

初二数学

(时间 100 分钟)

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{2x} + 1$ B. $y = x^2 + 1$ C. $y = 2x + 1$ D. $y = kx + b$ (k, b 是常数)

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的概念, 熟知形如 $y = kx + b$ (k, b 是常数, 且 $k \neq 0$) 叫一次函数是解题的关键. 根据一次函数的定义逐项判断即得答案.

【详解】解: A、 $y = \frac{1}{2x} + 1$ 不是一次函数, 故本选项不符合题意;

B、 $y = x^2 + 1$ 不是一次函数, 故本选项不符合题意;

C、 $y = 2x + 1$ 是一次函数, 故本选项符合题意;

D、 $y = kx + b$ (k, b 是常数), 当 $k = 0$ 时不是一次函数, 故本选项不符合题意.

故选: C.

2. 一次函数 $y = x - 1$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象与性质, 利用一次函数的图象与性质即可确定直线经过的象限, 掌握一次函数的图象与性质是解题的关键.

【详解】解: $\because y = x - 1$,

$\therefore k = 1 > 0, b = -1 < 0$,

$\therefore$ 直线经过第一、三、四象限, 图象不经过第二象限,

故选: B.

3. 点 P ($x+1, x-1$) 不可能在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【详解】考点：点的坐标.

分析：根据四个象限点的坐标的特点，列不等式组，求无解的一组并确定象限即可.

解答：解：点所在的象限分为四种情况：

点的第一象限时， $x+1>0, x-1>0$ ，解得 $x>-1$ ；

点的第二象限时， $x+1<0, x-1>0$ ，解得 x 无解；

点的第三象限时， $x+1<0, x-1<0$ ，解得 $x<-1$ ；

点的第四象限时， $x+1>0, x-1<0$ ，解得 $-1<x<1$.

故点不可能在第二象限.

故选 B.

点评：解决本题的关键是掌握好四个象限的点的坐标的特征：第一象限正正，第二象限负正，第三象限负负，第四象限正负.

4. 在下列判断中正确的是 ()

A. 一组对边平行且有一组邻边相等的四边形是平行四边形

B. 一组对角相等，一组对边相等的四边形是平行四边形

C. 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

D. 多边形的内角中至多有 3 个锐角

【答案】D

【解析】

【详解】解：对于选项 A，一组对边平行且有一组邻边相等的四边形可能是腰与上底相等的梯形，不是平行四边形，因此 A 错误；

对于选项 B，存在满足一组对角相等、一组对边相等但不是平行四边形的四边形，因此 B 错误；

对于选项 C，两条对角线互相垂直平分且相等的四边形才是正方形，仅垂直相等不满足条件，例如对角线垂直相等但不互相平分的四边形不是正方形，因此 C 错误；

对于选项 D， $\because$ 任意多边形的外角和为 360° ，若内角为锐角，则其对应的外角为钝角，

若多边形内角有 4 个锐角，则对应外角有 4 个钝角，则外角和大于 $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ ，与外角和为 360° 矛盾，

$\therefore$ 多边形内角中至多有 3 个锐角，D 正确.

5. 已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且互相平分. 那么下列条件中不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是 ()

A. $\angle ABC = 90^\circ$

B. $AC = BD$

C. $AC \perp BD$

D. $\angle OBC = \angle OCB$

【答案】C

【解析】

【分析】由对角线互相平分可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再根据矩形的判定定理逐一判断各选项即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交且互相平分，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

选项 A, $\angle ABC = 90^\circ$ ，根据有一个角是直角的平行四边形是矩形，可判定四边形 $ABCD$ 为矩形，不符合题意；

选项 B, $AC = BD$ ，根据对角线相等的平行四边形是矩形，可判定四边形 $ABCD$ 为矩形，不符合题意；

选项 C, $AC \perp BD$ 时，对角线互相垂直的平行四边形是菱形，不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形，符合题意；

选项 D, $\angle OBC = \angle OCB$ ， $OB = OC$ ， $\because$ 平行四边形对角线互相平分，可得 $AC = 2OC$ ， $BD = 2OB$ ， $\therefore AC = BD$ ，可推出平行四边形 $ABCD$ 是矩形，不符合题意.

综上，答案选 C.

6. 如果四边形对角线互相垂直，则顺次连接这个四边形各边中点所得的四边形是 ()

A. 平行四边形

B. 矩形

C. 菱形

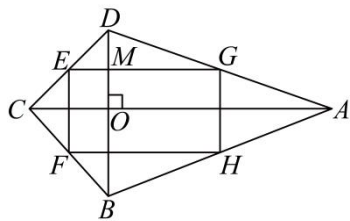
D. 正方形

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了中点四边形，矩形的判定，三角形的中位线定理等，根据题意作出图形是解题的关键；利用三角形的中位线定理推出 $EG \parallel AC$ ， $FH \parallel AC$ ， $EF \parallel BD$ ， $GH \parallel BD$ ，进一步可证四边形 $EFHG$ 是平行四边形，再利用平行线的性质和 $\angle AOD = 90^\circ$ 推出 $\angle FEG = 90^\circ$ ，可证平行四边形 $EFHG$ 是矩形.

【详解】如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ ，则 $\angle AOD = 90^\circ$ ，



$\because E, G$ 分别为 CD, AD 的中点，

$\therefore EG$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$\therefore EG \parallel AC$ ，

同理得， $FH \parallel AC$ ， $EF \parallel BD$ ， $GH \parallel BD$ ，

$\therefore EG \parallel AC$ ， $FH \parallel AC$ ，

$$\therefore EG \parallel FH,$$

同理可求 $EF \parallel GH$,

$\therefore$ 四边形 $EFHG$ 是平行四边形,

$$\because EG \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EMO = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\because EF \parallel BD,$$

$$\therefore \angle FEG = 180^\circ - \angle EMO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $EFHG$ 是矩形.

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果函数 $y = (m-1)x^{m^2-3}$ 是正比例函数, 且其图像经过第二、四象限, 那么 m 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【详解】解: $\because y = (m-1)x^{m^2-3}$ 是正比例函数, 且图像在第二、四象限内,

$$\therefore m-1 < 0 \text{ 且 } m^2-3=1,$$

$$\therefore m = -2.$$

8. 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【详解】根据题意得: $x+1 \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得: $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】考点: 函数自变量的取值范围.

9. 直线 $y = 3x - 2$ 沿 y 轴正方向向上平移 3 个单位后的函数表达式是_____.

【答案】 $y = 3x + 1$

【解析】

【分析】根据“上加下减”的平移规律即可求解.

【详解】解：直线 $y = 3x - 2$ 沿 y 轴正方向向上平移 3 个单位后的函数表达式是 $y = 3x - 2 + 3$ ，即 $y = 3x + 1$ 。

故答案为： $y = 3x + 1$ 。

【点睛】本题考查一次函数图象的平移，熟练掌握一次函数图象平移规律“左加右减，上加下减”是解题的关键。

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{6} \cdot x$ ，则 $f(\sqrt{3}) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】把 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \sqrt{6} \cdot x$ ，然后进行求值，即可。

【详解】解： $\because f(x) = \sqrt{6} \cdot x$

$$\therefore f(\sqrt{3}) = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}.$$

故答案为： $3\sqrt{2}$ 。

【点睛】本题主要考查了函数值的求法，解题的关键是正确代入数值，正确进行实数的计算。

11. 已知直角坐标平面上点 $P(3, -2)$ 和 $Q(-1, 6)$ ，则 $PQ = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据两点间距离公式代入坐标计算即可。

【详解】解： $\because P(3, -2)$ 和 $Q(-1, 6)$ ，

$$\therefore PQ = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

12. 通过画出多边形的对角线，可以把多边形内角和问题转化为三角形内角和问题。如果从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条，那么该多边形的内角和是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。

【答案】 540

【解析】

【详解】【分析】利根据题意得到 2 条对角线将多边形分割为 3 个三角形，然后根据三角形内角和可计算出该多边形的内角和。

【详解】从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条，则将多边形分割为 3 个三角形。

所以该多边形的内角和是 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ ，

故答案为 540.

【点睛】 本题考查了多边形的内角和与对角线, 熟知 n 边形从一个顶点出发的对角线将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形是关键. 这里体现了转化的数学思想.

13. 在 $\square ABCD$ 中, 如果 $\angle A = 45^\circ$, 那么 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【答案】 135

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质. 解题思路是利用平行四边形对边平行的性质, 结合平行线的性质求解即可.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 135^\circ.$$

14. 已知点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 的中点, 如果 $BC = 10\sqrt{2}$, 那么 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据题意可知 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 利用三角形中位线的性质即可求解.

【详解】 解: 由题意知, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because BC = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore DE = 5\sqrt{2}.$$

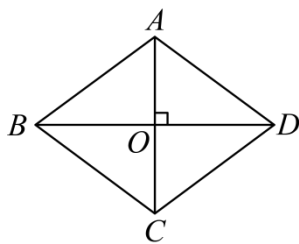
15. 如果菱形的两条对角线长分别为 10cm 和 24cm, 那么这个菱形的周长是 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm.

【答案】 52

【解析】

【分析】 由菱形的性质可得 $AC \perp DB$, $AB = BC = AD = DC$, $AO = 5\text{cm}$, $BO = 12\text{cm}$, 由勾股定理求出 AB , 即可求解.

【详解】 解: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = 10\text{cm}$, $BD = 24\text{cm}$



$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 5\text{cm}, \quad BO = \frac{1}{2}BD = 12\text{cm}, \quad AC \perp DB, \quad AB = BC = AD = DC,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13\text{cm},$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的周长} = 4AB = 52\text{cm}.$$

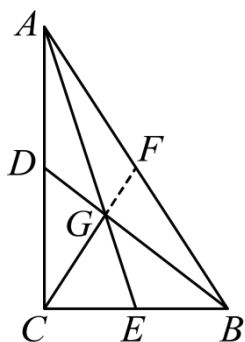
16. 已知: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 中线 BD 和 AE 交于点 G , $AB = 8$, 则 CG 的长为_____.

【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】取 AB 的中点为 F , 连接 CF , 由题意可知 G 为 ABC 的重心, 则 G 在斜边 AB 的中线 CF 上, 利用直角三角形斜边中线的性质得到 CF 的长度, 再结合三角形中线将三角形分为面积相等的两部分, 推出 $CG = 2FG$, 即可求得 CG .

【详解】解: 如图, 取 AB 的中点为 F , 连接 CF ,



$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 中线 AE 和 BD 交于点 G ,

$\therefore G$ 是 ABC 的重心,

$\therefore G$ 在斜边 AB 的中线 CF 上,

$\because$ 直角三角形斜边中线等于斜边的一半, $AB = 8$,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB = 4,$$

$\because AF = BF, \quad AD = CD,$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = S_{\triangle BFG}, \quad S_{\triangle CDG} = S_{\triangle ADG}, \quad S_{\triangle CBD} = S_{\triangle ABD},$$

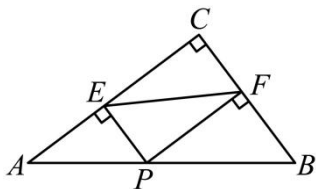
$$\therefore S_{\triangle CBD} - S_{\triangle CDG} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ADG}, \quad S_{\triangle CBG} = 2S_{\triangle BFG},$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABG} = 2S_{\triangle BFG},$$

$$\therefore CG = 2FG,$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}CF = \frac{8}{3}.$$

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 点 P 为斜边 AB 上一动点, 过点 P 作 $PE \perp AC$, $PF \perp BC$, 垂足分别为点 E 、 F , 连接 EF , 则线段 EF 的最小值为_____.



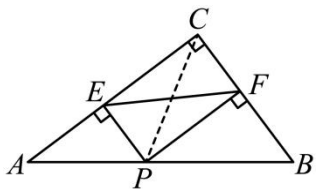
【答案】 2.4

【解析】

【分析】 连接 PC , 当 $CP \perp AB$ 时, PC 最小, 利用三角形面积解答即可.

本题主要考查的是矩形的判定与性质, 关键是根据矩形的性质和三角形的面积公式解答.

【详解】 解: 解: 连接 PC ,



$$\because PE \perp AC, PF \perp BC,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle PFC = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ECFP$ 是矩形,

$$\therefore EF = PC,$$

$\therefore$ 当 PC 最小时, EF 也最小,

即当 $CP \perp AB$ 时, PC 最小,

$$\because AC = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

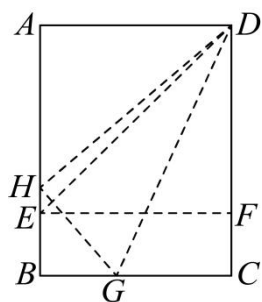
$$\therefore PC \text{ 的最小值为: } \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$$

$\therefore$ 线段 EF 长的最小值为 2.4,

故答案为: 2.4.

18. 折叠矩形纸片 $ABCD$ 时, 发现可以进行如下操作: ①把 $\triangle ADE$ 翻折, 点 A 落在 DC 边上的点 F 处,

折痕为 DE ，点 E 在 AB 边上；②把纸片展开并铺平；③把 $\triangle CDG$ 翻折，点 C 落在线段 AE 上的点 H 处，折痕为 DG ，点 G 在 BC 边上，若 $AB = AD + 2$ ， $EH = 1$ ，则 $AD =$ _____.



【答案】 $3+2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质，矩形的性质和勾股定理. 设 $AD = x$ ，则 $AB = x + 2$ ，利用折叠的性质得 $DF = AD$ ， $EA = EF$ ， $\angle DFE = \angle A = 90^\circ$ ，则可判断四边形 $AEFD$ 为正方形，所以 $AE = AD = x$ ，再根据折叠的性质得 $DH = DC = x + 2$ ，当 $AH = AE - HE = x - 1$ ，然后根据勾股定理得到

$x^2 + (x - 1)^2 = (x + 2)^2$ ，再解方程求出 x 即可.

【详解】 解：设 $AD = x$ ，则 $AB = x + 2$ ，

$\because$ 把 $\triangle ADE$ 翻折，点 A 落在 DC 边上的点 F 处，

$\therefore DF = AD$ ， $EA = EF$ ， $\angle DFE = \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为正方形，

$\therefore AE = AD = x$ ，

$\because$ 把 $\triangle CDG$ 翻折，点 C 落在直线 AE 上的点 H 处，折痕为 DG ，点 G 在 BC 边上，

$\therefore DH = DC = x + 2$ ，

$\because HE = 1$ ，

当 $AH = AE - HE = x - 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $\because AD^2 + AH^2 = DH^2$ ，

$\therefore x^2 + (x - 1)^2 = (x + 2)^2$ ，

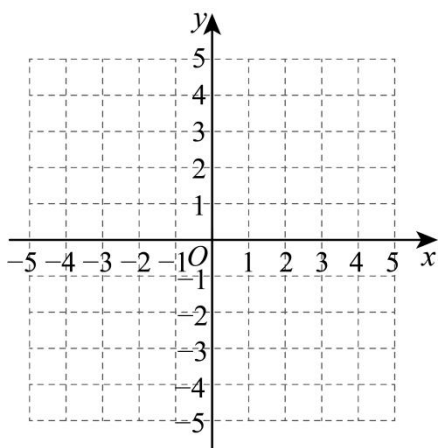
整理得 $x^2 - 6x - 3 = 0$ ，解得 $x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ ， $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ （舍去），

即 AD 的长为 $3 + 2\sqrt{3}$.

故答案为： $3 + 2\sqrt{3}$.

三、(本大题共 4 题，每题 8 分，满分 32 分)

19. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 A 在 y 轴上且坐标可表示为 $(a-2, 3a-6)$, 点 B 的坐标为 $(-2, -1)$.



- (1) $a =$ _____;
- (2) 将点 A 向上平移 3 个单位, 再向左平移 2 个单位得到点 A' , 点 A' 的坐标为 _____;
- (3) 请在图中画出 $\triangle A'AB$, 并求出它的面积.

【答案】 (1) 2 (2) $(-2, 3)$

(3) 作图见解析, 4

【解析】

【分析】 (1) 根据 y 轴上点的横坐标为 0 求解即可;

(2) 根据点的平移规律“上加下减纵坐标, 左减右加横坐标”求解即可;

(3) 由三角形面积公式直接求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 在 y 轴上且坐标可表示为 $(a-2, 3a-6)$

$$\therefore a-2=0,$$

解得 $a=2$,

$$\therefore 3a-6=3\times 2-6=0,$$

$$\therefore A(0, 0);$$

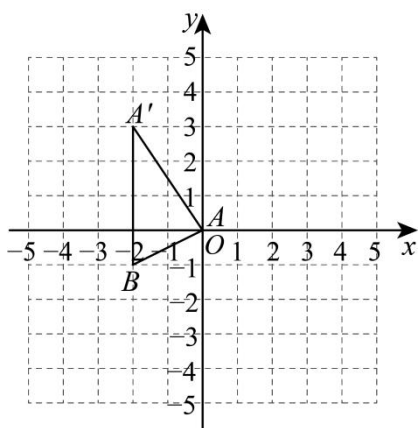
【小问 2 详解】

解: $\because A(0, 0),$

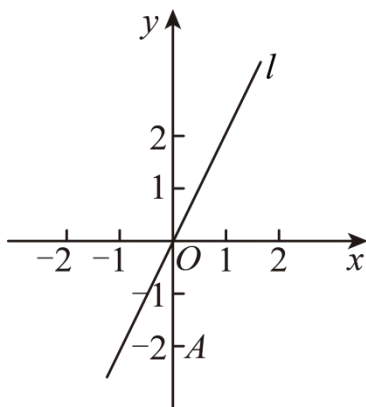
$\therefore$ 将点 A 向上平移 3 个单位, 再向左平移 2 个单位得到点 A' , 点 A' 的坐标为 $(-2, 3)$;

【小问 3 详解】

解: $\triangle A'AB$ 即为所求, $\triangle A'AB = \frac{1}{2} \times [3 - (-1)] \times 2 = 4$



20. 如图, 已知直线 $l_1: y = kx + b$ 经过点 $A(0, -2)$ 、 $B(2, m)$, 且平行于直线 $l: y = 2x$.



(1) 求直线 l_1 的表达式;

(2) 如果直线 l_2 经过点 B , 与 y 轴的正半轴相交于点 C , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求直线 l_2 的表达式.

【答案】 (1) $y = 2x - 2$

(2) $y = -x + 4$

【解析】

【分析】 本题考查了两直线平行问题, 待定系数法求解析式, 能够灵活使用待定系数法是解题的关键.

(1) 根据函数图像平行的性质可知, $k = 2$, 再代入 $A(0, -2)$ 即可求解;

(2) 设直线 l_2 的表达式 $y = k'x + b'$, 则 $C(0, b')$, 根据三角形面积公式即可列式求出 $C(0, 4)$, 再利用待定系数法即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because l_1 \parallel l$,

$\therefore k = 2$,

将 $A(0, -2)$ 代入 $y = 2x + b$ 得,

$$b = -2,$$

则 $y = 2x - 2$;

【小问 2 详解】

解: 设直线 l_2 的表达式 $y = k'x + b'$, 则由题意可知, $C(0, b')(b' > 0)$,

将 $B(2, m)$ 代入 $y = 2x - 2$ 得,

$$m = 2 \times 2 - 2 = 2,$$

即 $B(2, 2)$,

$$\because S_{\triangle ABC} = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times |b' + 2| = 6,$$

解得 $b' = 4$ 或 $b' = -8$ (舍)

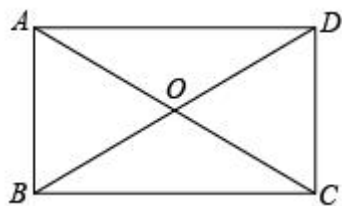
则 $C(0, 4)$,

将 $C(0, 4)$, $B(2, 2)$ 代入 $y = k'x + b'$ 得,

$$\begin{cases} 2 = 2k' + b' \\ 4 = b' \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k' = -1 \\ 4 = b' \end{cases},$$

则直线 l_2 的表达式 $y = -x + 4$.

21. 已知: 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 4$.



(1) 求证: $\angle AOD = 120^\circ$;

(2) 求 AC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $BO = CO$, 据此得 $\angle OBC = \angle OCB$, 再由 $\angle ACB = 30^\circ$ 知 $\angle OBC = 30^\circ$,

结合 $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$ 得 $\angle BOC = 120^\circ$ ，继而得证；

(2) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $\angle ABC = 90^\circ$ ，结合 $\angle ACB = 30^\circ$ 得 $AC = 2AB$ ，根据 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ， $BC = 4$ 可求得 $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，从而得出答案.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AC = BD, AO = CO = \frac{1}{2}AC, BO = DO = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BO = CO,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\because \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC = 120^\circ;$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AC, \text{ 即 } AC = 2AB,$$

$$\because AB^2 + BC^2 = AC^2, BC = 4,$$

$$\text{解得 } AB = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查矩形的性质，矩形的性质：①平行四边形的性质矩形都具有；②角：矩形的四个角都是直角；③边：邻边垂直；④对角线：矩形的对角线相等；⑤矩形是轴对称图形，又是中心对称图形。它有 2 条对称轴，分别是每组对边中点连线所在的直线；对称中心是两条对角线的交点.

22. 解答：

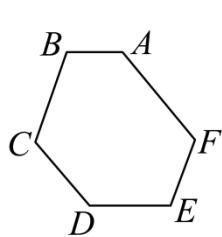


图1

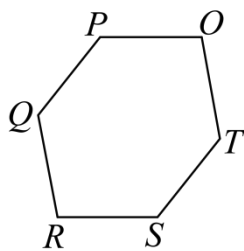


图2

(1) 【新定义 1】如图 1，在凸六边形 $ABCDEF$ 中，满足 $AB \parallel DE$ ， $BC \parallel EF$ ， $CD \parallel FA$ ，我们称这样的凸六边形叫做“平行六边形”。其中 AB 与 DE ， BC 与 EF ， CD 与 FA 叫做“主对边”； $\angle A$ 和 $\angle D$ ， $\angle B$ 和 $\angle E$ ， $\angle C$ 和 $\angle F$ 叫做“主对角”； AD ， BE 、 CF 叫做“主对角线”。

类比平行四边形性质，有如下猜想，请判断正误并在横线上填写“正确”或“错误”。

猜想	判断正误
①平行六边形的三组主对边分别相等	_____
②平行六边形的三组主对角分别相等	_____
③平行六边形的三条主对角线互相平分	_____

(2) 【新定义 2】六条边都相等的平行六边形叫做“菱六边形”。

如图 2，已知平行六边形 $OPQRST$ 满足 $OP = PQ = QR = RS$ 。求证：平行六边形 $OPQRST$ 是菱六边形。

【答案】(1) 错误；正确；错误

(2) 详见解析

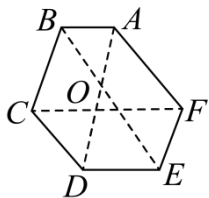
【解析】

【分析】(1) 连接 BE, CF, AD ，根据平行线的性质即可判断；

(2) 先证明 $QRSH$ 为平行四边形，再证明 $HSTO$ 为平行四边形，即可证明是菱六边形。

【小问 1 详解】

解：连接 BE, CF, AD ， BE, AD 交于点 O ，



①由图可得，平行六边形的三组主对边分别相等是错误的；

② $\because AB \parallel DE$

$$\therefore \angle ABE = \angle BED,$$

$\because BC \parallel EF$

$$\therefore \angle CBE = \angle BEF,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle CBE = \angle BED + \angle BEF$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF$$

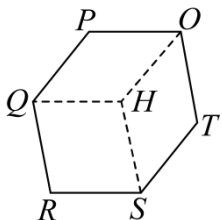
同理可得， $\angle BCD = \angle AFE$ ， $\angle CDE = \angle BAF$

$\therefore$ 平行六边形的三组主对角分别相等是正确的；

③平行六边形的三条主对角线互相平分是错误的；

【小问2详解】

证明：过点Q作QH平行且等于PO，连接OH,HS，



$\therefore$ 平行四边形PQHO是平行四边形，

$$\therefore PQ \parallel OH, \quad PQ = OH,$$

$\therefore$ 在平行六边形OPQRST中， $PQ \parallel ST$

$$\therefore OH \parallel ST;$$

$\therefore$ 在平行六边形OPQRST中， $PO \parallel RS$ ， $PO = RS$ ，

$$\therefore QH \parallel RS, \quad QH = RS,$$

$\therefore$ 四边形QRSH为平行四边形，

$$\therefore QR \parallel HS, \quad QR = HS,$$

$$\therefore QR \parallel OT$$

$$\therefore HS \parallel OT$$

$\therefore$ 四边形 $HSTO$ 为平行四边形,

$$\therefore HS = OT, OH = ST,$$

$$\therefore QR = OT, PQ = ST,$$

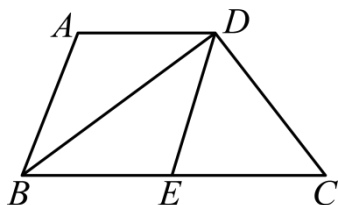
$$\therefore OP = PQ = QR = RS,$$

$$\therefore PQ = QR = RS = ST = OT = PO,$$

$\therefore$ 平行六边形 $OPQRST$ 是菱六边形.

四、(本大题共 2 题, 每题 10 分, 满分 20 分)

23. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC$, E 为 BC 的中点, 联结 ED , BD .



(1) 求证: 四边形 $ABED$ 是平行四边形;

(2) 如果 $\angle ADB + \angle DCB = 90^\circ$, 求证: 四边形 $ABED$ 是菱形.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 此题考查了平行四边形的判定, 菱形的判定等知识. 解题的关键是熟练掌握平行四边形和菱形的判定方法.

(1) 因为 $AD \parallel BC$, 若要四边形 $AECD$ 是平行四边形, 即证明 $AD = BE$ 即可;

(2) 证明 $\triangle BDC$ 是直角三角形, 根据 E 是 BC 的中点, 证明 $DE = BE$, 则可得四边形 $EFDG$ 是菱形.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BE = AD,$$

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形;

【小问 2 详解】

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$,

$\therefore \angle ADB + \angle DCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DBC + \angle DCB = 90^\circ$,

在 $\triangle BDC$ 中, $\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180^\circ$,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BDC$ 是直角三角形,

$\therefore E$ 是 BC 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore DE = BE$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是菱形.

24. 阅读理解并解决问题

【阅读材料】当 $a > 0$ 且 $x > 0$ 时, 因为 $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, 所以 $x - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x} \geq 0$, 从而有 $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ (当 $x = \sqrt{a}$ 时取等号).

记函数 $y = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0, x > 0$), 由上述结论可知: 当 $x = \sqrt{a}$ 时, 该函数有最小值为 $2\sqrt{a}$.

(1) 【知识理解】已知函数 $y_1 = x$ ($x > 0$) 与函数 $y_2 = \frac{8}{x}$ ($x > 0$), 则当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y_1 + y_2$ 取得最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 【解决问题】已知某汽车的一次运输成本包含以下三个部分: 一是固定费用 360 元; 二是燃油费, 每千米为 1.6 元; 三是折旧费, 它与路程的平方成正比, 比例系数为 0.001. 设该汽车运输的路程为 x 千米, 求当 x 为多少时, 该汽车平均每千米的运输成本最低? 最低是多少元?

【答案】(1) $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$

(2) 故 $x = 600$ 千米时, 该汽车平均每千米的运输成本 y 最低, 最低成本为 2.8 元.

【解析】

【分析】(1) 根据题干的结论求解即可;

(2) 设该汽车平均每千米的运输成本为 y 元, 则可得出 $y = 0.001\left(x + \frac{360000}{x}\right) + 1.6$, 然后根据题干的结论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: $y_1 + y_2 = x + \frac{8}{x}$,

当 $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 时, 取得最小值为 $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$;

【小问 2 详解】

解: 设该汽车平均每千米的运输成本为 y 元,

$$\text{则 } y = \frac{0.001x^2 + 1.6x + 360}{x}$$

$$= 0.001x + \frac{360}{x} + 1.6$$

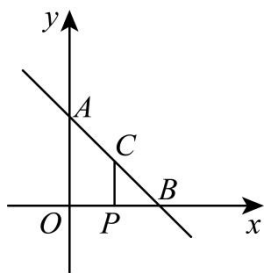
$$= 0.001\left(x + \frac{360000}{x}\right) + 1.6,$$

故 $x = \sqrt{360000} = 600$ 千米时, 该汽车平均每千米的运输成本 y 最低,

最低成本为 $0.001 \times 2 \times \sqrt{360000} + 1.6 = 2.8$ (元).

五、(本大题第 (1) 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分, 满分 12 分)

25. 已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像经过 $A(0, 2)$ 、 $B(2, 0)$, 点 C 是线段 AB 的中点, $CP \parallel OA$ 交 x 轴于点 P , 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' , 把线段 CC' 以点 C 为旋转中心, 顺时针旋转 45° , 点 C' 的对应点为点 D .



(1) 求一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的解析式.

(2) 求点 D 的坐标.

(3) 若点 C 、 C' 、 D 、 M 为顶点的四边形是平行四边形, 且 CC' 是平行四边形的一条边, 直接写出点 M 的坐标.

【答案】(1) $y = -x + 2$

(2) $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

(3) $(1 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$ 或 $(1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$

【解析】

【分析】本题考查一次函数与图形结合的综合问题, 解题的关键是通过题干作出所对应图形求解.

(1) 待定系数法求解.

(2) 作出旋转后的图象, 通过勾股定理求解.

(3) 讨论 D 所在位置分别求解.

【小问 1 详解】

由一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过 $A(0, 2)$ 、 $B(2, 0)$,

$$\begin{cases} b = 2 \\ 2k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为: $y = -x + 2$.

【小问 2 详解】

$\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$\therefore CP \parallel y$ 轴, $CP \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(1, 0)$, 点 C 横坐标为 1, 把 $x = 1$ 代入 $y = -x + 2$ 得 $y = 1$,

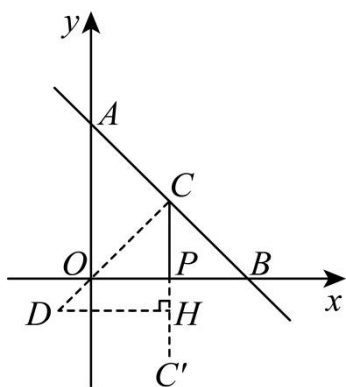
$\therefore$ 点 C 坐标为 $(1, 1)$,

$\because$ 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' ,

$\therefore C'$ 坐标为 $(1, 1)$, $CC' = 2$,

CC' 以点 C 为旋转中心, 顺时针旋转 45° , 得 $\angle DCC' = 45^\circ$, $CD = CC' = 2$,

作 $DH \perp CC'$ 于点 H , $DH = CH$,



$$\therefore DH^2 + CH^2 = CD^2,$$

$$\therefore DH = CH = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}).$$

【小问 3 详解】

$\therefore CC'$ 是平行四边形的一条边,

$$\therefore CC' \parallel DM \text{ 且 } CC' = DM = 2,$$

$\therefore CC' \parallel y$ 轴,

$\therefore DM \parallel y$ 轴,

$$\therefore M \text{ 点的坐标为 } (1-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}) \text{ 或 } (1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}).$$

六、(本大题第 (1) 4 分, 第 (2) 小题 5 分, 第 (3) 小题 5 分, 满分 14 分)

26. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC$.

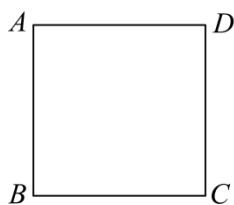


图1

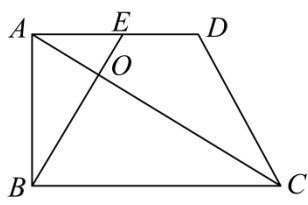


图2

(1) 如图 1, 当 $AB = BC$ 时, 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形;

(2) 连接 AC , 过点 B 作 $BO \perp AC$, 垂足为 O , 延长 BO 交边 AD 或边 CD 于点 E .

①如图 2, 如果点 E 在边 AD 上, 且 $BE = AD$, 求 $\angle AEB$ 的度数;

②如果 $BE = 2\sqrt{2}$, $AC = 3$, 求 AB 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) ① 60° ; ② $\frac{6\sqrt{34}}{17}$ 或 $\sqrt{6}$

【解析】

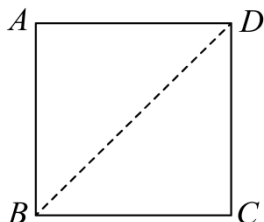
【分析】(1) 根据平行线的性质求出 $\angle A = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)，得出 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，然后证明四边形 $ABCD$ 是矩形，最后根据正方形的判定即可得证；

(2) 过 D 作 $DF \parallel CE$ ，根据平行四边形的判定与性质可得出 $BE = DF$ ，进而得出 $DF = CD$ ，根据等边对等角得出 $\angle DAC = \angle DCA$ ， $\angle DFC = \angle DCF$ ，设 $\angle DAC = \angle DCA = \alpha$ ，根据平行线的性质得出 $\angle ACB = \angle DAC = \alpha$ ， $\angle AEB = \angle CBE$ ， $\angle CBE = \angle CDF$ ，则 $\angle DFC = \angle DCF = 2\alpha$ ，结合 $BE \perp AC$ 得出 $\angle OAE + \angle AEO = 90^\circ$ ，则 $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ ，求出 $\alpha = 30^\circ$ ，即可求解；

②分两种情况讨论：当 E 在边 AD 上，过 A 作 $AM \parallel BE$ 交 CB 于 M ，根据平行四边形的判定与性质得出 $AM = BE = 2\sqrt{2}$ ，证明 $AM \perp AC$ ，根据勾股定理求出 $CM = \sqrt{17}$ ，然后根据等面积法即可求出 AB 的长度；当 E 在 CD 上，此时 $AB > BC$ ，由①知 $\angle OCB = \angle OCE$ ，根据余角的性质得出 $\angle OBC = \angle OEC$ ，根据等角对等边得出 $BC = EC$ ，根据三线合一的性质求出 $BO = \sqrt{2}$ ，根据勾股定理求出 $AB^2 + BC^2 = 9$ ，根据等面积法求出 $AB \cdot BC = 3\sqrt{2}$ ，根据完全平方公式可求出 $(AB + BC)^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$ ， $(AB - BC)^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$ ，则 $AB + BC = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ ， $AB - BC = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

证明：连接 BD ，



$\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle BC = 90^\circ$ ，

$\because AD = DC$ ， $AB = BC$ ， $BD = BD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)，

$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ$ ，

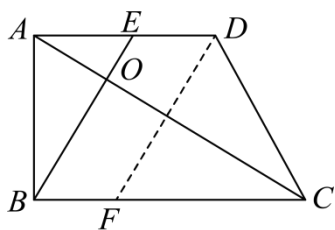
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

又 $AD = DC$ ，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形；

【小问 2 详解】

解：①过 D 作 $DF \parallel CE$ ，



$$\therefore DE \parallel BF,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

$$\therefore BE = DF,$$

$$\text{又 } BE = AD, \quad AD = CD,$$

$$\therefore DF = CD, \quad \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DCF,$$

$$\text{设 } \angle DAC = \angle DCA = \alpha,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC = \alpha, \quad \angle AEB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DCF = \angle ACD + \angle ACF = 2\alpha,$$

$$\therefore DF \parallel BE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDF = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle AEB = 2\alpha,$$

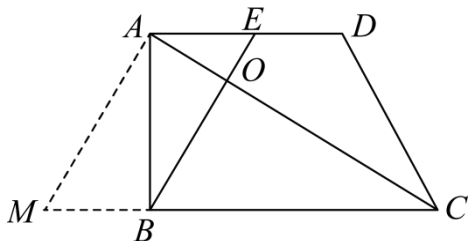
$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle OAE + \angle AEO = 90^\circ, \quad \text{即 } \alpha + 2\alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 60^\circ;$$

②当 E 在边 AD 上, 过 A 作 $AM \parallel BE$ 交 CB 的延长线于点 M ,



$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore AM \perp AC,$$

$$\therefore AM \parallel BE, \quad AE \parallel BM,$$

$\therefore$ 四边形 $AMBE$ 是平行四边形,

$$\therefore AM = BE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又 } AC = 3,$$

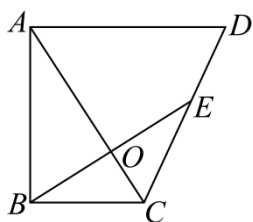
$$\therefore CM = \sqrt{AM^2 + AC^2} = \sqrt{17},$$

$$\therefore S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot AC = \frac{1}{2} CM \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} AB,$$

$$\therefore AB = \frac{6\sqrt{34}}{17},$$

当 E 在 CD 上, 此时 $AB > BC$,



$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle OBC = 90^\circ, \quad \angle OCE + \angle OEC = 90^\circ,$$

由①知 $\angle OCB = \angle OCE$,

$$\therefore \angle OBC = \angle OEC,$$

$$\therefore BC = EC,$$

$$\therefore BO = EO = \frac{1}{2} BE = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AC = 3,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2 = 9, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2},$$

$$\therefore AB \cdot BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore (AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC = 9 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2,$$

$$(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC = 9 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2,$$

$$\therefore AB + BC = \sqrt{6} + \sqrt{3}, \quad AB - BC = \sqrt{6} - \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{6},$$

综上, AB 的长为 $\frac{6\sqrt{34}}{17}$ 或 $\sqrt{6}$.

