

2025 学年第二学期八年级数学学科 学科素养收集 1

(时间: 90 分钟满分: 100 分)

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列说法正确的是()

- A. 一次函数是正比例函数
- B. 正比例函数是一次函数
- C. 不是正比例函数就一定不是一次函数
- D. 正比例函数不一定是一次函数

【答案】 B

【解析】

【分析】

【详解】 根据一次函数的定义, 易得: 正比例函数是特殊的一次函数.

故选 B

2. 下列函数中, 是 x 的一次函数的是 ()

- A. $y = \frac{3}{x}$
- B. $y = 2x^2 + 3x - 1$
- C. $y = x - 1$
- D. $y = x^2 - 1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 形如 $y = kx + b (k \neq 0)$, 这样的函数叫做一次函数, 据此判断即可.

【详解】 解: A、是反比例函数, 不符合题意;

B、是二次函数, 不符合题意;

C、是一次函数, 符合题意;

D、是二次函数, 不符合题意;

故选 C.

3. 一次函数 $y = -x + 3$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象与性质，熟练掌握一次函数的图象的特点是解题关键．根据一次函数的图象性质即可得到答案．

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = -x + 3$ 中的 $k = -1 < 0$ ， $b = 3 > 0$ ，

$\therefore$ 它的图象经过第一、二、四象限，不经过第三象限，

故选： C．

4. 一次函数 $y = kx - 1$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，当 $x = 2$ 时， y 的值可以是（ ）

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据一次函数的增减性可得 k 的取值范围，再把 $x = 2$ 代入函数 $y = kx - 1$ ，从而判断函数值 y 的取值．

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = kx - 1$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小

$\therefore k < 0$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = 2k - 1 < -1$

故选： D

【点睛】 本题考查一次函数的性质，不等式的性质，熟悉一次函数的性质是解题的关键．

5. 某油箱容量为 60 L 的汽车，加满汽油后行驶了 100 Km 时，油箱中的汽油大约消耗了 $\frac{1}{5}$ ，如果加满汽油后汽车行驶的路程为 x Km，邮箱中剩油量为 y L，则 y 与 x 之间的函数解析式和自变量取值范围分别是（ ）

A. $y = 0.12x$ ， $x > 0$

B. $y = 60 - 0.12x$ ， $x > 0$

C. $y = 0.12x$ ， $0 \leq x \leq 500$

D. $y = 60 - 0.12x$ ， $0 \leq x \leq 500$

【答案】 D

【解析】

【详解】 因为油箱容量为 60 L 的汽车，加满汽油后行驶了 100 Km 时，油箱中的汽油大约消耗了 $\frac{1}{5}$ ，

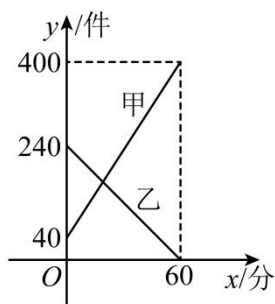
可得： $\frac{1}{5} \times 60 \div 100 = 0.12 \text{ L/km}$ ， $60 \div 0.12 = 500 \text{ (km)}$ ，

所以 y 与 x 之间的函数解析式和自变量取值范围是： $y = 60 - 0.12x$ ， $(0 \leq x \leq 500)$ ， 故选 D．

考点： 根据实际问题列一次函数关系式．

6. 某快递公司每天上午 9： 00 ~ 10： 00 为集中揽件和派件时段，甲仓库用来揽收快件，乙仓库用来派发快

件，该时段内甲、乙两仓库的快件数量 y （件）与时间 x （分）之间的函数图象如图所示，那么当两仓库快递件数相同时，此刻的时间为（ ）



A. 9: 15

B. 9: 20

C. 9: 25

D. 9: 30

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出甲、乙两仓库的快件数量 y （件）与时间 x （分）之间的函数关系式，求出两条直线的交点坐标即可.

【详解】设甲仓库的快件数量 y （件）与时间 x （分）之间的函数关系式为： $y_1 = k_1x + 40$ ，根据题意得 $60k_1 + 40 = 400$ ，解得 $k_1 = 6$ ，

$$\therefore y_1 = 6x + 40;$$

设乙仓库的快件数量 y （件）与时间 x （分）之间的函数关系式为： $y_2 = k_2x + 240$ ，根据题意得 $60k_2 + 240 = 0$ ，解得 $k_2 = -4$ ，

$$\therefore y_2 = -4x + 240,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = 6x + 40 \\ y = -4x + 240 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 20 \\ y = 160 \end{cases},$$

$\therefore$ 此刻的时间为 9: 20.

故选 B.

【点睛】本题考查了一次函数的应用，解题的关键：（1）熟练运用待定系数法就解析式；（2）解决该类问题应结合图形，理解图形中点的坐标代表的意义.

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分.

7. 已知一次函数 $y = (k - 3)x + 1$ 的图象经过第一、二、四象限，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 3$

【解析】

【分析】根据 $y = kx + b$ ， $k < 0$ ， $b > 0$ 时，函数图象经过第一、二、四象限，即可求解；

【详解】解： $y = (k-3)x + 1$ 的图象经过第一、二、四象限，

$$\therefore k-3 < 0,$$

$$\therefore k < 3;$$

故答案为： $k < 3$.

【点睛】 本题考查一次函数图象与系数的关系；熟练掌握一次函数 $y = kx + b$ ， k 与 b 对函数图象的影响是解题的关键.

8. 在一次函数 $y = kx + 3$ 中， 当 $x = 2$ 时， $y = -3$ ， 则 $k =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 把 $x = 2$ ， $y = -3$ 代入解析式， 进行求解即可.

【详解】 解： $\because$ 当 $x = 2$ 时， $y = -3$ ，

$$\therefore 2k + 3 = -3,$$

$$\therefore k = -3.$$

9. 已知一次函数 $y = 3x - 1$ 与 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的图象的交点坐标是 $(1, 2)$ ， 则方程组 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ kx - y = 0 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 根据一次函数的交点坐标即可确定以两个一次函数解析式组成的二元一次方程组的解.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = 3x - 1$ 与 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的图象的交点坐标是 $(1, 2)$ ，

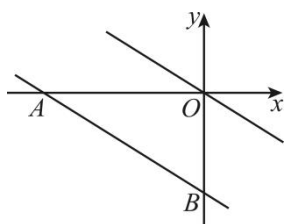
$$\therefore \text{联立 } y = 3x - 1 \text{ 与 } y = kx \text{ 的方程组 } \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = kx \end{cases} \text{ 的解为: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ kx - y = 0 \end{cases} \text{ 的解为: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了一次函数与二元一次方程组，熟练掌握一次函数的交点坐标与二元一次方程组的解的关系是解题的关键.

10. 如图, 把直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 往下平移后得到直线 AB , 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$, 则直线 AB 的函数表达式为 _____.



【答案】 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移、求一次函数解析式, 根据一次函数平移的性质, 设直线 AB 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 代入 $A(-3, 0)$ 到函数表达式求出 b 的值, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 把直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 往下平移后得到直线 AB ,

$\therefore$ 设直线 AB 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$,

代入点 $A(-3, 0)$ 得, $-\frac{1}{2} \times (-3) + b = 0$,

解得 $b = -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

故答案为: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

11. 小明妈妈给了小明 100 元去买作业本, 已知作业本的单价是 1.5 元, 小明购买了 x 本作业本, 剩余费用为 y 元, 则 y 与 x 的函数关系式为_____.

【答案】 $y = 100 - 1.5x$

【解析】

【分析】 由题意可得作业本花费为 $1.5x$ 元, 进而依据剩余费用等于已有费用 100 元减去作业本花费 $1.5x$ 元建立函数关系式即可.

【详解】 解: 由题意可知:

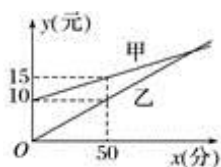
作业本花费: $1.5x$ 元,

$\therefore y = 100 - 1.5x$.

故答案为: $y = 100 - 1.5x$.

【点睛】本题考查函数关系式的建立, 读懂并理解题意并根据题意等量关系建立等量关系式是解题的关键.

12. 如图所示, 是某电信公司甲、乙两种业务: 每月通话费用 y (元)与通话时间 x (分)之间的函数关系. 某企业的周经理从两种业务中选择一种, 如果周经理每个月的通话时间都在 100 分钟以上, 那么选择_____种业务合算.



【答案】甲.

【解析】

【分析】根据函数图象可以分别求得甲、乙两种业务对应的函数解析式, 从而可以求得两种花费相同情况时的时刻, 然后再根据函数图象即可解答本题.

【详解】设乙种业务对应的函数解析式为 $y = kx$,

则 $50k = 10$, 得 $k = 0.2$,

即乙种业务对应的函数解析式为 $y = 0.2x$,

设甲种业务对应的函数解析式为 $y = ax + b$,

$$\begin{cases} b=10, \\ 50a+b=15, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=0.1, \\ b=10, \end{cases}$$

即甲种业务对应的函数解析式为 $y = 0.1x + 10$,

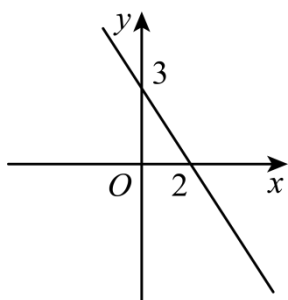
$\therefore$ 令 $0.2x = 0.1x + 10$, 得 $x = 100$,

即当通话时间为 100 分钟时两种业务花费一样多,

由图象可知, 当通话时间在 100 分钟以上, 甲种业务比较合算, 故答案为甲.

【点睛】本题考查的是一次函数的综合运用, 熟练掌握一次函数是解题的关键.

13. 如图, 直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴的交点为 $(2, 0)$, 与 y 轴的交点为 $(0, 3)$, 则关于 x 的不等式 $0 < kx + b < 3$ 的解集是_____.



【答案】 $0 < x < 2$

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质得出 y 随 x 的增大而增大，当 $x < 2$ 时， $y < 0$ ，即可求出答案.

【详解】 $\because$ 直线 $y=kx+b(k>0)$ 与 x 轴的交点为 $(2,0)$ ，与 y 轴的交点为 $(0,3)$ ，

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

当 $x < 2$ 时， $y > 0$ ，

即 $kx+b > 0$ ，

当 $x > 0$ 时， $y < 3$ ，

即 $kx+b < 3$ ，

$0 < kx+b < 3$ 的解集为： $0 < x < 2$ ，

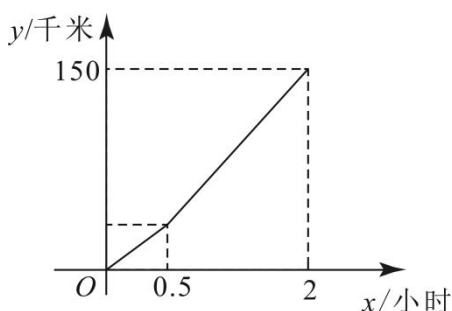
故答案为 $0 < x < 2$.

【点睛】 本题考查了一次函数与一元一次不等式，灵活运用一次函数的性质是解题的关键.

14. 一辆汽车在行驶过程中，其行驶路程 y （千米）与行驶时间 x （小时）之间的函数关系如图所示. 当

$0 \leq x \leq 0.5$ 时， y 与 x 之间的函数表达式为 $y = 60x$ ；当 $0.5 \leq x \leq 2$ 时， y 与 x 之间的函数表达式为

_____.



【答案】 $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$

【解析】

【分析】 先把 $x = 0.5$ 代入 $y = 60x$ ，求得 $y = 30$ ，再设当 $0.5 \leq x \leq 2$ 时， y 与 x 之间的函数表达式为

$y = kx + b$ ，然后把 $(0.5, 30)$ ， $(2, 150)$ 分别代入，得 $\begin{cases} 0.5x + b = 30 \\ 2x + b = 150 \end{cases}$ ，求解得 $\begin{cases} k = 80 \\ b = -10 \end{cases}$ ，即可求解.

【详解】 解：把 $x = 0.5$ 代入 $y = 60x$ ，得

$$y = 60 \times 0.5 = 30,$$

设当 $0.5 \leq x \leq 2$ 时， y 与 x 之间的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

把 $(0.5, 30)$, $(2, 150)$ 分别代入, 得

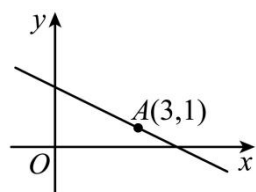
$$\begin{cases} 0.5x + b = 30 \\ 2x + b = 150 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 80 \\ b = -10 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$

故答案为: $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$.

【点睛】本题考查函数的图象, 待定系数法求一次函数解析式, 熟练掌握用待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

15. 如图, 直线 $y = kx + b (k < 0)$ 经过点 $A(3, 1)$, 当 $kx + b < \frac{1}{3}x$ 时, x 的取值范围为_____.



【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】根据题意结合图象首先可得 $y = \frac{1}{3}x$ 的图象过点A, 因此便可得 $kx + b < \frac{1}{3}x$ 的解集.

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 也经过点A,

$\therefore kx + b < \frac{1}{3}x$ 的解集为 $x > 3$,

故答案为 $x > 3$.

【点睛】本题主要考查函数的不等式的解, 关键在于根据图象来判断, 这是最简便的解题方法.

16. 我们规定: 当 k, b 为常数, $k \neq 0, b \neq 0, k \neq b$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 与 $y = bx + k$ 互为交换函数. 例如: $y = 4x + 3$ 的交换函数为 $y = 3x + 4$. 一次函数 $y = kx + 2$ 与它的交换函数图象的交点横坐标为_____.

【答案】 1

【解析】

【详解】由题意可得,

$$\begin{cases} y = kx + 2 \\ y = 2x + k \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} x = 1 \\ y = k + 2 \end{cases},$$

故答案为 1.

考点：两条直线相交或平行问题.

17. 定义：已知 y_1 是自变量 x 的一次函数，函数 y_2 与 y_1 的图象关于 y 轴对称，当 $a \leq x \leq b$ (a, b 为常数, $a < b$) 时，函数 $y = y_1 - y_2$ 的最大值与最小值之差恰好为 $5b - 5a$ ，则我们称函数 y 是在 $a \leq x \leq b$ 上的“优雅差函数”已知一次函数 $y_1 = kx + 3$ ，若 $y = y_1 - y_2$ 是在 $-4 \leq x \leq 1$ 上的“优雅差函数”，则 k 的值为_____.

【答案】 2.5 或 -2.5

【解析】

【分析】 本题考查了新定义，一次函数的图象与性质，轴对称的性质，解题的关键是熟练掌握一次函数的图象与性质，正确理解新定义.

由题意得， $5b - 5a = 5 \times 1 - 5 \times (-4) = 25$ ，根据关于 y 轴对称的性质，纵坐标不变，横坐标互为相反数求解 $y_2 = k(-x) + 3 = -kx + 3$ ，即可写出 $y = y_1 - y_2 = kx + 3 - (-kx + 3) = 2kx$ ，再分类讨论求解即可.

【详解】 解：由题意得， $5b - 5a = 5 \times 1 - 5 \times (-4) = 25$ ，

$\because$ 一次函数 $y_1 = kx + 3$ ，函数 y_2 与 y_1 的图象关于 y 轴对称，

$$\therefore y_2 = k(-x) + 3 = -kx + 3,$$

$$\therefore y = y_1 - y_2 = kx + 3 - (-kx + 3) = 2kx,$$

①当 $k > 0$ 时， y 随着 x 的增大而增大，

$$\therefore x = -4 \text{ 时, } y_{\min} = -8k; \quad x = 1 \text{ 时, } y_{\max} = 2k,$$

$$2k - (-8k) = 25,$$

解得 $k = 2.5$;

②当 $k < 0$ 时， y 随着 x 的增大而减小，

$$\therefore x = 1 \text{ 时, } y_{\min} = 2k; \quad x = -4 \text{ 时, } y_{\max} = -8k,$$

$$-8k - 2k = 25,$$

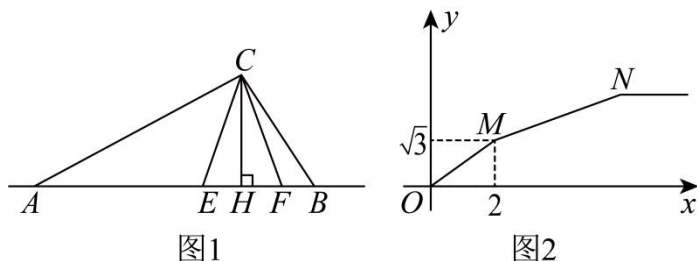
解得 $k = -2.5$;

综上： k 的值为 2.5 或 -2.5，

故答案为：2.5 或 -2.5.

18. 如图 1，已知直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, E, F$ 为直线 AB 上的两点，且 $CE = CF$ 。设 E, F 两点的距离为 $x, \triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y ，图 2 是 y 关于 x 的函数的图象。根据两图

信息，图2中MN段函数的解析式是_____.



【答案】 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \leq x \leq 6)$

【解析】

【分析】由M的坐标为 $(2, \sqrt{3})$ 得到 $EF = 2$, $\frac{1}{2}EF \cdot CH = \sqrt{3}$, 且点F和点B重合, 求出 $CH = \sqrt{3}$, $BH = \frac{1}{2}BC$, 进一步得到 $BH = 1$, $BC = 2$, $AB = 2BC = 4$, 则 $AC = 2\sqrt{3}$, $AH = 3$, 当点E运动到点A时, $\triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y 达到最大值, 此时则 $EF = 2AH = 6$, $y = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$, 即点N的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$, 得到 $2 \leq x \leq 6$ 时, $y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}xCH + \frac{1}{2}BH \cdot CH = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即可求出答案.

【详解】解: 由题意可知, 点M的坐标为 $(2, \sqrt{3})$, 即当 $x = 2$ 时, $y = \sqrt{3}$, 则此时 $EF = 2$, $\frac{1}{2}EF \cdot CH = \sqrt{3}$, 且点F和点B重合, 即 $\angle CBH = \angle CFH = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$, $\therefore CH = \sqrt{3}$, $BH = \frac{1}{2}BC$ $\therefore BC^2 = CH^2 + BH^2$, 即 $(2BH)^2 = CH^2 + BH^2$, 解得 $BH = 1$, 则 $BC = 2$, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore AB = 2BC = 4$, $\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}$, $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 3$, 当点E运动到点A时, $\triangle CEF$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 y 达到最大值, $\therefore CE = CF$, $\therefore$ 此时 $EF = 2AH = 6$,

$$\text{此时 } y = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3},$$

即点 N 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$,

$$\text{当 } 2 \leq x \leq 6 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x CH + \frac{1}{2} BH \cdot CH = \frac{\sqrt{3}}{4} x + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } MN \text{ 段函数的解析式是 } y = \frac{\sqrt{3}}{4} x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{\sqrt{3}}{4} x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \leq x \leq 6)$$

【点睛】此题考查了从函数图象获取信息，求函数解析式，等腰三角形的判定和性质、勾股定理、直角三角形的性质等知识，从函数图象获取正确的信息是解题的关键.

三、解答题：本题共 8 小题，共 58 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

19. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = 3x$ 平行，且经过点 $(-2, 1)$ ，求该一次函数的解析式.

【答案】 $y = 3x + 7$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象的性质，以及用待定系数法求一次函数解析式，熟练掌握一次函数图象的性质是解题的关键.

根据两直线平行求出 k ，利用待定系数法求出一一次函数解析式即可.

【详解】解：∵一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = 3x$ 平行，

$$\therefore k = 3,$$

$$\because \text{一次函数的图象经过点 } (-2, 1), \quad y = 3x + b,$$

$$\therefore 1 = 3 \times (-2) + b,$$

$$\text{解得 } b = 7,$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为 } y = 3x + 7.$$

20. 已知关于 x 的正比例函数 $y = (2m + 4)x$.

(1) 若函数图象经过第一、三象限，求 m 的取值范围；

(2) 若 y 随 x 的增大而减小，求 m 的取值范围；

(3) 若点 $(1, 3)$ 在该函数的图象上，求 m 的值.

【答案】(1) $m > -2$

(2) $m < -2$

(3) $m = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据函数图象经过第一、三象限，可得不等式 $2m + 4 > 0$ ，解不等式即可求出 m 的取值范围；

(2) 根据正比例函数 $y = (2m + 4)x$ 中 y 随 x 的增大而减小，可得不等式 $2m + 4 < 0$ ，解不等式即可求出 m 的取值范围；

(3) 根据点 $(1, 3)$ 在该函数 $y = (2m + 4)x$ 的图象上，把 $(1, 3)$ 代入解析式，得到关于 m 的一元一次方程，解方程即可求出 m 的值.

【小问 1 详解】

解：∵ 函数图象经过第一、三象限，

$$\therefore 2m + 4 > 0,$$

解得： $m > -2$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 正比例函数 $y = (2m + 4)x$ 中 y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore 2m + 4 < 0,$$

解得： $m < -2$ ；

【小问 3 详解】

解：点 $(1, 3)$ 在该函数 $y = (2m + 4)x$ 的图象上，

$$\therefore (2m + 4) \times 1 = 3,$$

解得： $m = -\frac{1}{2}$.

21. 已知 y 与 $x - 2$ 成正比例，且当 $x = 3$ 时， $y = -2$.

(1) y 关于 x 的函数表达式；

(2) 当 $y = -3$ 时，求 x 的值.

【答案】(1) $y = -2x + 4$ ；

(2) x 的值为 3.5.

【解析】

【分析】 本题主要考查了用待定系数法求解析式，求自变量的值，掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 根据题意设出函数关系式 $y = k(x-2) (k \neq 0)$ ，然后代入即可求解；

(2) 把 $y = -3$ 代入 (1) 中函数解析式即可求出 x 的值.

【小问 1 详解】

解：由题意，设 y 关于 x 的函数表达式为 $y = k(x-2) (k \neq 0)$ ，

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时， $y = -2$ ，

$\therefore -2 = k(3-2)$ ，

解得： $k = -2$ ；

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y = -2x + 4$ ；

【小问 2 详解】

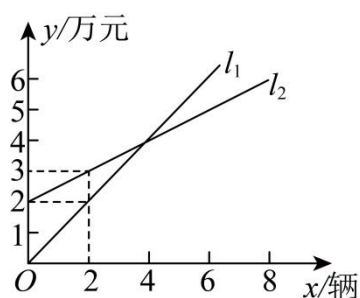
解： $\because y$ 关于 x 的函数表达式为 $y = -2x + 4$ ，

$\therefore$ 当 $y = -3$ 时， $-3 = -2x + 4$ ，

解得： $x = 3.5$ ，

$\therefore x$ 的值为 3.5.

22. 如图， l_1 表示某电动车厂一天的销售收入 y_1 与销售量 x 之间的关系； l_2 表示该电动车厂一天的销售成本 y_2 与销售量 x 之间的关系.



(1) 求出销售收入与销售量之间的函数关系式；

(2) 求出销售成本与销售量之间的函数关系式；

(3) 当一天的销售量超过多少辆时，工厂才能获利（利润 = 收入 - 成本）？

【答案】 (1) $y_1 = x$

$$(2) \quad y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$(3) \quad 4$$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求一次函数解析式即可.

(2) 利用待定系数法求一次函数解析式即可.

(3) 由题意可知, 当 $y_1 > y_2$ 时工厂获利, 然后解不等式即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 设 $y_1 = mx$,

$\because l_1$ 过点 $(2, 2)$,

$$\therefore 2 = 2m,$$

解得 $m = 1$,

$$\therefore y_1 = x.$$

$\therefore$ 销售收入与销售量之间的函数关系式为 $y_1 = x$.

【小问 2 详解】

解: 设 $y_2 = kx + b$,

$\because l_2$ 过点 $(0, 2)$ 和 $(2, 3)$

$$\therefore \begin{cases} b = 2 \\ 2k + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 销售成本与销售量之间的函数关系式 $y_2 = \frac{1}{2}x + 2$.

【小问 3 详解】

解: 由题意可知, 当 $y_1 > y_2$ 时工厂获利,

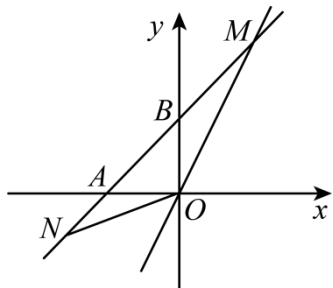
$$\text{即 } x > \frac{1}{2}x + 2,$$

解得 $x > 4$,

∴当一天的销售量超过4辆时，工厂才能获利.

23. 如图，已知正比例函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的图象与一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象交于点 $M(3, 6)$ ，且

一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $N(-5, -2)$ ，分别交 x 轴， y 轴于点 A ， B .



(1) 求正比例函数、一次函数的解析式；

(2) 求 $\triangle MON$ 的面积.

【答案】 (1) 正比例函数 $y = 2x$ ，一次函数 $y = x + 3$

(2) 12

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解；

(2) 首先求出 $OB = 3$ ，然后利用三角形面积公式求解.

【小问1详解】

解：将 $M(3, 6)$ 代入 $y = mx (m \neq 0)$ 得， $6 = 3m$

∴ $m = 2$ ，

∴ 正比例函数 $y = 2x$ ；

将 $M(3, 6)$ ， $N(-5, -2)$ 代入 $y = kx + b (k \neq 0)$ 得，
$$\begin{cases} 3k + b = 6 \\ -5k + b = -2 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

∴ 一次函数 $y = x + 3$ ；

【小问2详解】

解：∵ 一次函数 $y = x + 3$

∴ 当 $x = 0$ 时， $y = x + 3 = 3$

∴ $B(0, 3)$ ，即 $OB = 3$

$$\therefore M(3,6), N(-5,-2)$$

$$\therefore \triangle MON \text{ 的面积} = S_{\triangle BON} + S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 12.$$

24. 为弘扬爱国精神, 传承中华优秀传统文化, 某校组织了以“诗词里的中国”为主题的比赛, 设置 A , B 两种奖品. 校学生会计划去某超市购买 A , B 两种奖品共 300 个, A 种奖品每个 20 元, B 种奖品每个 15 元, 该超市对同时购买这两种奖品的顾客有两种销售方案 (只能选择其中一种).

方案一: 两种奖品都按原价购买, 但每购买 5 个 A 种奖品赠送 1 个 B 种奖品.

方案二: A 种奖品按原价购买, B 种奖品每个打八折.

设校学生会计划购买 x 个 A 种奖品, 且 x 是 5 的倍数, 选择方案一的总费用为 y_1 元, 选择方案二的总费用为 y_2 元.

(1) 请分别写出 y_1, y_2 与 x 之间的函数关系式.

(2) 校学生会选择哪种方案支付的费用较少?

【答案】 (1) $y_1 = 2x + 4500$, $y_2 = 8x + 3600$

(2) 当校学生会购买少于 150 个 A 种奖品时, 选择方案二支付的费用较少; 当校学生会购买 150 个 A 种奖品时, 选择两种方案支付的费用一样; 当校学生会购买多于 150 个且少于 300 个 A 种奖品时, 选择方案一支付的费用较少

【解析】

【分析】 (1) 根据总费用 = A , B 两种奖品费用之和列出 y_1 、 y_2 关于 x 的函数解析式;

(2) 根据 (1) 中解析式分三种情况讨论: $y_1 > y_2$, $y_1 = y_2$, $y_1 < y_2$ 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 得 $y_1 = 20x + 15 \left(300 - x - \frac{x}{5} \right) = 2x + 4500$, $y_2 = 20x + 15 \times 80\% \times (300 - x) = 8x + 3600$.

【小问 2 详解】

解: 由 $y_1 > y_2$, 得 $2x + 4500 > 8x + 3600$.

解得 $x < 150$;

由 $y_1 = y_2$, 得 $2x + 4500 = 8x + 3600$.

解得 $x = 150$;

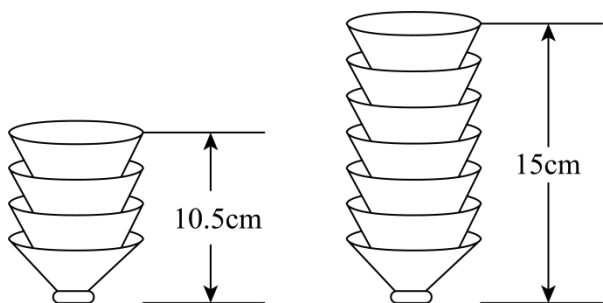
由 $y_1 < y_2$, 得 $2x + 4500 < 8x + 3600$.

解得 $x > 150$.

答：当校学生会购买少于 150 个 A 种奖品时，选择方案二支付的费用较少；当校学生会购买 150 个 A 种奖品时，选择两种方案支付的费用一样；当校学生会购买多于 150 个且少于 300 个 A 种奖品时，选择方案一支付的费用较少.

【点睛】 本题考查一次函数的应用以及一元一次不等式的应用，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，列出函数解析式.

25. 如图，两摞相同规格的饭碗整齐地叠放在桌面上，请根据图中给的数据信息，解答下列问题：



(1) 像这样规格的饭碗整齐地叠放在桌面上时，求一摞饭碗的高度 y (cm) 与饭碗数 x (个) 之间的函数解析式；

(2) 把图中这两摞饭碗整齐地摆成一摞时，这摞饭碗的高度是多少 cm？

(3) 如果一摞饭碗的高度超过 25cm 时容易发生侧翻，请问一摞最多能放多少个碗？

【答案】 (1) $y = 1.5x + 4.5$

(2) 21cm

(3) 13 个

【解析】

【分析】 本题意在考查学生利用待定系数法求解一次函数关系式，并利用关系式求值的运算技能和从情景中提取信息、解释信息、解决问题的能力.

(1) 利用待定系数法解答，即可求解；

(2) 把 $x = 4 + 7 = 11$ 代入 (1) 中解析式，即可求解；

(3) 把 $y = 25$ 代入 (1) 中解析式，即可求解.

【小问 1 详解】

解：设函数解析式为 $y = kx + b$,

根据题意得：当 $x = 4$ 时， $y = 10.5$ ；当 $x = 7$ 时， $y = 15$,

$$\therefore \begin{cases} 10.5 = 4k + b \\ 15 = 7k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 1.5 \\ b = 4.5 \end{cases},$$

$\therefore$ 该函数解析式为 $y = 1.5x + 4.5$;

【小问 2 详解】

解: 当 $x = 4 + 7 = 11$ 时, $y = 1.5 \times 11 + 4.5 = 21$,

即这两摞饭碗整齐地摆成一摞时, 这摞饭碗的高度是 21cm;

【小问 3 详解】

解: 当 $y = 25$ 时, $1.5x + 4.5 = 25$,

$$\text{解得: } x = 13\frac{2}{3},$$

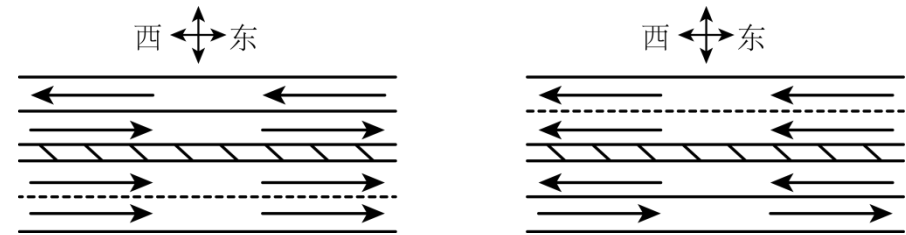
$\therefore x$ 为正整数,

$\therefore x$ 取 13,

$\therefore$ 一摞最多能放 13 个碗.

26. 某跨海大桥东西走向, 双向四条车道, 在旅游旺季经常拥堵, 交警部门为了缓解交通压力, 他们对该路段的汽车流量 (辆/分钟) 和时间进行了统计和分析, 得到以下表格, 发现时间和汽车流量的变化规律符合一次函数的特征.

时间 x	8 时	11 时	14 时	17 时	20 时
y_1 自东向西交通量 (辆/分钟)	200	320	440	560	680
y_2 自西向东交通量 (辆/分钟)	500	440	380	320	260



(1) 请用一次函数分别表示 y_1 与 x 、 y_2 与 x 之间的函数关系.

(2) 如图, 交警希望启用“潮汐式”通行方式来缓解交通压力, 根据汽车流量情况改变车道的行车方向:

大流量方向的汽车可在该路段借用相邻的对向机动车道通行，对向机动车道实行双向通行．单位时间内交

通总量为 $y_{\text{总}} = y_1 + y_2$ ，车流量大的方向交通量为 y_m ，经查阅资料得：当 $y_m \geq \frac{2}{3}y_{\text{总}}$ ，需要使用“潮汐式”

通行方式以改善交通情况．该路段从 8 时至 20 时，如何设置“潮汐式”通行方式以缓解交通拥堵（在何时间段借用何方向机动车道通行），并说明理由．

【答案】 (1) $y_1 = 40x - 120$, $y_2 = -20x + 660$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的实际应用：

(1) 待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 求出 $y_1 \geq \frac{2}{3}y_{\text{总}}$, $y_2 \geq \frac{2}{3}y_{\text{总}}$ 时 x 的范围，进行分析即可．

【小问 1 详解】

解：设 $y_1 = kx + b$ ($k \neq 0$), $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$),

把 $(8, 200)$, $(11, 320)$ 代入 $y_1 = kx + b$ ($k \neq 0$), 得：

$$\begin{cases} 8k + b = 200 \\ 11k + b = 320 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = 40 \\ b = -120 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = 40x - 120,$$

把 $(8, 500)$, $(11, 440)$ 代入 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$), 得：

$$\begin{cases} 8m + n = 500 \\ 11m + n = 440 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m = -20 \\ n = 660 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = -20x + 660.$$

【小问 2 详解】

解： $y_{\text{总}} = y_1 + y_2 = 20x + 540$.

当 $y_1 \geq \frac{2}{3}y_{\text{总}}$ 时，即 $40x - 120 \geq \frac{2}{3}(20x + 540)$ ，解得 $x \geq 18$ ；

当 $y_2 \geq \frac{2}{3}y_{\text{总}}$ 时，即 $-20x + 660 \geq \frac{2}{3}(20x + 540)$ ，解得 $x \leq 9$.

∴ 8 时到 9 时，自西向东的车可借用自东向西的车道通行；

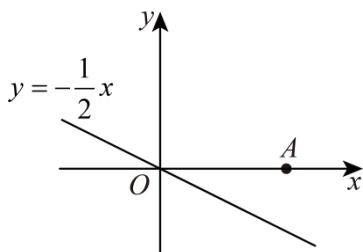
18 时到 20 时，自东向西的车可借用自西向东的车道通行.

2025 学年第二学期八年级数学学科素养收集 1 挑战题

填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

27. 阅读理解：对于线段 MN 和点 Q ，定义：若 $QM = QN$ ，则称点 Q 为线段 MN 的“等距点”；特别地，若 $QM = QN$ ，且 $\angle MQN = 90^\circ$ ，则称点 Q 是线段 MN 的“完美等距点”. 如图，在平面直角坐标系中，

O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(5, 0)$ ，点 $P(m, n)$ 是直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上一动点. 当 $m > 0$ ，是否存在这样的点 N ，使点 N 是线段 OA 的“等距点”，也是线段 OP 的“完美等距点”，则符合的点 P 的坐标为_____.

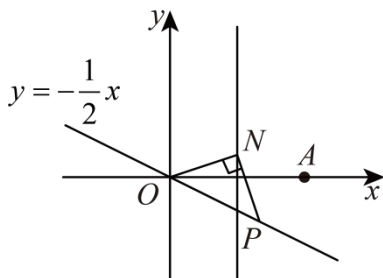


【答案】 $\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】设 N 点的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, b\right)$ ，根据 $ON = PN$ 得到 $\sqrt{b^2 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}m\right)^2}$ ，表示出 $b = 5 - \frac{5}{4}m$ ，然后证明出 $\triangle OPN$ 是等腰直角三角形，得到 $OP = \sqrt{2}ON$ ，代入求出 $m = \frac{10}{3}$ ，进而求解即可.

【详解】解：如图所示，



∵ 点 N 是线段 OA 的“等距点”，点 A 的坐标为 $(5, 0)$ ，

$\therefore ON = NA$ ，故 N 点横坐标为 $\frac{5}{2}$ ，

设 N 点的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, b\right)$ ，

$\therefore$ 点 $P(m, n)$ 是直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上一动点

$$\therefore P\left(m, -\frac{1}{2}m\right),$$

$$\therefore ON = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + \frac{25}{4}}, \quad PN = \sqrt{\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}m\right)^2},$$

$\because$ 点 N 是线段 OP 的“完美等距点”，

$$\therefore ON = PN,$$

$$\therefore \sqrt{b^2 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}m\right)^2},$$

$$\text{解得 } b = 5 - \frac{5}{4}m,$$

$\because$ 点 N 是线段 OP 的“完美等距点”，

$$\therefore ON \perp PN,$$

$\therefore \triangle OPN$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore OP = \sqrt{2}ON,$$

$$\because OP = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}m^2} = \sqrt{\frac{5}{4}m^2},$$

$$\therefore \sqrt{\frac{5}{4}m^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{25}{4}},$$

$$\text{解得 } m = 10 > 5 \text{ (舍去) 或 } m = \frac{10}{3},$$

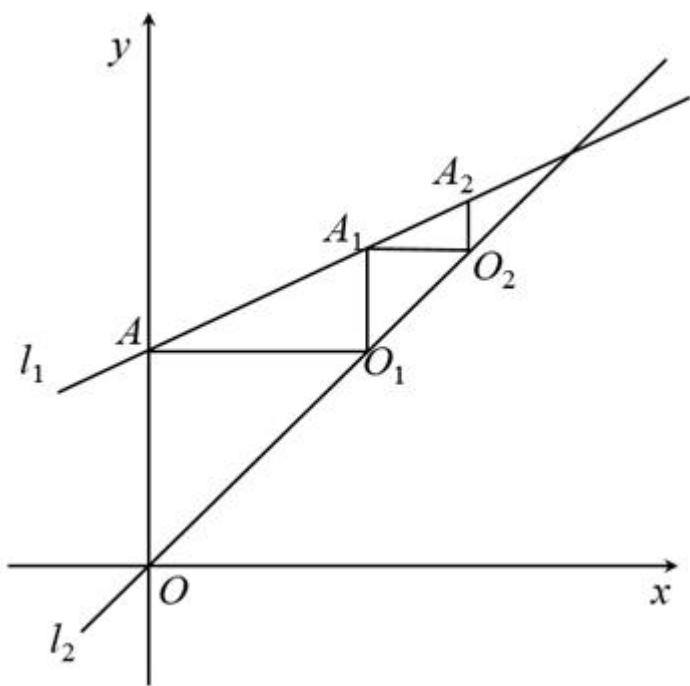
$$\text{当 } m = \frac{10}{3} \text{ 时, } -\frac{1}{2}m = -\frac{5}{3},$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了一次函数的图像和性质，一次函数和几何综合，等腰直角三角形的性质和判定，勾股定理等知识，熟练掌握一次函数的图像和性质是解题的关键.

28. 《庄子·天下篇》记载“一尺之锤，日取其半，万世不竭.” 如图，直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 y 轴交于点 A ，过点 A 作 x 轴的平行线交直线 $l_2: y = x$ 于点 O_1 ，过点 O_1 作 y 轴的平行线交直线 l_1 于点 A_1 ，以此类推，令 $OA = a_1$ ， $O_1A_1 = a_2$ ， $\dots$ ， $O_{n-1}A_{n-1} = a_n$ ，若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq S$ 对任意大于 1 的整数 n 恒成立，则 S 的最小值为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 先由直线 $l_2: y = x$ 与 y 轴的夹角是 45° ，得出 $\triangle OAO_1$ ， $\triangle O_1A_1O_2$ ， $\dots$ 都是等腰直角三角形，
 $\therefore OA = O_1A$ ， $O_1A_1 = O_2A_1$ ， $O_2A_2 = O_3A_2$ ， $\dots$ ，得出点 O_1 的横坐标为 1，得到当 $x = 1$ 时， $y = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$ ，
 点 A_1 的坐标为 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ， $O_1A_1 = O_2A_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ ，点 O_2 的横坐标 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$ ，
 得出点 A_2 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ ，以此类推，最后得出结果.

【详解】 解： $\because$ 直线 $l_2: y = x$ 与 y 轴的夹角是 45° ，

$\therefore \triangle OAO_1$ ， $\triangle O_1A_1O_2$ ， $\dots$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore OA = O_1A, O_1A_1 = O_2A_1, O_2A_2 = O_3A_2, \dots$$

$\because$ 点 A 的坐标为 $(0,1)$, $\therefore$ 点 O_1 的横坐标为 1,

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}, \therefore \text{点 } A_1 \text{ 的坐标为 } \left(1, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore O_1A_1 = O_2A_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } O_2 \text{ 的横坐标 } 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4},$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right),$$

$$\therefore O_3A_2 = O_2A_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4}, \dots\dots$$

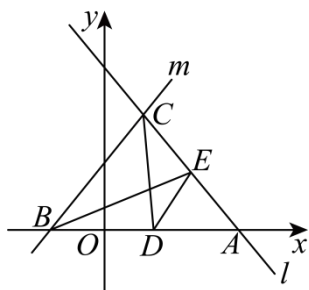
$$\text{以此类推, 得 } OA = a_1 = 1, O_1A_1 = a_2 = \frac{1}{2}, O_2A_2 = a_3 = \frac{1}{4}, O_3A_3 = a_4 = \frac{1}{8}, \dots\dots, O_{n-1}A_{n-1} = a_n = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq S,$$

$\therefore S$ 的最小值为 2.

【点睛】 本题考查了此题考查一次函数图象上的点的坐标特征, 探究以几何图形为背景的问题时, 一是要破解几何图形之间的关系, 二是实现线段长度和点的坐标的正确转换, 三是观察分析所得数据并找出数据之间的规律.

29. 如图, 直线 $l: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{39} + 3\sqrt{3}$ 与 x 轴交于点 A , 与经过点 $B(-2,0)$ 的直线 m 交于第一象限内点 C , 点 E 为直线 l 上一点, 点 D 为点 B 关于 y 轴的对称点, 连接 DC 、 DE 、 BE , 若 $\angle DEC = 2\angle DCE$, $\angle DBE = \angle DEB$, 则 CD^2 的值为_____.



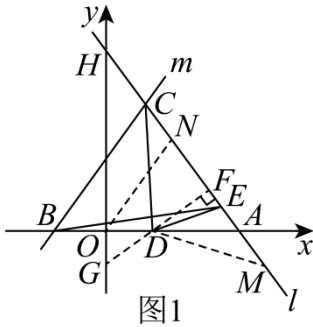
【答案】 $20 + 4\sqrt{13}$ 或 $44 - 4\sqrt{13}$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F ，延长 FD 交 y 轴于点 G ，求出 DF 的解析式，联立方程组
$$\begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

求出点 F 的坐标，分点 E 在点 F 的上方和下方两种情况结合勾股定理求出结论即可。

【详解】解：过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F ，延长 FD 交 y 轴于点 G ，



$\because$ 点 $B(-2, 0)$ ，且点 D 为点 B 关于 y 轴的对称点，

$\therefore D(2, 0)$ ，

$\therefore BD = 4$ ；

又 $\angle DBE = \angle DEB$ ，

$\therefore DE = BD = 4$ ，

设直线 $l: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{39} + 3\sqrt{3}$ 交 y 轴于点 H ，

当 $x = 0$ 时， $y = \sqrt{39} + 3\sqrt{3}$ ；当 $y = 0$ 时， $x = \sqrt{13} + 3$ ，

$\therefore OH = \sqrt{39} + 3\sqrt{3}$ ， $OA = \sqrt{13} + 3$ ，

$\therefore AH = \sqrt{OH^2 + AO^2} = 2\sqrt{13} + 6$ ，

取 AH 的中点 N ，连接 ON ，则 $ON = \frac{1}{2}AH = AN = \sqrt{13} + 3 = OA$ ，

$\therefore \triangle OAN$ 为等边三角形，

$\therefore \angle OAH = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AHO = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle OGD = 60^\circ, \angle ODG = 30^\circ$ ，

$\therefore DG = 2OG$ ，

又 $OD^2 + OG^2 = DG^2$ ，

$$\therefore 2^2 + OG^2 = 4OG^2,$$

$$\therefore OG = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore G\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right);$$

设直线 DF 所在直线解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{把 } G\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), D(2, 0) \text{ 代入得 } \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases};$$

$$\therefore \text{直线 } DF \text{ 所在直线解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{39} + 3\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} x = \frac{3}{4}\sqrt{13} + \frac{11}{4} \\ y = \frac{\sqrt{39}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases},$$

$$\therefore F\left(\frac{3}{4}\sqrt{13} + \frac{11}{4}, \frac{\sqrt{39}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\therefore DF^2 = \left(\frac{3}{4}\sqrt{13} + \frac{11}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{39}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{21 + 3\sqrt{13}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中, $EF^2 = DE^2 - DF^2$,

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{13} - 3}{2};$$

①当 E 在 F 下方时, 如图 1, 在 E 点下方直线 l 上取一点 M , 使 $EM = DE = 4$, 连接 DM ,

$$\therefore EM = DE,$$

$$\therefore \angle EDM = \angle EMD,$$

$$\text{又} \because \angle CED = \angle EDM + \angle EMD,$$

$$\therefore \angle CED = 2\angle EMD,$$

$$\text{又} \because \angle CED = 2\angle DCE,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle EMD;$$

$$\therefore DC = DM,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFM \text{ 中, } DM^2 = DF^2 + FM^2,$$

$$\therefore DC^2 = DM^2 = \frac{21+3\sqrt{13}}{2} + (EF + EM)^2 = \frac{21+3\sqrt{13}}{2} + \left(\frac{\sqrt{13}+5}{2}\right)^2 = 20 + 4\sqrt{13};$$

②当点 E 在 F 的上方时, 如图 2, 在 E 点下方直线 l 上取一点 M , 使 $EM = DE = 4$, 连接 DM ,

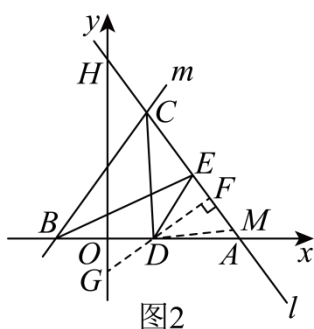


图2

$$\because EM = DE,$$

$$\therefore \angle EMD = \angle EDM,$$

$$\text{又} \because \angle CED = \angle EDM + \angle EMD = 2\angle EMD, \quad \angle CED = 2\angle EMD,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle EMD,$$

$$\therefore DC = DM,$$

$$\therefore FM = EM - EF = 4 - \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \frac{11-\sqrt{13}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFM \text{ 中, } DM^2 = DF^2 + FM^2 = \frac{21+3\sqrt{13}}{2} + \left(\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 44 - 4\sqrt{13},$$

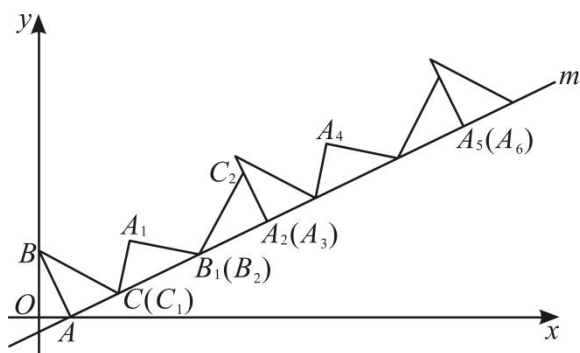
$$\therefore DC^2 = 44 - 4\sqrt{13};$$

综上所述, $DC^2 = 20 + 4\sqrt{13}$ 或 $44 - 4\sqrt{13}$.

30. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(2,0)$, $B(0,2\sqrt{3})$, 点 C 在直线 $m: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 上, 且 $AC = 3$,

连接 AB , BC , 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转到 $\triangle A_1B_1C_1$, 点 B 的对应点 B_1 落在直线 m 上, 再将 $\triangle A_1B_1C_1$

绕点 B_1 顺时针旋转到 $\triangle A_2B_2C_2$, 点 A_1 的对应点 A_2 也落在直线 m 上. 如此下去, $\cdots$, 则 A_{1001} 的纵坐标是_____.



【答案】 2004

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形, 一次函数图象上点的坐标特征, 旋转性质, 勾股定理, 设直线 m 与 y 轴交于点 D , 分别过 A_2 、 A_5 作 $A_2E \perp x$ 轴, $A_5F \perp x$ 轴, 垂足分别为点 E 、 F , 求出点 $D\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 由

$$\tan \angle OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad \text{则 } \angle OAD = \angle CAE = 30^\circ,$$

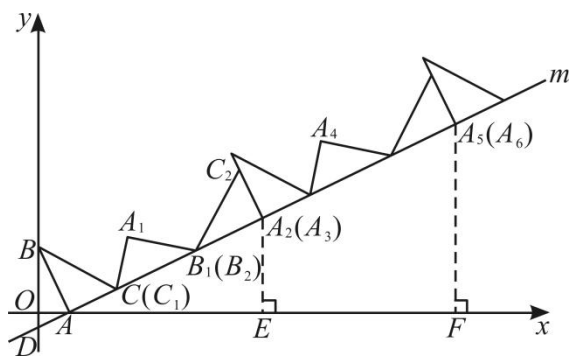
$\angle OAB = 60^\circ$, 则有 $\angle BAC = 90^\circ$, 由勾股定理得 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, 由旋转性质可知

$C_1B_1 = BC = 5$, $B_1A_2 = AB = 4$, 所以 $AA_2 = 12$, 故有 $A_2E = \frac{1}{2}AA_2 = 6$, 即 $A_2(A_3)$ 的纵坐标为 6, 同

理 $A_5(A_6)$ 的纵坐标为 12, 由 $A_{1001} = A_{3 \times 333 + 2}$, 可判断 A_{1001} 在直线 m 上, 所以 $A_{1001}(A_{1002})$ 的纵坐标为

$334 \times 6 = 2004$, 从而求解, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: 如图, 设直线 m 与 y 轴交于点 D , 分别过 A_2 、 A_5 作 $A_2E \perp x$ 轴, $A_5F \perp x$ 轴, 垂足分别为点 E 、 F ,



由直线 $m: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 得, 当 $y = 0$ 时, $x = 2$, 所以点 A 的坐标为 $(2, 0)$.

$$\therefore \text{点 } D\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\therefore OD = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore A(2, 0), \quad B(0, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OA = 2, \quad OB = 2\sqrt{3}, \quad \text{由勾股定理得 } AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OAD = \angle CAE = 30^\circ, \quad \angle OAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\text{由旋转性质可知: } CB_1 = BC = 5, \quad B_1A_2 = AB = 4,$$

$$\therefore AA_2 = AC + CB_1 + B_1A_2 = 12,$$

$$\therefore A_2E = \frac{1}{2}AA_2 = 6, \quad \text{即 } A_2(A_3) \text{ 的纵坐标为 } 6,$$

$$\text{同理 } A_5(A_6) \text{ 的纵坐标为 } 12,$$

$$\therefore A_{1001} = A_{3 \times 333 + 2},$$

$$\therefore A_{1001} \text{ 在直线 } m \text{ 上},$$

$$\therefore A_{1001}(A_{1002}) \text{ 的纵坐标为 } 334 \times 6 = 2004,$$

故答案为: 2004.