because EF = AF, G$ 为 AE 的中点,

$\therefore GF \perp AE,$

$\therefore$ 四边形 $FGEH$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质；熟练掌握平行四边形的性质与判定，证明三角形全等是解决问题的关键.

24. 如图，一次函数 $y = mx + n$ ($m \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于点 $A(-3, a)$, $B(1, 3)$ ，且一次函数与 x 轴， y 轴分别交于点 C, D .



(1) 求反比例函数和一次函数的表达式;

(2) 根据图象直接写出不等式 $mx + n > \frac{k}{x}$ 的解集;

(3) 在第三象限的反比例函数图象上有一点 P ，使得 $S_{\triangle OCP} = 4S_{\triangle OBD}$ ，求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{x}, y = x + 2$

(2) $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$

(3) 点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{4}, -4\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数与一次函数的交点问题，熟知反比例函数及一次函数的图象与性质是解题的关键.

(1) 将点 B 坐标代入反比例函数解析式，求出 k ，再将点 A 坐标代入反比例函数解析式，求出点 A 坐标，最后将 A, B 两点坐标代入一次函数解析式即可解决问题;

(2) 利用反比例函数以及一次函数图象，即可解决问题;

(3) 根据 $\triangle OCP$ 与 $\triangle OBD$ 的面积关系，可求出点 P 的纵坐标，据此可解决问题.

【小问 1 详解】

解：将 $B(1,3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得， $3 = \frac{k}{1}$

$$\therefore k = 3,$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$,

将 $A(-3, a)$ 代入 $y = \frac{3}{x}$ 得， $a = \frac{3}{-3} = -1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, -1)$.

将点 A 和点 B 的坐标代入 $y = mx + n$ 得，

$$\begin{cases} -3m + n = -1 \\ m + n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = x + 2$;

【小问 2 详解】

解：根据所给函数图象可知，

当 $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时，一次函数的图象在反比例函数图象的上方，即 $mx + n > \frac{k}{x}$,

$\therefore$ 不等式 $mx + n > \frac{k}{x}$ 的解集为： $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$.

【小问 3 详解】

解：将 $x = 0$ 代入 $y = x + 2$ 得， $y = 2$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, 2)$,

$$\therefore S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle OCP} = 4S_{\triangle OBD} = 4.$$

将 $y = 0$ 代入 $y = x + 2$ 得， $x = -2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-2, 0)$,

$$\therefore S_{\triangle OCP} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_P| = 4,$$

解得 $|y_P| = 4$.

$\therefore$ 点 P 在第三象限，

$$\therefore y_P = -4,$$

将 $y_P = -4$ 代入 $y = \frac{3}{x}$ 得, $x_P = -\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{4}, -4\right)$.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \alpha$, 点 D 在射线 BC 上, 连接 AD , 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ - 2\alpha$ 得到线段 AE (点 E 不在直线 AB 上), 过点 E 作 $EF \parallel AB$, 交直线 BC 于点 F .

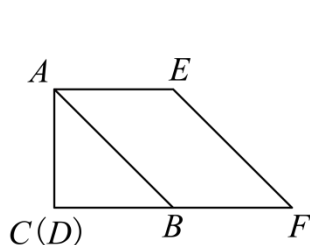


图1

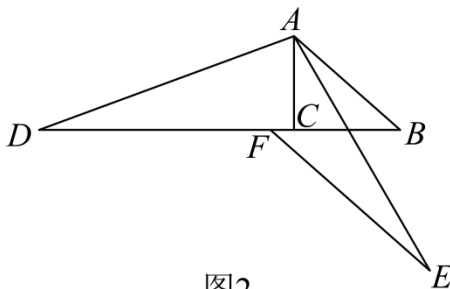


图2

(1) 如图 1, $\alpha = 45^\circ$, 点 D 与点 C 重合, 求证: $BF = AC$;

(2) 如图 2, 点 D , F 都在 BC 的延长线上, 用等式表示 DF 与 BC 的数量关系, 并证明.

【答案】 (1) 见解析 (2) $DF = 2BC$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 全等三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理的应用, 平行四边形的性质与判定, 熟练掌握旋转的性质是解题的关键;

(1) 根据 $\alpha = 45^\circ$, 得出 $\angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$, 根据旋转可得 $AE = AD = AC$, $\angle EAB = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ$, 进而证明四边形 $ABFE$ 是平行四边形, 得出 $BF = AE$, $BF = AC$; 即可得证;

(2) 在 DB 上取一点 G , 使得 $AG = AB$, 证明 $\triangle DAG \cong \triangle EAB$ (SAS) 得出 $DG = BE$, $\angle AGD = \angle ABE = 180^\circ - \angle AGC = 180^\circ - \alpha$, 进而根据三角形内角和定理得出 $\angle FBE = 180^\circ - 2\alpha$, 根据平行线的性质得出 $\angle BFE = \angle ABF = \alpha$, 进而得出 $\angle BEF = \alpha$, 根据等角对等边可得 $BE = BF$, 则 $DG = BF$, 根据三线合一可得 $GC = BC$, 进而根据 $DF = BD - BF = BD - DG = BG = 2BC$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$

$\therefore$ 线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ 得到线段 AE , 点 D 与点 C 重合

$\therefore AE = AD = AC$, $\angle EAB = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle EAB = \angle ABC,$$

$$\therefore BC \parallel AE$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形,

$$\therefore BF = AE,$$

$$\therefore BF = AC;$$

【小问 2 详解】

$$DF = 2BC,$$

证明：如图，在 CD 上取一点 G ，使得 $CG = CB$

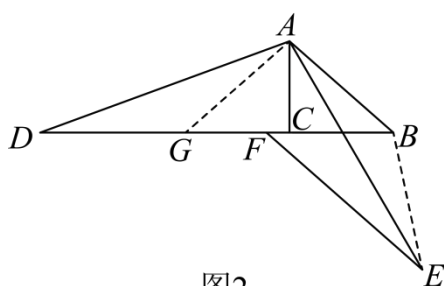


图2

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore AG = AB$$

$$\therefore \angle AGB = \angle ABG = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAG = 180^\circ - 2\alpha$$

$\therefore$ 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ - 2\alpha$ 得到线段 AE ,

$$\therefore DA = EA$$

$$\therefore \angle DAE = \angle GAB = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\therefore \angle DAG = \angle EAB$$

$$\therefore \triangle DAG \cong \triangle EAB (\text{SAS})$$

$$\therefore DG = BE, \quad \angle AGD = \angle ABE = 180^\circ - \angle AGC = 180^\circ - \alpha$$

$$\text{又} \because \angle ABC = \alpha$$

$$\therefore \angle FBE = \angle ABE - \angle ABC = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle ABF = \alpha$$

$$\therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle FBE - \angle BFE = \alpha$$

$$\therefore BE = BF$$

$$\therefore DG = BF$$

$$\because AG = AB, \quad AC \perp BC$$

$$\therefore GC = BC$$

$$\therefore DF = BD - BF = BD - DG = BG = 2BC$$