

2025-2026 学年第二学期八年级数学综合练习

一、选择题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 一个多边形的内角和是 900° ，则这个多边形的边数是（ ）

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查多边形内角和，掌握多边形内角和公式是解答本题的关键.

根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，列式求解即可.

【详解】解：设这个多边形是 n 边形，根据题意得，

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ,$$

解得 $n = 7$.

故选：D

2. 已知 $P(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点为 $Q(a, -3)$ ，则 a 的值是（ ）

- A. 1 B. -5 C. 3 D. -2

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了关于 x 轴对称点的坐标特点，关键是掌握点的坐标的变化规律. 根据关于 x 轴对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数，即可求解.

【详解】解： $\because P(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点为 $Q(a, -3)$ ，

$\therefore$ 横坐标不变，即 $a = -2$.

故选：D.

3. 已知点 $A(m, n)$ 在第二象限，则点 $B(-n, m-3)$ 在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题先根据第二象限点的坐标特征得到 m 、 n 的取值范围. 再判断点 B 横纵坐标的正负，结合象限坐标特征确定点 B 所在位置.

【详解】解： $\because$ 点 $A(m, n)$ 在第二象限，第二象限点的坐标特征为横坐标小于 0，纵坐标大于 0，

$$\therefore m < 0, \quad n > 0,$$

$$\therefore n > 0,$$

$$\therefore -n < 0,$$

$$\therefore m < 0,$$

$$\therefore m - 3 < 0,$$

$\therefore$ 点 B 的横坐标小于 0, 纵坐标也小于 0,

$\therefore$ 点 B 在第三象限, 故 C 正确.

4. 已知点 $M(3,2)$ 与点 $N(a,b)$ 在同一条平行于 x 轴的直线上, 且 N 到 y 轴的距离等于 4, 则点 N 的坐标是 ()

- A. $(4,2)$ 或 $(-4,2)$ B. $(4,-2)$ 或 $(-1,-2)$ C. $(4,-2)$ 或 $(-4,-2)$ D. $(4,-2)$ 或 $(-5,-2)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行于 x 轴的直线上的点的纵坐标相等求出 b , 再根据点到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值求出 a , 然后写出点 N 的坐标即可.

【详解】解: $\because$ 点 $M(3,2)$ 与点 $N(a,b)$ 在同一条平行于 x 轴的直线上,

$$\therefore b = 2,$$

$\therefore N$ 到 y 轴的距离等于 4,

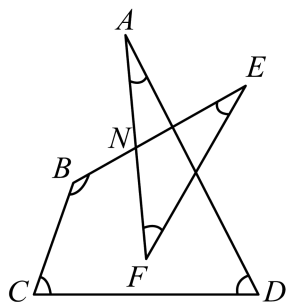
$$\therefore a = \pm 4,$$

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(4,2)$ 或 $(-4,2)$.

故选: A.

【点睛】本题考查了点的坐标, 主要利用了平行于 x 轴的直线上点的坐标特征, 点到 y 轴的距离等于横坐标的绝对值.

5. 如图所示, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数是 ()



A. 180°

B. 270°

C. 360°

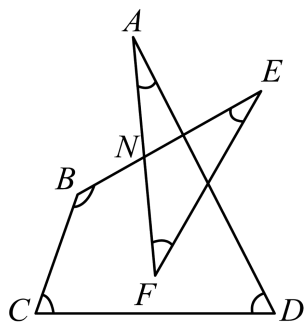
D. 540°

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查三角形外角的性质以及四边形内角和定理，掌握四边形内角和等于 360° ，是解题的关键，根据三角形外角的性质以及四边形内角和等于 360° ，即可求解.

【详解】解：如图，先标注顶点，



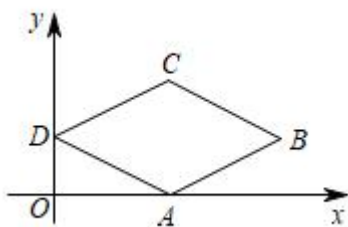
$$\because \angle E + \angle F = \angle ANM, \quad \angle ANM + \angle A = \angle BMD,$$

$$\text{又} \because \angle B + \angle C + \angle D + \angle BMD = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360^\circ,$$

故选：C.

6. 如图，已知在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是菱形，其中点 B 的坐标是 $(4,1)$ ，点 D 的坐标是 $(0,1)$ ，点 A 在 x 轴上，则点 C 的坐标是()



A. $(2,2)$

B. $(2,3)$

C. $(2,2\sqrt{3})$

D. $(2,2\sqrt{5})$

【答案】A

【解析】

【分析】首先连接 AC 、 BD 相交于点 E ，由在菱形 $ABCD$ 中，点 A 在 x 轴上，点 B 的坐标为 $(4,1)$ ，点 D 的坐标为 $(0,1)$ ，可求得点 E 的坐标，继而求得答案.

【详解】解：连接 AC ， BD 相交于点 E ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AE = CE, \quad BE = DE, \quad AC \perp BD,$$

∵ 点 A 在 x 轴上, 点 B 的坐标为 $(4,1)$, 点 D 的坐标为 $(0,1)$,

$$\therefore BD = 4, \quad AE = 1,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BD = 2, \quad AC = 2AE = 2,$$

∴ 点 C 的坐标为: $(2,2)$.

故选: A.

【点睛】 本题考查了菱形的性质以及坐标与图形的性质, 解题的关键是注意菱形的对角线互相平分且垂直.

二、填空题: (每小题 4 分, 共 48 分)

7. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(3,-2)$ 与点 $B(5,4)$ 之间的距离是_____.

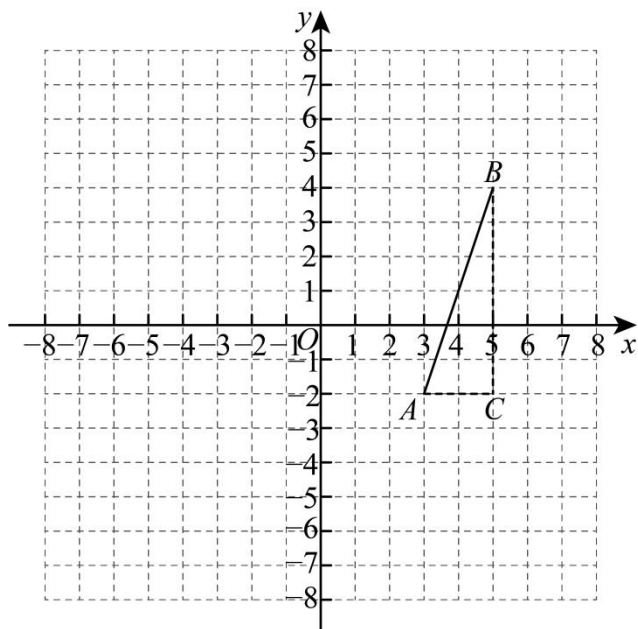
【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查平面直角坐标系中两点的距离, 掌握勾股定理是解题的关键.

取点 $C(5,-2)$, 连接 AC , BC , 构造 $\text{Rt}\triangle ABC$, 然后根据点的坐标与勾股定理即可求解.

【详解】 如图所示, 取点 $C(5,-2)$, 连接 AC , BC ,



$$\therefore A(3,-2), \quad B(5,4),$$

$$\therefore AC = 5 - 3 = 2, \quad BC = 4 - (-2) = 6,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{10}.$$

故答案是： $2\sqrt{10}$.

8. 已知 $\square ABCD$ 的周长为 14, $AB = 3$, 则 BC 的长为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据平行四边形对边相等, 即可求解.

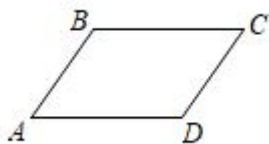
【详解】 解: $\because \square ABCD$ 的周长为 14, $AB = 3$,

$$\therefore AB = CD, AD = BC,$$

$$\therefore 2(AB + BC) = 14,$$

$$\therefore BC = 4,$$

故答案为: 4.



【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 掌握平行四边形的对边相等是解题的关键.

9. 如果将点 $A(1, 3)$ 先向下平移 3 个单位, 再向右平移 2 个单位后, 得到点 B , 那么点 B 的坐标是_____.

【答案】 (3, 0)

【解析】

【分析】 向右平移得到横坐标为 $1+2=3$, 向下平移得到纵坐标为 $3-3=0$, 即可得到点 B 的坐标.

【详解】 由题意得点 B 坐标为 (3,0) .

故填 (3,0) .

【点睛】 此题考查坐标的平移变化, 当点沿 x 轴左右平移时规律是横坐标左减右加, 沿 y 轴上下平移时规律是纵坐标上加下减.

10. 从六边形的一个顶点出发, 可以引_____条对角线, 将六边形分成_____个三角形, 六边形共有_____条对角线.

【答案】 ①.

3 ②.

4 ③.

9

【解析】

【分析】根据多边形对角线的相关规律，先确定从六边形一个顶点出发引出的对角线条数，再推导得到分成三角形的个数，最后计算六边形对角线的总条数.

【详解】解：对于 n 边形，从一个顶点出发，不能向自身以及相邻两个顶点引对角线，因此从一个顶点出发可引出对角线的条数为 $(n-3)$ ，本题中六边形 $n=6$ ，因此引出对角线条数为 $6-3=3$ ，

从一个顶点引出 $(n-3)$ 条对角线后，可将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，因此六边形分成三角形的个数为 $6-2=4$ ，

n 边形对角线总条数公式为 $\frac{n(n-3)}{2}$ ，

将 $n=6$ 代入得： $\frac{6 \times (6-3)}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，将直线 $y=2x+1$ 向下平移 2 个单位长度后，所得直线的解析式是_____.

【答案】 $y=2x-1$ ## $y=-1+2x$

【解析】

【分析】本题主要考查的是一次函数的图象与几何变换，根据直线 $y=kx+b$ 平移 k 值不变，只有 b 发生改变解答即可，熟知“上加下减”的原则是解答此题的关键.

【详解】 $\because$ 直线 $y=2x+1$ 向下平移了 2 个单位长度，

$\therefore$ 由“上加下减”的原则得：平移后的解析式为： $y=2x+1-2$ ，即 $y=2x-1$ ，

故答案为： $y=2x-1$.

12. 已知一次函数 $y=(3-m)x+1$ ，且 y 的值随 x 值的增大而减小，则 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m>3$

【解析】

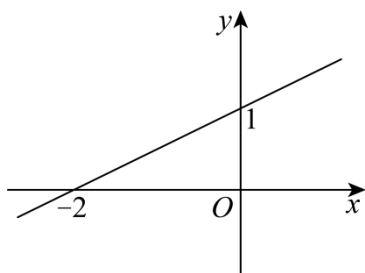
【分析】根据一次函数的性质， y 随 x 的增大而减小时，一次项系数小于 0，据此列出不等式求解即可.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y=(3-m)x+1$ ，且 y 的值随 x 值的增大而减小，

$\therefore 3-m<0$ ，

解得： $m>3$.

13. 已知一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图像如图所示，则不等式 $kx+b>1$ 的解集为_____.



【答案】 $x > 0$

【解析】

【分析】 根据一次函数与坐标轴的交点，数形结合求出不等式的解集即可.

【详解】 解：由图象可知，直线与 y 轴的交点的纵坐标为 1，

当 $x > 0$ 时，函数值 $y > 1$ ，

$\therefore$ 不等式 $kx + b > 1$ 的解集为 $x > 0$.

14. 已知矩形两对角线夹角为 60° ，对角线长为 2cm ，则矩形面积为_____.

【答案】 $\sqrt{3}\text{cm}^2$

【解析】

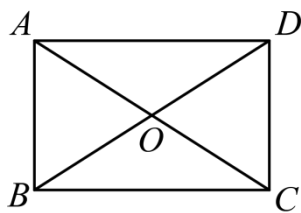
【详解】 分析：作出图形，根据矩形的对角线互相平分且相等求出 $OA=OB$ ，然后求出 $\triangle AOB$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质求出 AB ，再利用勾股定理列式计算即可得解.

详解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore OA=OB=\frac{1}{2} \times 2=1$.

$\because$ 两对角线的夹角 $\angle AOB=60^\circ$ ， $\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形， $\therefore AB=OA=1$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，矩形的

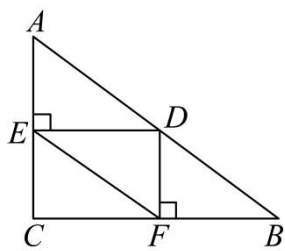
长 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

故答案为 $\sqrt{3}\text{cm}^2$.



点睛：本题考查了矩形的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理，熟记性质是解题的关键，作出图形更形象直观.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3\text{cm}$ ， $BC=4\text{cm}$ ， D 是 AB 上一点， $DE \perp AC$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F ，连接 EF ，则 EF 的最小值为_____ cm .



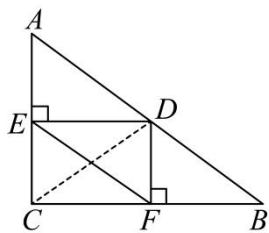
【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定与性质，垂线段最短的性质，勾股定理，判断出 $CD \perp AB$ 时，线段 EF 的值最小是解题的关键.

连接 CD ，利用勾股定理列式求出 AB ，判断出四边形 $CFDE$ 是矩形，根据矩形的对角线相等可得 $EF = CD$ ，再根据垂线段最短可得 $CD \perp AB$ 时，线段 EF 的值最小，然后根据三角形的面积公式列出方程求解即可.

【详解】 解：如图，连接 CD .



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = 3\text{cm}, \quad BC = 4\text{cm},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5\text{cm},$$

$$\because DE \perp AC, \quad DF \perp BC, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是矩形，

$$\therefore EF = CD,$$

由垂线段最短可得 $CD \perp AB$ 时，线段 EF 的值最小，

$$\text{此时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \cdot CD,$$

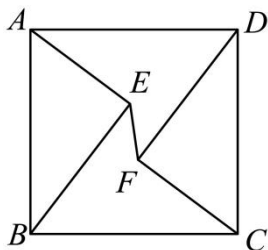
$$\text{解得 } CD = \frac{12}{5}\text{cm},$$

$$\therefore \text{线段 } EF \text{ 的最小值为 } \frac{12}{5}\text{cm}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{12}{5}.$$

16. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AD = 5$ ，点 E, F 是正方形 $ABCD$ 内的两点，且 $AE = FC = 3$ ，

$BE = DF = 4$ ，则 EF 的长为_____.

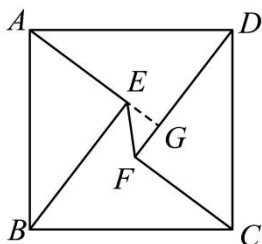


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，余角性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理及其逆定理，延长 AE 交 DF 于 G ，由勾股定理的逆定理可得 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DFC$ 是直角三角形，进而可证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DFC$ (HL)，得到 $BE = DF = 4$ ， $\angle BAE = \angle DCF$ ， $\angle ABE = \angle CDF$ ，利用正方形的性质可证明 $\triangle ABE \cong \triangle DAG$ (ASA)，得到 $BE = AG = 4$ ， $AE = DG = 3$ ， $\angle AEB = \angle DGA = 90^\circ$ ，据此可得 $EG = 1$ ， $FG = 1$ ， $\angle EGF = 90^\circ$ ，利用勾股定理即可求解，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】 解：延长 AE 交 DF 于 G ，如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = CD = AD = 5$ ， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\because AB = 5$ ， $AE = 3$ ， $BE = 4$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 是直角三角形，

同理可得 $\triangle DFC$ 是直角三角形，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中，

$$\begin{cases} AE = CF \\ AB = CD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DFC$ (HL)，

$\therefore BE = DF = 4$ ， $\angle BAE = \angle DCF$ ， $\angle ABE = \angle CDF$ ，

$\because \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$ ， $\angle DAG + \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle DAG$ ，

同理可得 $\angle DCF = \angle ADG$,

$\therefore \angle BAE = \angle ADG$,

又 $\because AB = DA$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAG (\text{ASA})$,

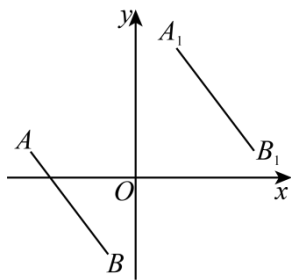
$\therefore BE = AG = 4$, $AE = DG = 3$, $\angle AEB = \angle DGA = 90^\circ$,

$\therefore EG = 4 - 3 = 1$, $FG = 4 - 3 = 1$, $\angle EGF = 90^\circ$,

$\therefore EF = \sqrt{EG^2 + FG^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

故答案为: $\sqrt{2}$.

17. 如图, 点 A 、 B 的坐标分别是 $(-4, 1)$ 、 $(-1, -3)$, 若将线段 AB 平移至 A_1B_1 的位置, A_1 与 B_1 坐标分别是 $(m, 5)$ 和 $(4, n)$, 则线段 AB 在平移过程中扫过的图形面积为_____.



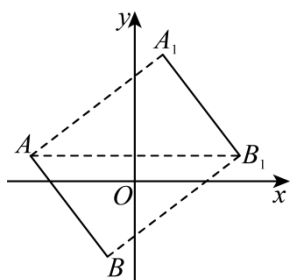
【答案】 32

【解析】

【分析】 本题主要考查坐标与图形变化—平移, 在平面直角坐标系中, 图形的平移与图形上某点的平移相同. 平移中点的变化规律是: 横坐标右移加, 左移减; 纵坐标上移加, 下移减. 直接利用平移中点的变化规律求出 m , n 的值, 再根据线段 AB 在平移过程中扫过的图形面积 = 四边形 ABB_1A_1 的面积 = $2S_{\triangle ABB_1}$ 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-4, 1)$, $(-1, -3)$, 平移后 A_1 与 B_1 坐标分别是 $(m, 5)$ 和 $(4, n)$,
 $\therefore$ 可知将线段 AB 向右平移 5 个单位, 向上平移 4 个单位,
 $\therefore m = -4 + 5 = 1$, $n = -3 + 4 = 1$,
 $\therefore A_1$ 与 B_1 坐标分别是 $(1, 5)$ 和 $(4, 1)$,

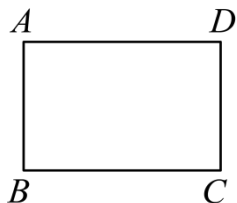
如图:



$\therefore$ 线段 AB 在平移过程中扫过的图形面积 $= 2S_{\triangle ABB_1} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 32$.

故答案为: 32.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, 点 E 在边 AD 上 (点 E 与点 A 、 D 不重合), 将 $\triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折, 点 D 的对应点为点 G , 连接 EG , EG 的延长线交边 BC 于点 F , 如果 $BF = 1$, 那么 DE 的长为_____.

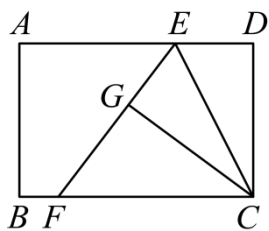


【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质, 矩形的性质, 勾股定理, 等积转换; 由勾股定理得 $FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = 3$, 由三角形的面积得 $\frac{1}{2}EF \cdot CG = \frac{1}{2}CF \cdot CD$, 即可求解; 掌握性质, 能用三角形面积转化求解是解题的关键.

【详解】解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle D = 90^\circ$,

$CD = AB = 4$,

$BC = AD = 6$,

由翻折得: $CG = CD = 4$,

$\angle CGE = \angle D = 90^\circ$,

$EG = DE$,

$$\therefore \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\because BF = 1,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 5,$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 - CG^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}EF \cdot CG = \frac{1}{2}CF \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(3 + EG) \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4,$$

$$\text{解得: } EG = 2,$$

$$\therefore DE = 2,$$

故答案: 2.

三、解答题 (满分 78 分 19-22 题各 10 分, 23-24 题各 12 分, 25 题 14 分)

19. 已知一个正多边形的边数为 n .

(1) 若这个多边形的内角和为其外角和的 4 倍, 求 n 的值.

(2) 若这个正多边形的一个内角为 108° , 求 n 的值.

【答案】 (1) n 的值为 10

(2) n 的值为 5

【解析】

【分析】 (1) 根据多边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$, 多边形的外角和是 360° , 列出方程, 求解即可得出答案;

(2) 先求出正多边形的一个外角为 72° , 再根据多边形的外角和是 360° , 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 依题意, 得 $(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ \times 4$,

解得 $n = 10$,

即 n 的值为 10.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 正多边形的一个内角为 108° ,

$\therefore$ 这个正多边形的一个外角为 72° ,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$$\therefore n = \frac{360}{72} = 5,$$

即 n 的值为 5.

【点睛】 本题考查多边形的内角和与外角和，掌握多边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ ，多边形的外角和是 360° 是解题的关键.

20. 已知点 $A(0, a), B(5, 0)$ ，且直线 AB 与坐标轴围成的图形的面积等于 15，求 a 的值.

【答案】

$$a = \pm 6$$

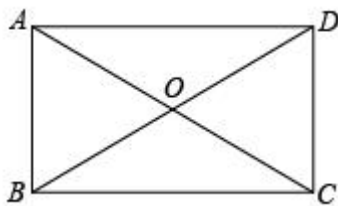
【解析】

【分析】 根据题意，得到围成的图形为直角三角形 AOB ，根据三角形的面积公式进行求解即可.

【详解】 解：由题意，直线 AB 与坐标轴围成的图形的面积为 $\frac{1}{2} \times 5|a| = 15$ ，

$$\therefore a = \pm 6.$$

21. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $BC = 4$.



(1) 求证： $\angle AOD = 120^\circ$ ；

(2) 求 AC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $BO = CO$ ，据此得 $\angle OBC = \angle OCB$ ，再由 $\angle ACB = 30^\circ$ 知 $\angle OBC = 30^\circ$ ，结合 $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$ 得 $\angle BOC = 120^\circ$ ，继而得证；

(2) 由四边形 $ABCD$ 是矩形知 $\angle ABC = 90^\circ$ ，结合 $\angle ACB = 30^\circ$ 得 $AC = 2AB$ ，根据 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ， $BC = 4$ 可求得 $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，从而得出答案.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AC = BD, AO = CO = \frac{1}{2}AC, BO = DO = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BO = CO,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\because \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC = 120^\circ;$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AC, \text{ 即 } AC = 2AB,$$

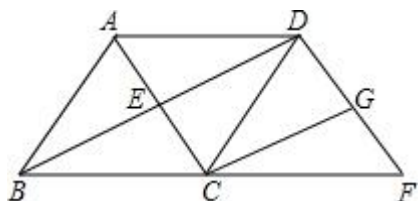
$$\because AB^2 + BC^2 = AC^2, BC = 4,$$

$$\text{解得 } AB = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查矩形的性质，矩形的性质：①平行四边形的性质矩形都具有；②角：矩形的四个角都是直角；③边：邻边垂直；④对角线：矩形的对角线相等；⑤矩形是轴对称图形，又是中心对称图形．它有 2 条对称轴，分别是每组对边中点连线所在的直线；对称中心是两条对角线的交点．

22. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E ，点 F 在 BC 的延长线上，且 $CF=BC$ ，连接 DF ，点 G 是 DF 中点，连接 CG ．求证：四边形 $ECGD$ 是矩形．



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 首先利用中位线定理证得 $CG \parallel BD$ ， $CG = \frac{1}{2}DB$ ，然后根据四边形 $ABCD$ 是菱形得到 $AC \perp BD$ ，

$DE = \frac{1}{2}DB$, 从而得到 $\angle DEC = 90^\circ$, $CG = DE$, 最后利用 $CG \parallel BD$, 得到四边形 $ECGD$ 是矩形.

【详解】证明: $\because CF = BC$,

$\therefore C$ 点是 BF 中点,

$\therefore$ 点 G 是 DF 中点,

$\therefore CG$ 是 $\triangle DBF$ 中位线,

$\therefore CG \parallel BD$, $CG = \frac{1}{2}DB$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $DE = \frac{1}{2}DB$,

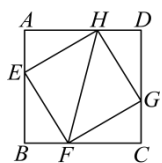
$\therefore \angle DEC = 90^\circ$, $CG = DE$,

$\therefore CG \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $ECGD$ 是矩形.

【点睛】本题考查了矩形的判定、菱形的性质及三角形的中位线定理, 解题的关键是牢记菱形的有关判定的方法, 难度不大.

23. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的一点, 且 $AH = DG = CF = BE$.



(1) 求证: 四边形 $EFGH$ 为正方形;

(2) 若正方形 $EFGH$ 的面积为 4, 连接 FH , 求 FH 的长.

【答案】(1) 证明过程见解析;

(2) FH 的长为 $2\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 由正方形的性质, 结合已知可证明 $\triangle HAE \cong \triangle EBF \cong \triangle FCG \cong \triangle GDH$, 可得 $HE = EF = FG = GH$, $\angle HEA = \angle EFB = \angle FGC = \angle GHD$, 从而可得 $\angle HEF = \angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ$, 即可证得结论;

(2) 由正方形的 $EFGH$ 面积可得边长, 根据勾股定理计算, 即可得 FH 的长.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = BC = CD = DA$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$,

$\because AH = DG = CF = BE$,
 $\therefore AB - BE = BC - CF = CD - DG = DA - AH$,
 $\therefore AE = BF = CG = DH$,
 $\therefore \triangle HAE \cong \triangle EBF \cong \triangle FCG \cong \triangle GDH$,
 $\therefore HE = EF = FG = GH$, $\angle HEA = \angle EFB$,
 $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,
 $\because \angle B = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HEF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 正方形 $EFGH$ 的面积为 4,

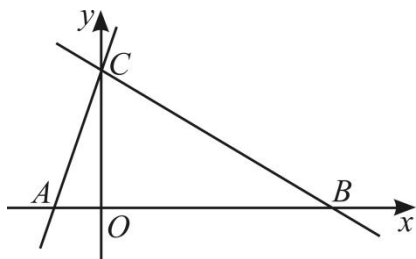
$$\therefore EH = EF = \sqrt{4} = 2, \quad \angle HEF = 90^\circ,$$

$$\therefore FH = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore FH \text{ 的长为 } 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查正方形的判定和性质, 三角形全等的判定和性质, 直角三角形的两个锐角互余, 菱形的判定, 求算术平方根, 勾股定理.

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{3}{5}x + 3$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 经过点 C 的另一条直线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$.



(1) 求点 B 、 C 的坐标和直线 AC 的函数解析式;

(2) 在平面内是否存在点 D , 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是以 AB 为边的平行四边形? 若存在, 求出所有符合条件的点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $B(5, 0)$, $C(0, 3)$, $y = 3x + 3$

(2) $(-6,3)$ 或 $(6,3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数解析式，求一次函数与坐标轴的交点坐标，平行四边形的性质，熟知相关知识是解题的关键.

(1) 在 $y = -\frac{3}{5}x + 3$ 中，求出函数值为 0 时自变量的值，自变量的值为 0 时的函数值即可得到点 B 和点 C 的坐标，再设出直线 AC 的函数解析式，并利用待定系数法求解即可；

(2) 分 AC 为对角线和 AD 为对角线两种情况，根据平行四边形对角线中点坐标相同建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：在 $y = -\frac{3}{5}x + 3$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，当 $y = -\frac{3}{5}x + 3 = 0$ 时， $x = 5$ ，

$\therefore B(5,0)$ ， $C(0,3)$ ，

设直线 AC 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

把 $A(-1,0)$ ， $C(0,3)$ 代入到 $y = kx + b (k \neq 0)$ 中得：
$$\begin{cases} -k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 3 \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 的函数解析式为 $y = 3x + 3$ ；

【小问 2 详解】

解：设 $D(m,n)$ ，

当 AC 为对角线时，由平行四边形对角线互相平分可得， AC ， BD 的中点坐标相同，

$$\therefore \begin{cases} \frac{-1+0}{2} = \frac{m+5}{2} \\ \frac{0+3}{2} = \frac{n+0}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = -6 \\ n = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-6,3)$ ；

当 AD 为对角线时，由平行四边形对角线互相平分可得， AD ， BC 的中点坐标相同，

$$\therefore \begin{cases} \frac{-1+m}{2} = \frac{0+5}{2} \\ \frac{0+n}{2} = \frac{3+0}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m=6 \\ n=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(6,3)$;

综上所述, 点 D 的坐标为 $(-6,3)$ 或 $(6,3)$.

25 综合与实践

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $AE \perp BF$.

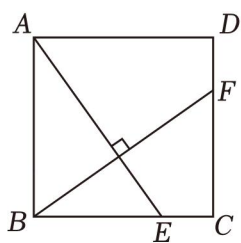


图 1

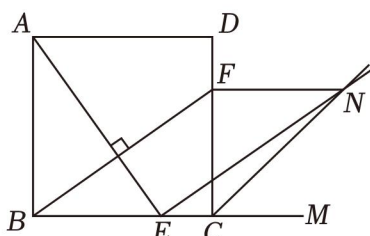


图 2

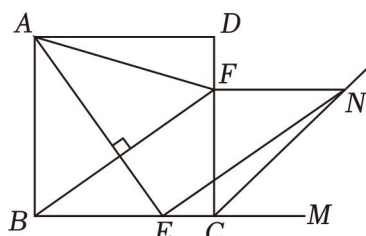


图 3

(1) 求证: $AE = BF$.

(2) 如图 2, 在图 1 的基础上, 过点 E 作 AE 的垂线, 与正方形 $ABCD$ 的外角 $\angle DCM$ 的平分线交于点 N , 连接 FN . 求证: 四边形 $BENF$ 是平行四边形.

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 连接 AF , 若四边形 $BENF$ 的面积是 25, $AB = 7$, 请直接写出 AF 的长度.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\sqrt{53}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 垂直的性质, 全等三角形的判定和性质, 等边对等角, 平行线的判定, 平行四边形的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握以上判定和性质是解题的关键.

(1) 根据正方形的性质可得 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = BC$, 推得 $\angle ABF + \angle CBF = 90^\circ$, 根据垂直的性质可得 $\angle ABF + \angle BAE = 90^\circ$, 推得 $\angle CBF = \angle BAE$, 根据全等三角形的判定和性质即可证明;

(2) 在 AB 上截取 $AG = CE$, 连接 EG , 根据题意推得 $BG = BE$, 根据等边对等角可得 $\angle BGE = \angle BEG = 45^\circ$, 推得 $\angle AGE = \angle ECN = 135^\circ$, 根据垂直的性质可得

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle ENC (ASA) ,$$

$$\therefore AE = EN .$$

又由 (1) 可得 $AE = BF$,

$$\therefore BF = EN ,$$

$$\because AE \perp BF ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle EBF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle CEN ,$$

$$\therefore BF \parallel EN ,$$

$\therefore$ 四边形 $BENF$ 是平行四边形.

【小问 3 详解】

解: (3) 解: $\because \triangle ABE \cong \triangle BCF$,

$$\therefore BE = CF ,$$

$\therefore$ 四边形 $BENF$ 的面积是 25,

故 $BE \times CF = 25$,

$$\therefore BE = CF = 5 ,$$

$$\because AB = AD = DC = 7 ,$$

$$\therefore DF = DC - FC = 7 - 5 = 2 ,$$

在 $Rt\triangle ADF$ 中, $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$.