

2025 学年第二学期初二年级数学过程性评价一试卷

一、填空题 (1-8 题, 每题 2 分; 9-12 题, 每题 3 分, 共 28 分)

1. 方程 $\left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = 0$ 的根为_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程, 根据几个式子的积为 0, 则必有一个因式为 0, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because \left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = 0,$

$$\therefore x + \frac{3}{2} = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0 \text{ 或 } x + 1 = 0,$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = 1 \text{ 或 } x = -1,$$

检验: 当 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = -1$ 时, $x - 1 < 0$, $\sqrt{x-1}$ 无意义, 当 $x = 1$ 时, 满足题意;

$\therefore$ 方程的根为: $x = 1$.

故答案为: $x = 1$

2. 方程 $\sqrt{x^2 - 2003} + \sqrt{x^2 - 2023} = 10$ 的解为_____.

【答案】 $x = \pm\sqrt{2039}$

【解析】

【详解】 解: 设 $a = \sqrt{x^2 - 2003}$, $b = \sqrt{x^2 - 2023}$,

$$\therefore a + b = 10 \text{ ①},$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (x^2 - 2003) - (x^2 - 2023) = 20,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$\therefore a - b = 2 \text{ ②},$$

$$\therefore \text{①} + \text{②} \text{ 得 } 2a = 12, \text{ 即 } a = 6,$$

$$\therefore a = \sqrt{x^2 - 2003} = 6,$$

$$\text{两边平方得 } x^2 - 2003 = 36,$$

$$\text{解得 } x = \pm\sqrt{2039};$$

经检验, $x = \pm\sqrt{2039}$ 是原方程的解.

3. 解方程 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+9}} = 4$ 时, 设 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} = y$ 换元后, 整理得关于 y 的整式方程是

_____.

【答案】 $y^2 - 4y + 4 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} = y$, 则原方程可化为关于 y 的一元二次方程即可.

【详解】 解: 设 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} = y$,

则原方程可化为, $y + \frac{4}{y} = 4$ 即 $y^2 - 4y + 4 = 0$, 故答案为 $y^2 - 4y + 4 = 0$.

【点睛】 本题考查了无理方程, 解无理方程最常用的方法是换元法, 解题的关键是理解 $\sqrt{\frac{x}{x+9}}$ 是 $\sqrt{1+\frac{9}{x}}$ 的倒数.

4. 如果关于 x 的无理方程 $\sqrt{2x+m} = x$ 有实数根 $x=1$, 那么 m 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 把方程两边平方去根号得一元二次方程, 然后将 $x=1$ 代入方程即可求出 k 值.

【详解】 解: $\sqrt{2x+m} = x$,

两边同时平方可得: $2x+m = x^2$

实数根1是方程的解, $x=1$ 代入方程,

可解得 $m = -1$,

故答案为: -1 .

【点睛】 本题主要考查了无理方程的解法, 熟练掌握解无理方程的方法两边平方法及换元法, 本题用了平方法, 是解答本题的关键.

5. 某工人要完成1000个零件, 起初机器出现故障, 每分钟比原计划少加工4个零件, 加工320个零件后, 换了一台新机器, 每分钟比原计划多加工8个零件. 已知用新机器加工零件的时间比前面用旧机器加工零件的时间少6分钟, 设原计划每分钟加工 x 个零件, 则可列方程为: _____.

【答案】 $\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8}$

【解析】

【分析】根据题意可知：用新机器加工零件的时间比前面用旧机器加工零件的时间少6分钟，即可列出相应的分式方程.

【详解】解：由题意可得：

$$\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8},$$

故答案为： $\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8}.$

【点睛】本题考查由实际问题抽象出分式方程，解答本题的关键是明确题意，找出等量关系，列出相应的方程.

6. 无论 k 为何值，关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ kx - y = \frac{k^2}{4} + k \end{cases}$ 都只有一组解，则 $b + c =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】先将原方程组化为 $x^2 + (b-k)x + \frac{k^2}{4} + k + c = 0$ ，根据题意可得

$$\Delta = (b-k)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{k^2}{4} + k + c \right) = 0, \text{ 整理得 } (2b+4)k = b^2 - 4c, \text{ 要使得 } \Delta = 0 \text{ 对任意 } k \text{ 都成立, 则}$$

$$\begin{cases} 2b+4=0 \\ b^2-4c=0 \end{cases}, \text{ 求解 } b, c, \text{ 即可求解 } b+c \text{ 的值.}$$

【详解】解： $\begin{cases} y = x^2 + bx + c \text{ ①} \\ kx - y = \frac{k^2}{4} + k \text{ ②} \end{cases}$

将①代入②得， $kx - x^2 - bx - c = \frac{k^2}{4} + k,$

整理得， $x^2 + (b-k)x + \frac{k^2}{4} + k + c = 0,$

由题意得， $\Delta = (b-k)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{k^2}{4} + k + c \right) = 0$

整理得， $(2b+4)k = b^2 - 4c,$

要使得 $\Delta = 0$ 对任意 k 都成立, 则 $\begin{cases} 2b+4=0 \\ b^2-4c=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} b=-2 \\ c=1 \end{cases}$,

$\therefore b+c=-1$.

7. 方程 $\sqrt{6+x-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$ 的解是_____.

【答案】 $2 \leq x \leq 7$

【解析】

【分析】 先将原方程化为 $\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2} = 1$, 则 $|\sqrt{x+2}-2| + |\sqrt{x+2}-3| = 1$, 然后换元, 分类讨论求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{6+x-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$

$$\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2} = 1,$$

$$|\sqrt{x+2}-2| + |\sqrt{x+2}-3| = 1,$$

令 $\sqrt{x+2} = t \geq 0$,

则 $|t-2| + |t-3| = 1$,

当 $t < 2$ 时, $2-t+3-t=1$, 解得 $t=2$, 不满足 $t < 2$, 舍去;

当 $2 \leq t \leq 3$ 时, $t-2+3-t=1$, 即 $1=1$ 恒成立, 此时的 t 符合题意;

当 $t > 3$ 时, $t-2+t-3=1$, 解得 $t=3$, 不满足 $t > 3$, 舍去;

$\therefore \sqrt{x+2} = t$,

$\therefore 2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3$

$4 \leq x+2 \leq 9$,

解得 $2 \leq x \leq 7$,

$\therefore$ 方程 $\sqrt{6+x-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$ 的解是 $2 \leq x \leq 7$.

8. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=16 \end{cases}$ 只有两组实数解, 则 $a =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】由 $(x+y)^2 = 16$ 可得 $x+y = \pm 4$ ，再分别代入 $x^2 + y^2 = 2(1+a)$ 整理得到 $(y-2)^2 = a-3$ 与 $(y+2)^2 = a-3$ ，最后根据方程组只有两组实数解，得到 $(y-2)^2 = a-3$ 与 $(y+2)^2 = a-3$ 都只有唯一解，即可得到 $a-3=0$ 。

【详解】解：由 $(x+y)^2 = 16$ 可得 $x+y = \pm 4$ ，

$$\therefore x = 4-y \text{ 或 } x = -4-y$$

把 $x = 4-y$ 代入 $x^2 + y^2 = 2(1+a)$ 得 $(4-y)^2 + y^2 = 2(1+a)$ ，

展开整理得 $y^2 - 4y + 7 = a$ ，

$$\therefore (y-2)^2 = a-3,$$

同理把 $x = -4-y$ 代入 $x^2 + y^2 = 2(1+a)$ 整理得 $(y+2)^2 = a-3$ ，

$$\therefore (y-2)^2 = a-3 \text{ 与 } (y+2)^2 = a-3 \text{ 的解的个数一致,}$$

$$\therefore \text{方程组} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases} \text{ 只有两组实数解,}$$

$$\therefore (y-2)^2 = a-3 \text{ 与 } (y+2)^2 = a-3 \text{ 都只有唯一解,}$$

$$\therefore a-3=0,$$

解得 $a=3$

$$9. \text{ 方程组} \begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-a)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \text{ 有三组不同实数解, 则实数 } a \text{ 的值 (或取值范围) 是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $a=4$

【解析】

【详解】解：将 $y^2 = 4x$ 代入第二个方程得 $(x-a)^2 + 4x = 16$ ，

$$\text{整理得 } x^2 + (4-2a)x + (a^2-16) = 0 \text{ ①,}$$

对于方程①的每一个正根 $x > 0$ ，

代入 $y^2 = 4x$ 会得到两个不同的 y 值 $(y = \pm 2\sqrt{x})$ ，

如果 $x = 0$ ，则 $y = 0$ ，对应一组解；

$$\therefore \text{方程组} \begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-a)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \text{ 有三组不同实数解,}$$

∴ 方程①的解满足，一个根为 $x=0$ ，另一个解为正数；

将 $x=0$ 代入方程①，得 $0^2 + (4-2a) \cdot 0 + (a^2 - 16) = 0$ ，

即 $a^2 - 16 = 0$ ，解得 $a = \pm 4$ ，

验证：当 $a=4$ 时， $x^2 + (4-8)x + (16-16) = 0$ ，

整理得 $x^2 - 4x = 0$ ，解得 $x=0$ 或 $x=4$ ，

当 $x=4$ 时， $y^2 = 16$ ，解得 $y = \pm 4$ ，

∴ 三组实数解为 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$ ；

当 $a=-4$ 时， $x^2 + 12x = 0$ ，解得 $x=0$ 或 $x=-12$ （舍去），

综上，当 $a=4$ 时，方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-a)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ 有三组不同实数解.

10. 方程 $\sqrt[3]{x + \frac{2}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{x - \frac{2}{9}\sqrt{21}} = 1$ 的解为_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 设 $\sqrt[3]{x + \frac{2}{9}\sqrt{21}} = m$ ， $\sqrt[3]{x - \frac{2}{9}\sqrt{21}} = n$ ，则 $\begin{cases} m+n=1 \\ mn = \sqrt[3]{x^2 - \frac{28}{27}} \\ m^3 + n^3 = 2x \end{cases}$ ，由

$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 + n^2 - mn) = (m+n)[(m+n)^2 - 3mn]$ 可得 $2x = 1 - 3\sqrt[3]{x^2 - \frac{28}{27}}$ ，再解无理方程即可.

【详解】 解： 设 $\sqrt[3]{x + \frac{2}{9}\sqrt{21}} = m$ ， $\sqrt[3]{x - \frac{2}{9}\sqrt{21}} = n$ ，

则 $\begin{cases} m+n=1 \\ mn = \sqrt[3]{x^2 - \frac{28}{27}} \\ m^3 + n^3 = 2x \end{cases}$

∴ $m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 + n^2 - mn) = (m+n)[(m+n)^2 - 3mn]$

$$\therefore 2x = 1 - 3\sqrt[3]{x^2 - \frac{28}{27}}$$

$$(1-2x)^3 = 27\left(x^2 - \frac{28}{27}\right)$$

$$1 - 6x + 12x^2 - 8x^3 = 27x^2 - 28$$

$$8x^3 + 15x^2 + 6x - 29 = 0$$

$$(8x^3 - 8x^2) + (23x^2 - 23x) + (29x - 29) = 0$$

$$(x-1)(8x^2 + 23x + 29) = 0$$

$$x-1=0 \text{ 或 } 8x^2 + 23x + 29 = 0$$

解方程 $x-1=0$ 得 $x=1$ ，方程 $8x^2 + 23x + 29 = 0$ 中 $\Delta = 23^2 - 4 \times 8 \times 29 = -399 < 0$ ，

经检验， $x=1$ 是原方程的解，

$$\therefore \text{方程 } \sqrt[3]{x + \frac{2}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{x - \frac{2}{9}\sqrt{21}} = 1 \text{ 的解为 } x=1.$$

11. 若正整数 a 、 m 、 n 满足 $\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ ，求 $a+m+n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】12

【解析】

【分析】将原方程化为 $a^2 - 4\sqrt{2} = (m+n) - 2\sqrt{mn}$ ，根据等式两边有理部分和无理部分相等得到

$$\begin{cases} a^2 = m+n \\ 4\sqrt{2} = 2\sqrt{mn} \end{cases}, \text{ 求出 } mn=8, \text{ 再枚举求解即可.}$$

【详解】解： $\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{m} - \sqrt{n} \geq 0$ ，

若 $\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = 0$ ，此时 a 不为正整数，

故 $\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{m} - \sqrt{n} > 0$ ，则 $m > n$

由 $\sqrt{a^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ 可得 $a^2 - 4\sqrt{2} = (m+n) - 2\sqrt{mn}$

$$\text{由题意得, } \begin{cases} a^2 = m+n \\ 4\sqrt{2} = 2\sqrt{mn} \end{cases},$$

$$\therefore mn=8,$$

$\because m、n$ 是正整数,

$\therefore m=8, n=1$ 或 $m=4, n=2$,

当 $m=8, n=1$ 时, 解得 $a=3$, 符合题意, 则 $a+m+n=3+8+1=12$;

当 $m=4, n=2$ 时, 此时 $a^2=6$, 则 a 不是正整数, 不符合题意,

综上: $a+m+n=12$.

12. 甲杯子里盛有浓度15%的盐水40kg, 乙杯子里盛有浓度35%的盐水60kg. 第一次: 从甲杯中倒出一部分盐水到乙杯, 搅拌均匀; 第二次: 再从乙杯中倒回同样重量的盐水到甲杯. 甲杯盐水浓度恰好为25%, 则第一次从甲杯倒出了_____千克盐水.

【答案】30

【解析】

【分析】设第一次从甲杯倒出了 x 千克盐水, 由题意得 $(40-x) \times 0.15 + \frac{x(21+0.15x)}{60+x} = 10$, 据此求解即可.

【详解】解: 设第一次从甲杯倒出了 x 千克盐水,

第一次倒出后甲杯剩余 $(40-x)$ 千克盐水, 溶质为 $(40-x) \times 15\%$ 千克,

乙杯加入 x 千克后, 总质量为 $(60+x)$ 千克, 溶质为 $60 \times 35\% + 15\%x = 21 + 0.15x$ 千克,

此时乙杯浓度为: $\frac{21+0.15x}{60+x}$;

从乙杯倒回 x 千克盐水到甲杯, 这部分盐水中的溶质为: $x \times \frac{21+0.15x}{60+x}$,

此时甲杯的总溶质为: $(40-x) \times 15\% + x \times \frac{21+0.15x}{60+x}$,

甲杯总质量回到40千克, 且浓度为25%, 所以总溶质也等于 $40 \times 25\% = 10$ 千克,

由题意得 $(40-x) \times 0.15 + \frac{x(21+0.15x)}{60+x} = 10$,

解得 $x=30$,

经检验, $x=30$ 是原方程的解, 且符合题意.

$\therefore$ 第一次从甲杯倒出了30千克盐水.

二、选择题 (每题3分, 共12分)

13. 下列方程中, 无实数根的方程的个数是 ()

$$(1) \sqrt{x+2}+3=0; (2) \sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}=0; (3) \sqrt{x+1}=-x;$$

$$(4) \sqrt{2x-3}+\sqrt{3-2x}=0; (5) x^2-2x+4=0; (6) \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}.$$

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据无理方程，一元二次方程，分式方程的求解方法求解判断即可.

【详解】解：(1) $\sqrt{x+2}+3=0$,

$$\sqrt{x+2}=-3<0,$$

$\therefore$ 方程无实数根;

$$(2) \sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}=0,$$

$$\therefore \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases},$$

$\therefore x$ 无实数根，即方程无实数根;

$$(3) \sqrt{x+1}=-x,$$

$$(\sqrt{x+1})^2=(-x)^2,$$

$$x^2-x-1=0,$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

由 $\sqrt{x+1}=-x$ 可得 $x \leq 0$,

$$\therefore x = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$\therefore$ 方程有实数根;

$$(4) \sqrt{2x-3}+\sqrt{3-2x}=0,$$

$$\therefore \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x = \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 方程有实数根;

$$(5) x^2 - 2x + 4 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根;

$$(6) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$$

$$2(x-1) + 3(x+1) = 6$$

$$2x - 2 + 3x + 3 = 6$$

$$5x + 1 = 6$$

$$5x = 5$$

$$x = 1,$$

检验: 当 $x = 1$ 时, $(x+1)(x-1) = 0$,

$\therefore$ 原分式方程无解, 即分式方程无实数根,

综上所述: 无实数根的方程为: (1), (2), (5), (6), 共 4 个.

14. 已知下列关于 x 的方程: ① $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$; ② $x^2 + 5\sqrt{x} + 1 = 0$; ③ $\sqrt{a-1} + 2x = 7$; ④ $\sqrt{x-1} - 7 = 0$;

⑤ $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 2$; ⑥ $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{3}$. 其中, 是无理方程的有 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据无理方程的定义: 根号下含有未知数(被开方数是含有未知数)的方程, 逐一判断即可得答案.

【详解】 $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$, 根号内不含未知数, 故①不是无理方程,

$x^2 + 5\sqrt{x} + 1 = 0$, 根号内含未知数, 故②是无理方程,

$\sqrt{a-1} + 2x = 7$, 根号内不含未知数, 故③不是无理方程,

$\sqrt{x-1} - 7 = 0$, 根号内含未知数, 故④是无理方程,

$\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 2$, 根号内含未知数, 故⑤是无理方程,

$\frac{1}{x+3} - \frac{x}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{3}$, 根号内不含未知数, 故⑥不是无理方程,

$\therefore$ ②④⑤是无理方程, 共 3 个,

故选: B.

【点睛】 本题考查无理方程, 根号下含有未知数 (被开方数是含有未知数) 的方程, 叫做无理方程; 熟练掌握定义是解题关键.

15. 已知 $\sqrt{3x+2} - \sqrt{5x-4} = 3-x$, 则 $\sqrt{3x+2} + \sqrt{5x-4}$ 的值为 ()

A. $2\sqrt{11}$

B. 2

C. $2\sqrt{11}$ 或 2

D. $\sqrt{11}$ 或 2

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用平方差公式, 建立已知等式和所求式子的关系, 分情况讨论后检验解的合理性, 得到所求式子的可能值.

【详解】 解: 设 $a = \sqrt{3x+2} + \sqrt{5x-4}$, $b = \sqrt{3x+2} - \sqrt{5x-4}$,

$$\therefore ab = (\sqrt{3x+2} - \sqrt{5x-4}) \times (\sqrt{3x+2} + \sqrt{5x-4}) = (3x+2) - (5x-4) = 6-2x = 2(3-x),$$

$$\because \sqrt{3x+2} - \sqrt{5x-4} = 3-x, \therefore b = 3-x,$$

$$\therefore ab = (3-x)a = 2(3-x),$$

$$\therefore (3-x)(a-2) = 0,$$

分两种情况讨论:

$$\text{当 } 3-x=0, \text{ 即 } x=3 \text{ 时, } a = \sqrt{11} + \sqrt{11} = 2\sqrt{11};$$

$$\text{当 } a-2=0, \text{ 即 } a=2 \text{ 时, 联立两式 } \begin{cases} 2 = \sqrt{3x+2} + \sqrt{5x-4} \\ \sqrt{3x+2} - \sqrt{5x-4} = 3-x \end{cases} \text{ 得 } 2\sqrt{3x+2} = 5-x, \sqrt{5x-4} = \frac{x-1}{2},$$

$$\text{两边平方整理得 } x^2 - 22x + 17 = 0,$$

$$\text{解得: } x = 11 - 2\sqrt{26} \text{ 或 } x = 11 + 2\sqrt{26} > 5 \text{ (不满足 } 5-x \geq 0, \text{ 舍去);}$$

$$\therefore x = 11 - 2\sqrt{26} \approx 0.8 < 1, \text{ 则 } \sqrt{5x-4} = \frac{x-1}{2} < 0, \text{ 矛盾, 该解为增根;}$$

$$\therefore \sqrt{3x+2} + \sqrt{5x-4} \text{ 的值为 } 2\sqrt{11}.$$

16. 某河的水流速度为每小时 2 千米, A, B 两地相距 36 千米, 一动力橡皮船从 A 地出发, 逆流而上去 B 地, 出航 1 小时, 机器发生故障, 橡皮船随水向下漂流, 30 分钟后机器修复, 继续向 B 地开去, 但船速比修复前每小时慢了 1 千米, 到达 B 地比预定时间迟了 54 分钟, 则橡皮船在静水中起初的速度为 () 千米/时.

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

【答案】B

【解析】

【分析】设橡皮船在静水中起初的速度为 x 千米/时，根据预定总用时加上迟到时间等于第一阶段逆流航行时间加上第二阶段机器故障时漂流 30 分钟加上第三阶段修复后逆流航行剩余路程的时间建立分式方程求解即可.

【详解】解：设橡皮船在静水中起初的速度为 x 千米/时，

$$\text{由题意得，} \frac{36}{x-2} + \frac{54}{60} = \frac{36 - (x-2) + 0.5 \times 2}{x-3} + 1 + \frac{30}{60},$$

$$\text{解得，} x_1 = 12, x_2 = -7$$

经检验， $x_1 = 12$ ， $x_2 = -7$ 都是原方程的解， $x_1 = 12$ 符合题意， $x_2 = -7$ 不符合题意，

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 12$ ，

$\therefore$ 橡皮船在静水中起初的速度为 12 千米/时.

三、解下列方程（组）（每题 4 分，共 32 分）

17. 解方程： $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】先将方程两边同时平方得到 $2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}+x-3=4x$ ，则 $2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2$ ，再同时平方得到一元二次方程 $4(2x^2-5x-3)=(x+2)^2$ ，解方程并检验即可.

【详解】解： $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

$$\text{两边平方得，} 2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}+x-3=4x$$

$$\text{整理得，} 2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2$$

$$\text{两边平方得，} 4(2x^2-5x-3)=(x+2)^2$$

$$\text{整理得，} 7x^2-24x-16=0$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{4}{7}, x_2 = 4,$$

经检验, $x = -\frac{4}{7}$ 是增根,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 4$.

18. 解方程: $\sqrt{2 + \frac{7}{x-3}} + \sqrt{2 - \frac{14}{2x+1}} = 3$

【答案】 $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{13}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是换元法解无理方程, 可采用换元法使方程简便, 注意无理方程需验根. 应先把根式内整理, 然后用换元法求解.

【详解】 解: 可化为: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} + 2\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = 3$,

设 $\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} = y$, 则: $y + \frac{2}{y} = 3$,

解得: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$,

即: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} = 1$ 或 $\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} = 2$,

解得: $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{13}{2}$.

$\therefore$ 经检验的原方程的解为: $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{13}{2}$.

19. 解方程: $\sqrt{x^2 + 5x - 6} - 3x + \sqrt{3x^2 - 8x + 5} + 3 = 0$

【答案】 $x = 1$ 或 $x = 10$

【解析】

【分析】 先将原方程变形为 $\sqrt{(x+6)(x-1)} - 3(x-1) + \sqrt{(x-1)(3x-5)} = 0$, 再因式分解变形为 $\sqrt{x-1}(\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}) = 0$, 则解方程 $\sqrt{x-1} = 0$ 和 $\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = 0$ 即可.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 + 5x - 6} - 3x + \sqrt{3x^2 - 8x + 5} + 3 = 0$

$$\sqrt{(x+6)(x-1)} - 3(x-1) + \sqrt{(x-1)(3x-5)} = 0$$

$$\sqrt{x-1}(\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}) = 0$$

$\therefore \sqrt{x-1} = 0$, 解得 $x = 1$;

或 $\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = 0$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3x-5} = 3\sqrt{x-1}$$

$$x+6+2\sqrt{(x+6)(3x-5)}+3x-5=9x-9$$

$$2\sqrt{(x+6)(3x-5)}=5x-10$$

$$4(3x^2+13x-30)=25x^2-100x+100$$

$$13x^2-152x+220=0,$$

$$\text{解得 } x_1=10, \quad x_2=\frac{22}{13}$$

经检验, $x=\frac{22}{13}$ 是增根, $x=1$ 、 $x=10$ 是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解为 $x=1$ 或 $x=10$.

$$20. \text{ 解方程: } 4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$$

$$\text{【答案】 } x_1=-\frac{9}{2}, \quad x_2=1$$

【解析】

【分析】根据 $2x\sqrt{3x^2+x}$ 可看成是 $2 \cdot x \cdot \sqrt{3x^2+x}$, 对方程左边进行变形后利用完全平方公式即可求解.

【详解】解: 原方程变形为, $(3x^2+x)+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9$,

$$\therefore \left(\sqrt{3x^2+x}\right)^2+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9,$$

$$\therefore \left(\sqrt{3x^2+x}+x\right)^2=9,$$

$$\therefore \sqrt{3x^2+x}+x=3 \text{ 或 } \sqrt{3x^2+x}+x=-3,$$

$$\text{当 } \sqrt{3x^2+x}+x=3 \text{ 时, 即 } \sqrt{3x^2+x}=3-x,$$

$$\text{两边同时平方得, } 3x^2+x=9-6x+x^2,$$

$$\text{移项、合并同类项得, } 2x^2+7x-9=0,$$

$$\text{因式分解得, } (2x+9)(x-1)=0,$$

$$\therefore 2x+9=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x_1=-\frac{9}{2}, \quad x_2=1,$$

$$\text{检验: } \because \sqrt{3x^2+x}=3-x,$$

$$\therefore 3-x \geq 0,$$

当 $x = -\frac{9}{2}$ 时, $3-x = 3 - \left(-\frac{9}{2}\right) = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} > 0$, 符合题意,

当 $x = 1$ 时, $3-x = 3-1 = 2 > 0$, 符合题意,

$\therefore x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = 1$ 是原方程的解;

当 $\sqrt{3x^2+x}+x=-3$ 时, 即 $\sqrt{3x^2+x}=-3-x$,

两边同时平方得, $3x^2+x=9+6x+x^2$,

移项、合并同类项得, $2x^2-5x-9=0$,

$\therefore a=2$, $b=-5$, $c=-9$,

$\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-9)=97$,

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{4}$,

检验: $\because \sqrt{3x^2+x}=-3-x$,

$\therefore -3-x \geq 0$,

当 $x = \frac{5+\sqrt{97}}{4}$ 时, $-3-x = -3 - \frac{5+\sqrt{97}}{4} = \frac{-17-\sqrt{97}}{4} < 0$, 不符合题意,

当 $x = \frac{5-\sqrt{97}}{4}$ 时, $-3-x = -3 - \frac{5-\sqrt{97}}{4} = \frac{-17+\sqrt{97}}{4} < 0$, 不符合题意,

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{4}$ 是方程的增根;

综上所述, 方程的解为 $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = 1$.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ (x-y)^2 - 4(x-y) + 3 = 0 \end{cases}$$

【答案】 方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

【解析】

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \text{ ①} \\ (x-y)^2 - 4(x-y) + 3 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得 $(x+y)^2 = 9$,

开方得 $x+y=3$ 或 $x+y=-3$,

由②得 $[(x-y)-1][(x-y)-3]=0$,

$\therefore x-y=1$ 或 $x-y=3$,

$\therefore$ 原方程组可化为:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases};$$

综上, 方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$.

22. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{3x}{y} = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{3}{5} \\ y_2=\frac{9}{5} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 设 $\frac{y}{x}=t$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{3x}{y} = 4$ 化为 $t + \frac{3}{t} = 4$, 解该分式方程求出 $t=1$ 或 $t=3$, 再分类讨论求解即可.

【详解】 解: 设 $\frac{y}{x}=t$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{3x}{y} = 4$ 化为 $t + \frac{3}{t} = 4$,

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

解得 $t=1$ 或 $t=3$,

当 $t=1$ 时, $y=x$, 代入 $2x+y=3$, 则 $3x=3$,

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$;

当 $t=3$ 时, $y=3x$, 代入 $2x+y=3$, $5x=3$,

解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{9}{5} \end{cases}$,

经检验, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{9}{5} \end{cases}$ 都是原方程组的解,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=\frac{3}{5} \\ y_2=\frac{9}{5} \end{cases}$.

23. 解方程组: $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \\ 4x^2-5xy+6y^2=30 \end{cases}$

【答案】 方程组的解为 $\begin{cases} x=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$.

【解析】

【详解】 解: $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \text{ ①} \\ 4x^2-5xy+6y^2=30 \text{ ②} \end{cases}$,

① $\times 10$ 得 $10x^2-20xy+30y^2=90$ ③,

② $\times 3$ 得 $12x^2-15xy+18y^2=90$ ④,

④-③ 得 $2x^2+5xy-12y^2=0$,

因式分解得 $(x+4y)(2x-3y)=0$, 则 $x+4y=0$ 或 $2x-3y=0$,

联立 $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \\ x+4y=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$;

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases};$$

$$\text{综上, 方程组的解为} \begin{cases} x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$$24. \text{解方程组: } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 84 \\ x + \sqrt{xy} + y = 14 \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】由②得, $x + y = 14 - \sqrt{xy}$, 两边同时平方整理得 $x^2 + xy + y^2 = 196 - 28\sqrt{xy}$, 再结合①求解得

到 $xy = 16$, 那么 $x + y = 14 - \sqrt{16} = 10$, 再组成二元二次方程组 $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$, 即可求解.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 84 \text{ ①} \\ x + \sqrt{xy} + y = 14 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得, $x + y = 14 - \sqrt{xy}$,

$$\therefore \text{两边同时平方得, } x^2 + 2xy + y^2 = 196 - 28\sqrt{xy} + xy,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 = 196 - 28\sqrt{xy}$$

$$\text{再结合①得, } 196 - 28\sqrt{xy} = 84$$

$$\therefore xy = 16,$$

$$\therefore x + y = 14 - \sqrt{16} = 10,$$

$$\therefore \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 10 \end{cases},$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = 8$$

$$\therefore y_1 = 8, y_2 = 2,$$

经检验, $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ 都是原方程组的解,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases}$.

四、解答题 (25 题 7 分, 26 题 6 分, 27 题 7 分, 28 题 8 分, 共 28 分)

25. 已知方程组 $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = 3x + m \end{cases}$ 有两组实数解 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$, 且 $x_1 \neq x_2$, $x_1 \cdot x_2 \neq 0$, 设 $n = -\frac{3}{x_1} - \frac{3}{x_2}$.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 用含 m 的代数式表示 n ;

(3) 是否存在这样的 m 的值, 使 n 的值为 -3 ? 如果存在, 求出这样的 m 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) m 的取值范围为 $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$;

$$(2) \quad n = \frac{18(m-1)}{m^2};$$

(3) 存在这样的 m 的值, $m = -3 - \sqrt{15}$.

【解析】

【分析】 (1) 把②代入①消去 y , 得到关于 x 的一元二次方程, 方程有两个实数解, 且 $x_1 \neq x_2$, $x_1 \cdot x_2 \neq 0$, 则 $\Delta > 0$, 解不等式即可;

(2) 根据 (1) 中的方程, 由根与系数关系变形即可;

(3) 将 $n = -3$ 代入 (2) 中的等式, 求出符合题意的 m 的值即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \begin{cases} y^2 = 6x \text{ ①} \\ y = 3x + m \text{ ②} \end{cases}, \text{ 把②代入①, 得 } 9x^2 + 6(m-1)x + m^2 = 0,$$

$\therefore$ 方程有两个实数解, 且 $x_1 \neq x_2$, $x_1 \cdot x_2 \neq 0$,

$$\therefore \Delta = (6m-6)^2 - 4 \times 9 \times m^2 > 0,$$

$$\text{解得 } m < \frac{1}{2},$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{9} \neq 0,$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$\therefore m$ 的取值范围为 $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$;

【小问 2 详解】

解: 由 $9x^2 + 6(m-1)x + m^2 = 0$,

$$\text{得 } x_1 + x_2 = -\frac{6m-6}{9} = \frac{2-2m}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{9},$$

$$n = -\frac{3}{x_1} - \frac{3}{x_2} = -3 \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \right),$$

$$\therefore n = -3 \times \frac{\frac{2-2m}{3}}{\frac{m^2}{9}} = -3 \times \frac{2-2m}{3} \times \frac{9}{m^2} = -\frac{18(1-m)}{m^2} = \frac{18(m-1)}{m^2};$$

【小问 3 详解】

解: 令 $n = -3$, 则 $\frac{18(m-1)}{m^2} = -3$,

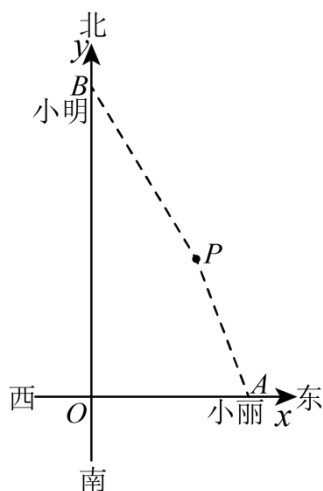
整理得 $m^2 + 6m - 6 = 0$,

$$\text{解得 } m = \frac{-6 \pm \sqrt{36+24}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{2} = -3 \pm \sqrt{15},$$

$\therefore m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$,

$$\therefore m = -3 - \sqrt{15}.$$

26. 如图, x 轴表示一条东西方向的道路, y 轴表示一条南北方向的道路. 小丽和小明分别从十字路口 O 点处同时出发, 小丽沿着 x 轴以 3 千米/时的速度由西向东前进, 小明沿着 y 轴以 6 千米/时的速度由南向北前进. 有一家超市位于图中的 P 点处, 超市与 x 轴、 y 轴的距离分别是 4 千米和 3 千米. 问:



- (1) 离开路口后经过多少时间，两人与这家超市的距离恰好相等？
 (2) 离开路口后经过多少时间，两人与这家超市所处的位置恰好是一条直线上？

【答案】(1) $\frac{10}{9}h$

(2) $\frac{5}{3}h$

【解析】

【分析】(1) 设运动时间为 th ，可求出小明所在位置的坐标为 $(0, 6t)$ ，小丽所在位置的坐标为 $(3t, 0)$ ，利用两点间的距离公式建立方程求解即可；

(2) 求出经过点 $(0, 6t)$ 和点 $(3t, 0)$ 的直线解析式，再把点 P 的坐标代入该解析式，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：设运动时间为 th ，则小明运动的距离为 $6tkm$ ，小丽运动的路程为 $3tkm$ ，

$\therefore$ 小明所在位置的坐标为 $(0, 6t)$ ，小丽所在位置的坐标为 $(3t, 0)$ ；

$\therefore$ 超市与 x 轴、 y 轴的距离分别是 4 千米和 3 千米，

$\therefore P(3, 4)$ ，

$\therefore$ 两人与这家超市的距离恰好相等，

$\therefore$ 点 P 到点 $(0, 6t)$ 的距离等于点 P 到点 $(3t, 0)$ 的距离，

$$\therefore (0-3)^2 + (6t-4)^2 = (3t-3)^2 + (0-4)^2,$$

解得 $t = \frac{10}{9}$ 或 $t = 0$ (舍去)，

答：离开路口后经过 $\frac{10}{9}h$ ，两人与这家超市的距离恰好相等；

【小问 2 详解】

解：设运动时间为 th ，则小明运动的距离为 $6tkm$ ，小丽运动的路程为 $3tkm$ ，

$\therefore$ 小明所在位置的坐标为 $(0, 6t)$ ，小丽所在位置的坐标为 $(3t, 0)$ ；

设经过点 $(0, 6t)$ 和点 $(3t, 0)$ 的直线解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3tk + b = 0 \\ b = 6t \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 6t \end{cases},$$

∴ 经过点 $(0, 6t)$ 和点 $(3t, 0)$ 的直线解析式为 $y = -2x + 6t$,

∴ 两人与这家超市所处的位置恰好在一条直线上,

∴ 点 $P(3, 4)$ 在直线 $y = -2x + 6t$ 上,

∴ $4 = -2 \times 3 + 6t$,

解得 $t = \frac{5}{3}$,

答: 离开路口后经过 $\frac{5}{3}h$, 两人与这家超市所处的位置恰好在一条直线上.

27. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + ay^2 - 2ay + a - 2 = 0 \end{cases}$ 恰有两组不同的实数解, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $0 \leq a < 2$ 或 $a = -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 将原方程组化为 $ay^2 + (1 - 2a)y + a - 2 = 0$, 然后分 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 讨论, 当 $a \neq 0$ 时, 则该一元二次方程的根为一个正根、一个负根或两个相等的正实数根, 才能使得方程组恰有两组不同的实数解, 据此求解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \textcircled{1} \\ x^2 + ay^2 - 2ay + a - 2 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$

由①得 $y = x^2$,

将 $y = x^2$ 代入②得, $y + ay^2 - 2ay + a - 2 = 0$,

整理得, $ay^2 + (1 - 2a)y + a - 2 = 0$,

当 $a = 0$ 时, $y - 2 = 0$, 解得 $y = 2$,

此时 $x = \pm\sqrt{2}$, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 则该一元二次方程的根为一个正根、一个负根或两个相等的正实数根, 才能使得方程组恰有两组不同的实数解,

当该一元二次方程的根为一个正根、一个负根时, 由一元二次方程根与系数的关系得到, $y_1 \times y_2 = \frac{a-2}{a} < 0$,

则 $\begin{cases} a > 0 \\ a - 2 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ a - 2 > 0 \end{cases}$

∴ $0 < a < 2$;

当该一元二次方程有两个相等的正实数根时, $\Delta = (1-2a)^2 - 4a(a-2) = 0$,

解得 $a = -\frac{1}{4}$,

$$\therefore -\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{9}{4} = 0,$$

解得 $y_1 = y_2 = 3 > 0$, 符合题意;

综上, 实数 a 的取值范围为 $0 \leq a < 2$ 或 $a = -\frac{1}{4}$.

28. “程, 课程也, 二物者二程, 三物者三程, 皆如物数程之, 并列为行, 故谓之方程.” 这是我国古代著名数学家刘徽在《九章算术》对方程一词给出的注释. 对于一些特殊的方程, 我们给出两个定义: ①若两个方程有相同的一个解, 则称这两个方程为“相似方程”; ②若两个方程有相同的整数解, 则称这两个方程为“相伴方程”.

(1) 判断分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1}$ 是否是“相似方程”, 并说明理由;

(2) 已知关于 x, y 的方程: $4x^2 - 9y^2 = 28$ 和 $2x - 3y = 4$, 它们是“相似方程”吗? 如果是, 请写出它们的公共解; 如果不是, 请说明理由;

(3) 已知关于 x, y 的二元一次方程: $y = (k+1)x - 4$ 和 $y = x - 3k$ (其中 k 为常数) 是“相伴方程”, 求 k 的值.

【答案】 (1) 分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1}$ 是“相似方程”, 理由见解析;

(2) $4x^2 - 9y^2 = 28$ 和 $2x - 3y = 4$, 它们是“相似方程”, 公共解为 $\begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

(3) $k = \pm 1$ 或 $k = \pm 2$ 或 $k = \pm 4$

【解析】

【分析】 (1) 分别求出分式方程和无理方程的解, 然后根据“相似方程”的定义进行判断即可;

(2) 联立两个方程, 求出它们的公共解, 如果只有唯一解, 即说明两个方程是“相似方程”, 如果没有唯一解则说明两个方程不是“相似方程”;

(3) 联立两个方程得到 $kx = 4 - 3k$, 再分当 $k = 0$ 时, 当 $k \neq 0$ 时, 两种情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解：分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1}$ 是“相似方程”，理由如下：

$$\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$$

两边用时乘以 $(1-x)(1+x)$ 得： $1+x+(1+x)(1-x) = 2(1-x)$ ，

$$\therefore 1+x+1-x^2 = 2-2x,$$

$$\therefore x^2 - 3x = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = 3,$$

经检验 $x = 0$ 和 $x = 3$ 都是原方程的解；

$$\because \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1},$$

$$\therefore x^2 - 2 = 2x + 1,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0,$$

解得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，

$$\therefore \text{分式方程 } \frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x} \text{ 与无理方程 } \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1} \text{ 有一个相同的解,}$$

$$\therefore \text{分式方程 } \frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x} \text{ 与无理方程 } \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2x+1} \text{ 是“相似方程”；}$$

【小问 2 详解】

$$\text{解： 联立 } \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 28 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \text{ 得： } (4+3y)^2 - 9y^2 = 28,$$

$$\therefore 16 + 24y + 9y^2 - 9y^2 = 28,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = \frac{11}{4},$$

$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{方程 } 4x^2 - 9y^2 = 28 \text{ 和方程 } 2x - 3y = 4 \text{ 有一个公共解 } \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore 4x^2 - 9y^2 = 28 \text{ 和 } 2x - 3y = 4, \text{ 它们是“相似方程”, 公共解为 } \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【小问3 详解】

解: $\because$ 关于 x, y 的二元一次方程: $y = (k+1)x - 4$ 和 $y = x - 3k$ (其中 k 为常数) 是“相伴方程”,

$$\therefore (k+1)x - 4 = x - 3k,$$

$$\therefore kx = 4 - 3k,$$

当 $k = 0$ 时, 即 $0 = 4$ 不符合题意;

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时, 则 } x = \frac{4-3k}{k} = \frac{4}{k} - 3,$$

$\because x, y$ 都是整数,

$$\therefore k = \pm 1 \text{ 或 } k = \pm 2 \text{ 或 } k = \pm 4$$

【点睛】 本题主要考查了解分式方程, 解无理方程, 解二元二次方程, 解二元一次方程组等等, 正确理解题意是解题的关键.