

2025 学年第二学期蒙山中学初二数学月考试卷

一、单选题

1. 下列多边形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）

- A. 平行四边形 B. 等边三角形 C. 矩形 D. 梯形

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义，逐一判断选项即可得到答案. 轴对称图形的定义：沿一条直线对折后，直线两侧部分能完全重合的图形是轴对称图形；中心对称图形的定义：绕图形中心旋转 180° 后能与原图形重合的图形是中心对称图形.

【详解】解：A. 选项平行四边形，绕对角线交点旋转 180° 后与原图形重合，但不存在一条直线使对折后两侧完全重合，因此它是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合要求；

B. 选项等边三角形，沿高线所在直线对折后两侧重合，是轴对称图形，但绕中心旋转 180° 后不与原图形重合，不是中心对称图形，不符合要求；

C. 选项矩形，沿对边中点连线所在直线对折后两侧重合，绕对角线交点旋转 180° 后与原图形重合，因此既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合要求；

D. 选项梯形，只有等腰梯形是轴对称图形，所有梯形都不是中心对称图形，不符合要求.

2. 下列说法中正确的是（ ）

- A. 对角线互相垂直的四边形是正方形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 矩形的对角线相等且互相平分
D. 平行四边形的对角线平分一组对角

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正方形的判定，矩形的判定和性质，平行四边形的性质. 根据正方形的判定，矩形的判定和性质，平行四边形的性质判断各选项的正确性即可.

【详解】解：对角线互相垂直的四边形不一定是正方形（如菱形），A 不正确；

对角线相等的四边形不一定是矩形（如等腰梯形），B 不正确；

矩形的对角线相等且互相平分，C 正确；

平行四边形的对角线互相平分，但不一定平分一组对角，D 不正确；

故选：C.

3. 四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 相交于点 O , 能判别这个四边形是正方形的条件是 ()

A. $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AC = BD$

B. $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$

C. $AO = BO = CO = DO$, $AC \perp BD$

D. $AO = CO$, $BO = DO$, $AB = BC$

【答案】C

【解析】

【分析】本题是考查正方形的判定, 判别一个四边形为正方形主要根据正方形的概念. 途径有两种: ①先说明它是矩形, 再说明有一组邻边相等; ②先说明它是菱形, 再说明它有一个角为直角. 根据正方形的判定: 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形进行分析从而得到最后的答案.

【详解】解: A: $\because AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\because AC = BD$,

$\therefore$ 对角线相等, 为矩形, 但无邻边相等或垂直, 故 A 不符合题意;

B: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 可能为平行四边形.

$\because \angle A = \angle C$, 为平行四边形性质, 无额外条件, 不能判定为正方形. 故 B 不符合题意.

C: $\because AO = BO = CO = DO$,

$\therefore AC = BD$ 且 O 为对角线中点.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形且对角线相等, 为矩形.

$\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 对角线垂直.

$\therefore$ 矩形变为正方形. 故 C 符合题意;

D: $\because AO = CO$, $BO = DO$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\because AB = BC$,

$\therefore$ 邻边相等, 为菱形, 但无直角, 不能判定为正方形. 故 D 不符合题意.

故选: C

4. 小丽家有一个菱形的小院子, 院里有四棵小树 E , F , G , H 刚好在其院子 $ABCD$ 各边的中点上, 若在四边形 $EFGH$ 内种上小草, 则这块草地的形状是 ()

A. 矩形

B. 菱形

C. 正方形

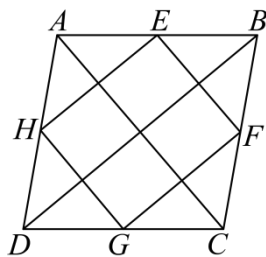
D. 平行四边形

【答案】A

【解析】

【分析】连接菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD ，先利用三角形中位线定理证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，再结合菱形对角线互相垂直的性质，推出平行四边形有一个内角是直角，即可判定形状.

【详解】解：如图，连接 AC ， BD ，



$\because E, F, G, H$ 分别是菱形 $ABCD$ 各边的中点,

$\therefore$ 由三角形中位线定理得 $EH \parallel BD$, $EH = \frac{1}{2}BD$, $FG \parallel BD$, $FG = \frac{1}{2}BD$, $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore EH \parallel FG$, $EH = FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

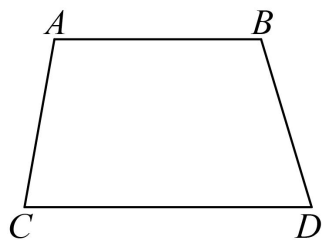
$\therefore AC \perp BD$,

$\because EH \parallel BD$, $EF \parallel AC$,

$\therefore EH \perp EF$, 即 $\angle HEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 去掉一个 $\angle D$ 后，剩下的新图形不可能是（ ）边形.



A. 三边形

B. 四边形

C. 五边形

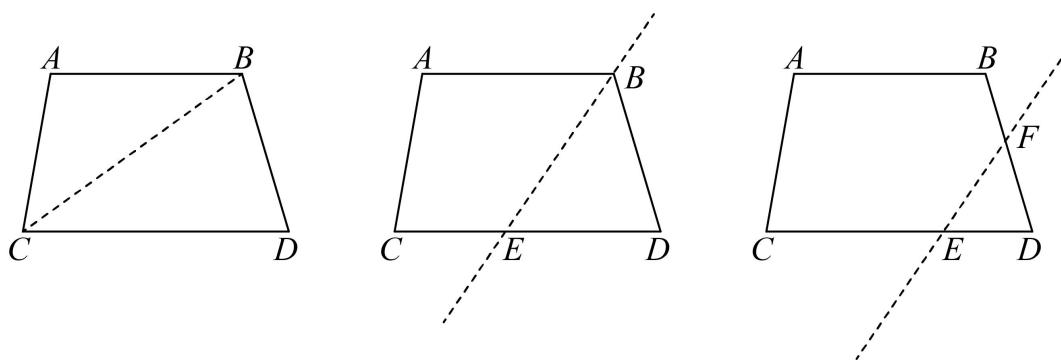
D. 六边形

【答案】D

【解析】

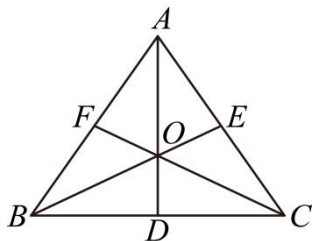
【分析】本题考查了多边形，分情况，画出图形即可，能画出符合的所有情况是解题的关键.

【详解】解：如图所示，剩下的新图形可能是①三角形 ABC ，②四边形 $ABEC$ ，③五边形 $ABFEC$ ，不可能是六边形，



故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 F ， D ， E 分别是边 AB 、 BC 、 AC 上的点，且 AD ， BE ， CF 相交于点 O ，若点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，则以下结论：①线段 AD 、 BE 、 CF 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线；② $\triangle BOD$ 的面积是 $\triangle AOC$ 面积的一半；③图中与 $\triangle BOC$ 面积相等的三角形有 2 个；④ $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE}$ ；⑤ $OF = \frac{1}{3}AD$ ，其中一定正确的结论有（ ）



- A. 1 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】由重心是三条中线的交点，可知线段 AD ， BE ， CF 是 $\triangle ABC$ 的三条中线，可判断①错误，继而得出 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABE} = S_{\triangle EBC} = S_{\triangle AFC} = S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，

$S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COD}$ ， $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COE}$ ， $S_{\triangle AOF} = S_{\triangle BOF}$ ，进一步推出 $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COE} = S_{\triangle AOF} = S_{\triangle BOF}$ ，

然后逐个分析即可.

【详解】解：① $\because AD$ ， BE ， CF 相交于点 O ，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，重心是三条中线的交点，
 $\therefore$ 线段 AD ， BE ， CF 是 $\triangle ABC$ 的三条中线，故①错误；

$\because$ 三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分，

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABE} = S_{\triangle EBC} = S_{\triangle AFC} = S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}，$$

$$S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COD}，S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COE}，S_{\triangle AOF} = S_{\triangle BOF}，$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle BCE} - S_{\text{四边形}CDOE}，S_{\triangle AOE} = S_{\triangle ACD} - S_{\text{四边形}CDOE}，$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle AOE},$$

同理可求: $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COE} = S_{\triangle AOF} = S_{\triangle BOF}$, 故④正确;

$\therefore \triangle BOD$ 的面积是 $\triangle AOC$ 面积的一半, 故②正确;

图中与 $\triangle BOC$ 面积相等的三角形有 $\triangle AOC, \triangle AOB$ 共 2 个, 故③正确;

$$\because S_{\triangle BOF} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCF}, \triangle BOF \text{ 与 } \triangle BCF \text{ 等高},$$

$$\therefore OF = \frac{1}{3} CF,$$

$\therefore CF$ 与 AD 不一定相等,

$$\therefore OF = \frac{1}{3} AD \text{ 不一定成立, 故⑤错误.}$$

综上所述, 正确的结论有②③④, 共 3 个.

二、填空题

7. 已知一个多边形的内角和是 2340° , 则这个多边形的边数是_____.

【答案】 15##十五

【解析】

【分析】 本题考查多边形得内角和, 根据多边形的内角和公式, 进行求解即可.

【详解】 解: 设所求 n 边形边数为 n ,

$$\text{则 } (n-2) \cdot 180^\circ = 2340^\circ,$$

解得 $n = 15$.

故这个多边形的边数是 15.

故答案为: 15.

8. 已知点 $P(2a-4, a+3)$ 在 y 轴上, 则 $a =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了点的坐标, 熟练掌握 y 轴上的点横坐标为 0 是解题的关键. 根据 y 轴上的点横坐标为 0 可得 $2a-4=0$, 然后进行计算即可解答.

【详解】 解: $\because$ 点 $P(2a-4, a+3)$ 在 y 轴上,

$$\therefore 2a-4=0,$$

解得: $a = 2$,

故答案为：2.

9. 若点 $P(a, b)$ 在第四象限，且点 P 到 x 轴的距离为 4，到原点的距离为 5，则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(3, -4)$

【解析】

【分析】 本题考查的是坐标与图形性质，熟记点到 x 轴的距离等于纵坐标的绝对值，到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值是解题的关键.

由第四象限点的坐标特征可得 $a > 0$ ， $b < 0$ ，根据点到 x 轴的距离为 4 可得 $b = -4$ ，由勾股定理可得

$a^2 + b^2 = 5^2$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 点 P 在第四象限，

$\therefore a > 0$ ， $b < 0$.

$\because$ 点 P 到 x 轴的距离为 4，

$\therefore |b| = 4$.

又 $\because b < 0$ ，

$\therefore b = -4$.

$\because$ 点 P 到原点的距离为 5，

$\therefore a^2 + b^2 = 5^2$ ，即 $a^2 + (-4)^2 = 25$.

$\therefore a^2 = 9$.

又 $\because a > 0$ ，

$\therefore a = 3$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(3, -4)$.

故答案为： $(3, -4)$.

10. DeepSeek 公司正在开发一款基于直角坐标系的导航软件. 为了测试软件的准确性，工程师在坐标系中设置了以下关键点： $A(2, 3)$ 表示起点， $B(8, 7)$ 表示终点. 如果 DeepSeek 软件需要在点 A 和点 B 之间设置一个中转站，且中转站到点 A 和点 B 的距离相等，则中转站的坐标为_____.

【答案】 $(5, 5)$

【解析】

【分析】本题主要考查了中点坐标公式，熟练掌握中点坐标公式，是解题的关键. 设中转站的坐标为 (x, y) ，根据中点坐标公式进行求解即可.

【详解】解：设中转站的坐标为 (x, y) ，

$\because$ 中转站到点 A 和点 B 的距离相等，

$\therefore$ 中转站为 AB 的中点，

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{2+8}{2} = 5 \\ y = \frac{3+7}{2} = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 中转站的坐标为 $(5, 5)$.

故答案为： $(5, 5)$.

11. 已知平行四边形 $ABCD$ ，从① $AB = BC$ ；② $\angle ABC = 90^\circ$ ；③ $AC = BD$ ；④ $AC \perp BD$ 四个条件中，选一个作为补充条件，使得平行四边形 $ABCD$ 是矩形. 选择的条件可以是_____. (写出所有的可能，填写序号即可)

【答案】②③

【解析】

【分析】本题考查了矩形的判定. 熟练掌握矩形的判定方法是解题关键；分别将①②③④作为补充条件判断即可.

【详解】解：补充① $AB = BC$ ；

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形，不成立；

补充② $\angle ABC = 90^\circ$ ；

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，成立；

补充③ $AC = BD$ ；

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形，成立；

补充④ $AC \perp BD$ ；

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

∴ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形，不成立；

故答案为：②③.

12. 若一个菱形的两条对角线长分别是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 8x + n = 0$ 的两个实数根，且其面积为 6，则该菱形的边长为_____.

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 设菱形两条对角线长分别为 a 、 b . 利用根与系数的关系和菱形面积公式得到相关等式. 再结合勾股定理求出菱形的边长即可.

【详解】 解： 设菱形的两条对角线长分别为 a 、 b .

∵ a, b 是一元二次方程 $x^2 - 8x + n = 0$ 的两个实数根.

$$\therefore \text{由根与系数的关系得} \begin{cases} a+b=8 \\ ab=n \end{cases}.$$

∵ 菱形面积为 6.

$$\therefore \frac{1}{2}ab = 6. \text{ 解得 } ab = 12.$$

$$\therefore \text{菱形的边长为 } \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$$

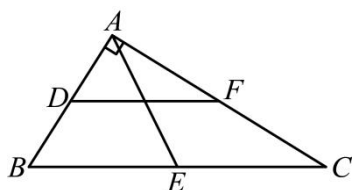
$$= \frac{1}{2}\sqrt{64 - 24}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{40}$$

$$= \sqrt{10}.$$

13. 如图，直角 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 、 E 、 F 分别为 AB 、 BC 、 AC 的中点，已知 $DF = 3$ ，则

$AE =$ _____.



【答案】3

【解析】

【分析】根据已知可得 DF 是 ABC 的中位线，得到 BC 的边长；又结合直角三角形斜边中线是斜边的一半，即可求解.

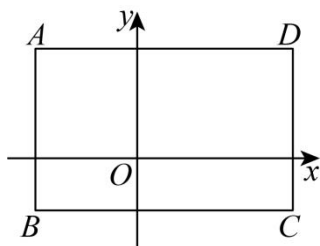
【详解】解： $\because D, F$ 分别为 AB, AC 的中点

$$\therefore BC = 2DF = 6$$

在 $\text{Rt } ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， E 为 BC 的中点

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BC = 3.$$

14. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的两边分别平行坐标轴，点 B 的坐标为 $(-3, -2)$ ，点 D 的坐标为 $(2, 3)$ ，则矩形 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】25

【解析】

【分析】根据矩形的性质，得到 $AD \parallel BC \parallel x$ 轴， $AB \parallel CD \parallel y$ 轴，进而得到 A 点坐标，求出 AB, AD 的长，再利用面积公式进行求解即可.

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ 的两边分别平行坐标轴，

$$\therefore AD \parallel BC \parallel x \text{ 轴}, AB \parallel CD \parallel y \text{ 轴},$$

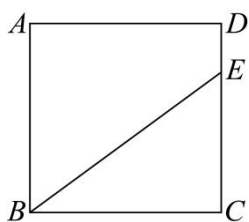
$$\because \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (-3, -2), \text{ 点 } D \text{ 的坐标为 } (2, 3),$$

$$\therefore A(-3, 3),$$

$$\therefore AB = 3 - (-2) = 5, AD = 2 - (-3) = 5,$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积是 } AB \cdot AD = 5 \times 5 = 25.$$

15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 在 CD 边上， $CE = 3$ ，若点 F 在正方形的某一边上，满足 $CF = BE$ ，且 CF 与 BE 的交点为 M ，则 $CM =$ _____.



【答案】 $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$

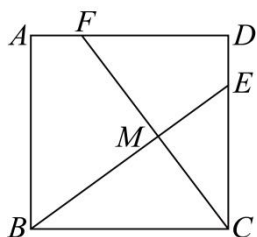
【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质以及勾股定理的运用，全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具，在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件.

分点 F 在 AD 上、点 F 在 AB 上两种情况，分别依据全等三角形的性质以及矩形的性质求解即可.

【详解】 解：分两种情况：

①如图所示，当点 F 在 AD 上时，



$$\because CF = BE, \quad CD = BC = 4, \angle BCE = \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCE \cong \text{Rt}\triangle CDF \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle DCF = \angle CBE,$$

$$\text{又} \because \angle BCF + \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMC = 90^\circ, \text{ 即 } CF \perp BE,$$

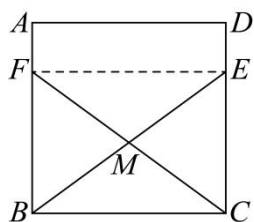
$$\because BC = 4, CE = 3, \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = 5,$$

$$\because S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot CM = \frac{1}{2} BC \cdot CE,$$

$$\therefore CM = \frac{BC \times CE}{BE} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5};$$

②如图所示，当点 F 在 AB 上时，



同理可得, $\text{Rt}\triangle BCF \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (HL),

$$\therefore BF = CE,$$

$$\text{又} \because BF \parallel CE,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形,

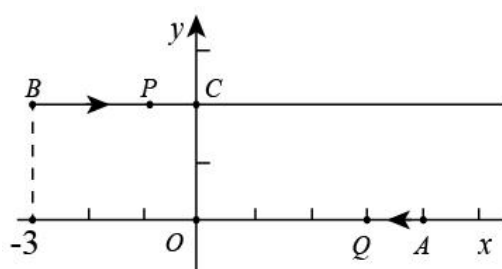
$$\text{又} \because \angle BCE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是矩形,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}.$$

故答案为: $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$.

16. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(4,0)$, 点 $B(-3,2)$, 点 $C(0,2)$, 点 P 从点 B 出发, 以 2 个单位每秒的速度沿射线 BC 运动, 点 Q 从点 A 出发, 开始以 1 个单位每秒的速度向原点 O 运动, 到达原点后立刻以原来 3 倍的速度沿射线 OA 运动, 若 P, Q 两点同时出发, 设运动时间为 t 秒, 则当 $t =$ _____ 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形.



【答案】 1 或 3 或 13

【解析】

【分析】 利用 A, B, C 的坐标可得到 $OA=4$, $BC=3$, $BC \parallel x$ 轴, 根据平行四边形的判定, 当 $PC=QA$ 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形, 讨论: 若 $0 < t < \frac{3}{2}$ 时, $3-2t=t$; 若 $\frac{3}{2} < t < 4$, $2t-3=t$; 若 $4 < t < \frac{16}{3}$ 时, $2t-3=4-3(t-4)$; 若 $t > \frac{16}{3}$ 时, $2t-3=3(t-4)-4$, 然后分别解方程即可确定满足条件的 t 的值.

【详解】 $\because A(4,0), B(-3,2), C(0,2),$

$\therefore OA=4, BC=3, BC \parallel x$ 轴,

$\therefore PC \parallel AQ$

$\therefore$ 当 $PC=AQ$ 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形,

若 $0 < t < \frac{3}{2}$ 时, $BP=2t,$

$PC=3-2t, AQ=t,$ 此时 $3-2t=t,$ 解得 $t=1;$

若 $\frac{3}{2} < t < 4$ 时, $BP=2t,$

$PC=2t-3, AQ=t,$ 此时 $2t-3=t,$ 解得 $t=3;$

若 $4 < t < \frac{16}{3}$ 时, $BP=2t,$

$PC=2t-3, OQ=3(t-4), AQ=4-3(t-4),$ 此时 $2t-3=4-3(t-4),$ 解得 $t=\frac{19}{5}$ (舍去);

若 $t > \frac{16}{3}, BP=2t, PC=2t-3, OQ=3(t-4), AQ=3(t-4)-4,$ 此时 $2t-3=3(t-4)-4,$ 解得 $t=13;$

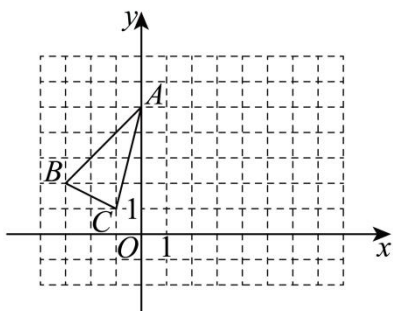
综上所述, 当 t 为 1 或 3 或 13 时, 以点 A, Q, C, P 为顶点的四边形为平行四边形.

故答案为 1 或 3 或 13

【点睛】本题考查了平行四边形的判定: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形. 利用分类讨论的思想和方程的思想是解决问题的关键.

三、简答题

17. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(0,5), B(-3,2), C(-1,1).$



(1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle AB_1C_1$, 并写出 B_1 的坐标;

(2) 将 $\triangle ABC$ 向右平移 8 个单位, 画出平移后的 $\triangle A_2B_2C_2$, 写出 B_2 的坐标;

【答案】(1) 见解析, B_1 的坐标是 $(3,2);$

(2) 见解析, $B_2(5,2)$

【解析】

【分析】 本题考查了图形的平移和翻折，熟练掌握利用平移变换与轴对称变换作图是解决本题的关键；

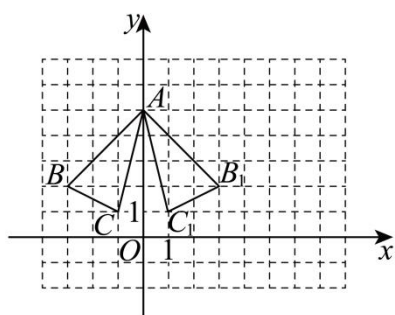
(1) 分别作出点 A , B , C 关于 y 轴的对称点，顺次连接得到 $\triangle AB_1C_1$ ，根据点 B_1 的位置得到 B_1 的坐标即可；

(2) 分别作出点 A , B , C 向右平移 8 个单位的对应点，顺次连接对应点得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，根据点 B_2 的位置得到 B_2 的坐标即可；

【小问 1 详解】

解：作图如图，

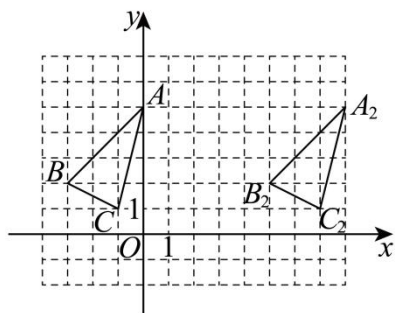
$\therefore \triangle AB_1C_1$ 为所作的图形， B_1 的坐标是 $(3, 2)$ ；



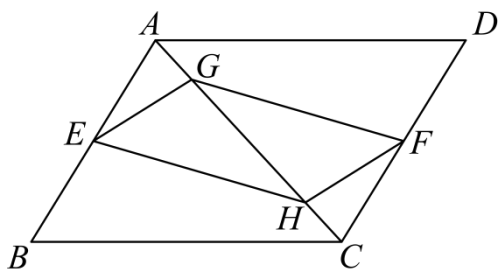
【小问 2 详解】

作图如图，

$\therefore \triangle A_2B_2C_2$ 为所作的图形， $B_2(5, 2)$ 。



18. 如图， G 、 H 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的点，且 $AG = CH$ ， E ， F 分别是 AB ， CD 的中点. 求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形.



【答案】 证明见解析

【解析】

【分析】 先根据平行四边形的性质得到 $AB = CD$, $\angle EAG = \angle FCH$, 再根据线段中点的定义证明 $AE = CF$, 由此证明 $\triangle AEG \cong \triangle CFH$ 得到 $EG = FH$, $\angle AGE = \angle CHF$, 进一步证明 $EG \parallel FH$, 即可证明四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

【详解】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle EAG = \angle FCH,$$

$\because E, F$ 分别是 AB, CD 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\text{又} \because AG = CH,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH (\text{SAS}),$$

$$\therefore EG = FH, \angle AGE = \angle CHF,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle AGE = 180^\circ - \angle CHF, \text{ 即 } \angle EGH = \angle FHG,$$

$$\therefore EG \parallel FH,$$

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 掌握平行四边形的性质与判定条件是解题的关键.

19. 按要求解答问题:

(1) 已知点 $A(8, 2), B(2, -1)$, 求 A, B 两点间的距离;

(2) 已知点 $A(-1, 3), B(0, 1), C(2, 2)$, 判断 ABC 的形状.

【答案】 (1) $3\sqrt{5}$

(2) 等腰直角三角形

【解析】

【分析】 (1) 利用两点间距离公式计算 A, B 两点的距离, 化简后得到结果;

(2) 先计算出 ABC 三边的长度, 再根据边的长度关系结合勾股定理的逆定理判断三角形的形状.

【小问 1 详解】

解: $\because A(8, 2), B(2, -1),$

$$\therefore AB = \sqrt{(8-2)^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

解: $\because A(-1,3)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(2,2)$,

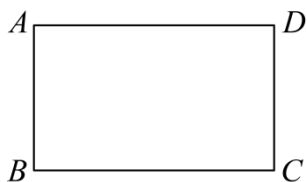
$$\therefore AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad BC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AB = BC, \quad AB^2 + BC^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 10 = (\sqrt{10})^2 = AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

20. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形.



(1) 请用尺规作图法, 在矩形 $ABCD$ 的边 BC 和 AD 上分别找一点 E 、 F 使得四边形 $AECF$ 为菱形. (保留作图痕迹, 不写作法)

(2) 已知 $AD = 8$, $CD = 4$. 求菱形 $AECF$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 20

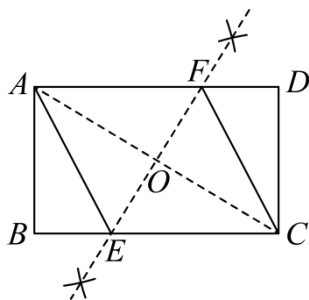
【解析】

【分析】(1) 连接 AC , 作 AC 的垂直平分线 EF 分别交边 AC 、 BC 、 AD 于点 O 、 E 、 F , 连接 AE 、 CF , 则菱形 $AECF$ 即为所求;

(2) 根据菱形的性质得到 $AF = CF$, 设 $AF = CF = a$, 在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中利用勾股定理列出方程, 求出 a 的值, 再利用菱形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 连接 AC , 作 AC 的垂直平分线 EF 分别交边 AC 、 BC 、 AD 于点 O 、 E 、 F , 连接 AE 、 CF ,



由作图可得, $OA = OC$, $AC \perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle OCE, \quad \angle OFA = \angle OEC,$$

$$\therefore \triangle OAF \cong \triangle OCE (\text{AAS}),$$

$$\therefore OF = OE,$$

$$\text{又} \because OA = OC, \quad AC \perp EF,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECF \text{ 为菱形},$$

$$\therefore \text{菱形 } AECF \text{ 即为所求};$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\because \text{菱形 } AECF,$$

$$\therefore AF = CF,$$

$$\text{设 } AF = CF = a, \text{ 则 } DF = AD - AF = 8 - a,$$

$$\text{在 Rt} \triangle CDF \text{ 中, } CD^2 + DF^2 = CF^2,$$

$$\therefore 4^2 + (8 - a)^2 = a^2,$$

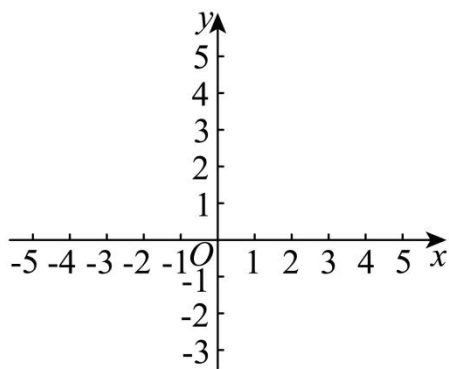
$$\text{解得 } a = 5,$$

$$\therefore AF = 5,$$

$$\therefore \text{菱形 } AECF \text{ 的面积} = AF \cdot CD = 5 \times 4 = 20.$$

【点睛】本题主要考查了尺规作图、矩形的性质、菱形的性质与判定、勾股定理, 熟练掌握相关知识点是解题的关键.

21. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(m, 0)$, $B(n, 0)$, 且 m, n 满足 $|m+2| + (n-4)^2 = 0$, 点 C 的坐标为 $(0, 3)$.



(1) 求 m 、 n 的值及三角形 ABC 的面积;

(2) 若点 M 在 x 轴上, 且 $S_{\text{三角形}ABC} = 3S_{\text{三角形}ACM}$, 试求点 M 的坐标.

【答案】(1) $m = -2$, $n = 4$, 9;

(2) $M(0,0)$ 或 $(-4,0)$.

【解析】

【分析】(1) 先根据非负数的性质求出 m 、 n 的值, 求出 AB , OC 的长, 然后根据 $S_{\text{三角形}ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC$ 即可求解;

(2) 设点 M 的坐标为 $(x,0)$, 则 $AM = |x+2|$, 由题意可得 $3 \times \frac{1}{2} \times AM \times 3 = 9$, 然后求出 x 的值即可;
本题考查了非负数的性质, 坐标与图形的性质, 三角形面积公式, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because |m+2| + (n-4)^2 = 0$,

$\therefore m+2=0$, $n-4=0$,

解得 $m=-2$, $n=4$,

$\therefore A(-2,0)$, $B(4,0)$,

$\therefore AB=6$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,3)$

$\therefore OC=3$,

$\therefore S_{\text{三角形}ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$;

【小问 2 详解】

解: 设点 M 的坐标为 $(x,0)$, 则 $AM = |x+2|$,

由题意可得: $3 \times \frac{1}{2} \times AM \times 3 = 9$,

$\therefore AM=2$, 即 $|x+2|=2$,

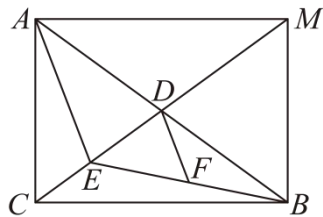
解得: $x=0$ 或 $x=-4$,

$\therefore M(0,0)$ 或 $(-4,0)$.

四、解答题

22. 如图, 在矩形 $ACBM$ 中, 连接 AB , CM 交于点 D , E 为线段 CD 上一点, 连接 AE , BE , 取 BE 的

中点 F ， DC 平分 $\angle ADF$ 。



(1) 求证: $AE = AD$;

(2) 若 $DF = 2$, $AC = \frac{24}{5}$, 求矩形 $ACBM$ 的面积.

【答案】(1) 见解析;

(2) $\frac{768}{25}$.

【解析】

【分析】本题考查了三角形中位线定理，矩形的性质，等腰三角形的判定，勾股定理，掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 由矩形性质可得 $AB = CM$, $AD = BD = \frac{1}{2}AB$, $CD = DM = \frac{1}{2}AB$, $\angle ACB = 90^\circ$, 再证明 DF 是 $\triangle BAE$ 的中位线, 所以 $DF \parallel AE$, $AE = 2DF$, 通过角平分线定义可得 $\angle ADE = \angle EDF$, 所以 $\angle ADE = \angle AED$, 最后通过等角对等边即可求证;

(2) 由中位线定理可得 $AE = 2DF = 4$, 从而有 $AB = 8$, 然后通过勾股定理求出 $BC = \frac{32}{5}$, 最后由面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ACBM$ 是矩形,

$\therefore AB = CM$, $AD = BD = \frac{1}{2}AB$, $CD = DM = \frac{1}{2}AB$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore D$ 为斜边 AB 的中点,

$\therefore F$ 为 BE 的中点,

$\therefore DF$ 是 $\triangle BAE$ 的中位线,

$\therefore DF \parallel AE$, $AE = 2DF$,

$\therefore \angle EDF = \angle AED$,

$\therefore DC$ 平分 $\angle ADF$,

$\therefore \angle ADE = \angle EDF$,

$\therefore \angle ADE = \angle AED$,

$$\therefore AE = AD;$$

【小问2详解】

$$\text{解: } \because DF = 2,$$

$$\therefore AE = 2DF = 4,$$

$$\therefore AD = AE = 4,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D 为斜边 AB 的中点,

$$\therefore AB = 8,$$

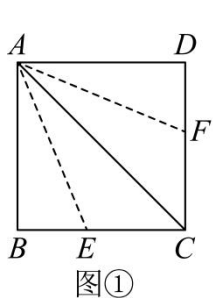
$$\therefore AC = \frac{24}{5},$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{32}{5},$$

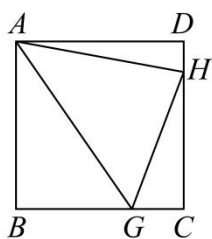
$$\therefore \text{矩形 } ACBM \text{ 的面积} = \frac{24}{5} \times \frac{32}{5} = \frac{768}{25}.$$

23. 问题背景:

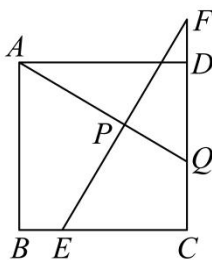
在一次数学活动课上, 老师让同学们根据所学的知识去了解“半角模型”, 并探究“半角模型”的相关结论.



图①



图②



图③

(1) 初步探究: 如图①, 小明将一张正方形纸片 $ABCD$ 折叠, 使得 AB , AD 恰好都落在对角线 AC 上, 展开正方形纸片 $ABCD$ 后得到折痕 AE , AF , 求 $\angle EAF$ 的度数;

(2) 深入探究: 如图②, 小华在图①的基础上, 将 $\angle EAF$ 绕点 A 逆时针旋转一定的角度, 使 $\angle EAF$ 的两边分别交 BC , CD 于点 G , H , 连接 GH , 请你帮助小华判断线段 BG , GH 和 DH 之间存在怎样的数量关系, 并证明;

(3) 拓展延伸: 如图③, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 上的一点, F 是 CD 延长线上一点, 且 $BE = DF$, 连接 EF , 过点 A 作 $AP \perp EF$, 垂足为点 P , 交边 CD 于点 Q . 若 $BE = 5$, $CQ = 8$, 求 $\triangle ADQ$ 的面积.

【答案】(1) $\angle EAF = 45^\circ$

(2) $GH = BG + DH$, 证明见解析

(3) $S_{\triangle ADQ} = 120$

【解析】

【分析】(1) 利用折叠的性质, 得到 $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle DAC$,

即可得到 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, 最后求解;

(2) 把 $\triangle ADH$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABM$, 结合全等三角形的性质和角度和差关系通过证明 $\triangle GAM \cong \triangle GAH$, 根据全等三角形对应边相等和等量代换即可求解;

(3) 连接 AE , AF , EQ , 通过证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$, 由全等三角形的性质得到 $\triangle EAF$ 为等腰直角三角形, 设 $DQ = x$, 分别用含 x 的代数式表示 CE , EQ , 再结合勾股定理和三角形面积公式求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

由折叠的性质, 得 $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle DAF = \angle CAF = \frac{1}{2}\angle DAC$,

$$\therefore \angle EAF = \angle CAE + \angle CAF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle DAC) = \frac{1}{2}\angle BAD = 45^\circ,$$

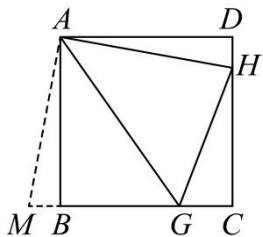
即: $\angle EAF = 45^\circ$;

【小问 2 详解】

解: $GH = BG + DH$,

证明如下: 如下图所示, 把 $\triangle ADH$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABM$,

点 H 的对应点为点 M ,



$\therefore \triangle ADH \cong \triangle ABM$ (旋转的性质),

$\therefore \angle DAH + \angle BAM$, $AH = AM$ $DH = BM$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAH + \angle BAG = \angle BAD - \angle GAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM + \angle BAG = \angle GAM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GAM = \angle GAH ,$$

在 $\triangle GAM$ 和 $\triangle GAH$ 中,

$$\begin{cases} AM = AH \\ \angle GAM = \angle GAH , \\ AG = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAM \cong \triangle GAH (\text{SAS}),$$

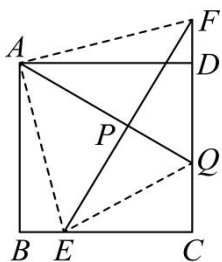
$$\therefore GM = GH ,$$

$$\because GM = BG + BM ,$$

$$\therefore GH = BG + DH ;$$

【小问 3 详解】

解: 如下图所示: 连接 AE , AF , EQ ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, BC = CD, \angle ABE = \angle BCD = \angle ADF = 90^\circ ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADF , \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF, AE = AF ,$$

$$\because \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EAD = \angle EAF = 90^\circ ,$$

$\therefore \triangle EAF$ 为等腰直角三角形,

$$\because AQ \perp EF ,$$

$$\therefore EP = FP, \angle EAP = \angle FAP = \frac{1}{2} \angle EAF = 45^\circ ,$$

$\therefore AQ$ 垂直平分 EF ,

$\therefore EQ = FQ$,

设 $DQ = x$, 则 $CD = CQ + DQ = x + 8$, $EQ = FQ = DQ + DF = x + 5$,

$\therefore CE = BC - BE = CD - BE = x + 8 - 5 = x + 3$,

在 $\text{Rt}\triangle ECQ$ 中, 根据勾股定理可得: $CQ^2 + CE^2 = EQ^2$,

即: $8^2 + (x + 3)^2 = (x + 5)^2$, 解得 $x = 12$,

$\therefore DQ = 12$, $AD = CD = 20$,

$\therefore S_{\triangle ADQ} = \frac{1}{2} AD \cdot DQ = \frac{1}{2} \times 20 \times 12 = 120$.

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质, 折叠和旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质以及垂直平分线的性质, 添加适当辅助线是解题的关键.