

八下数学第一次阶段性作业

一、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. 四边形具有不稳定性，从数学角度看不稳定性主要体现在（ ）

- A. 内角可发生变化
- B. 边长发生变化
- C. 周长发生变化
- D. 内角和发生变化

【答案】A

【解析】

【分析】四边形的不稳定性是指在边长固定的情况下，其形状可以发生改变，导致内角发生变化，而周长和内角和保持不变.

根据稳定性的变化逐一判断即可.

【详解】A: 四边形边长固定时，通过调整形状，内角会改变，体现不稳定性，故 A 正确；

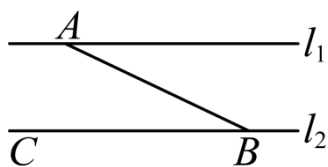
B: 不稳定性指边长固定时形状改变，边长本身不变，故 B 错误；

C: 周长是边长的总和，边长固定则周长不变，故 C 错误；

D: 四边形的内角和恒为 360° ，与形状无关，故 D 错误；

故选：A.

2. 如图所示，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，点 A 在直线 l_1 上，点 B, C 在直线 l_2 上，若 $AB = 6$ ，则直线 l_1, l_2 间的距离可以是（ ）



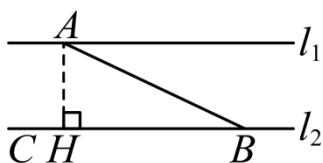
- A. 6
- B. 3
- C. 7
- D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线之间的距离，垂线段最短，先分析题意，得出 l_1, l_2 间的距离 < 6 （垂线段最短），即可作答.

【详解】解：过点 A 作 $AH \perp l_2$



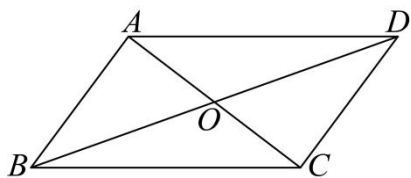
$\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2$, 点 A 在直线 l_1 上, 点 B, C 在直线 l_2 上, 且 $AB = 6$, $AH \perp l_2$

$\therefore l_1, l_2$ 间的距离 < 6 (垂线段最短),

观察四个选项, 唯有 B 选项符合题意,

故选: B

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O . 下列条件不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()



A. $AB = DC, AD = BC$

B. $AB \parallel DC, AD = BC$

C. $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCD$

D. $OA = OC, OB = OD$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定方法, 熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键. 由平行四边形的判定方法分别对各个选项进行判断即可.

【详解】解: A、 $\because AB = DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 A 不符合题意;

B、 $\because AB \parallel DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不一定是平行四边形, 也可能是等腰梯形, 故选项 B 符合题意,

C、 $\because AB \parallel DC$,

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$.

$\because \angle BAD = \angle BCD$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 C 不符合题意;

D、 $\because OA = OC, OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

4. 下列说法错误的个数是 ()

①对于 n 边形一个顶点的对角线有 $(n-2)$ 条

②以不共线的三点为平行四边形的其中三个顶点作平行四边形, 一共可作三个平行四边形

③每条边都相等且每个内角都相等的多边形是正多边形

④过某个多边形的一个顶点的所有对角线, 将这个多边形分成 5 个三角形, 则这个多边形是七边形

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】只需逐个判断每个说法的正误, 统计错误说法的个数即可得到结果.

【详解】解: ① 对于任意 n 边形, 过一个顶点, 除去自身和相邻两个顶点, 剩余可连接对角线的顶点数为 $n-1-2 = n-3$, 因此过一个顶点的对角线条数为 $n-3$, 不是 $n-2$, 故①错误;

② 不共线三点可构成一个三角形, 分别以三角形的三条边作为平行四边形的对角线, 可作出 3 个不同的平行四边形, 故②正确;

③ 正多边形的定义就是各边相等且各内角相等的多边形, 该说法符合定义, 故③正确;

④ 过 n 边形一个顶点的所有对角线将多边形分成 $(n-2)$ 个三角形, 令 $n-2 = 5$, 解得 $n = 7$, 因此这个多边形是七边形, 故④正确;

综上, 错误的说法共 1 个,

故选: A.

5. 有下列说法, 其中正确说法的序号是 ()

①矩形具有平行四边形的所有性质;

②平行四边形是轴对称图形;

③菱形的任意一条对角线可把平行四边形分成两个全等的等腰三角形;

④平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形.

A. ①④

B. ①③

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形与特殊平行四边形的性质逐个判断各说法即可.

【详解】解: $\because$ 矩形是特殊的平行四边形,

$\therefore$ 矩形具有平行四边形的所有性质, 故①正确;

$\because$ 普通平行四边形是中心对称图形, 不是轴对称图形,

$\therefore$ ②错误;

$\because$ 菱形是四边相等的平行四边形, 任意一条对角线分割该平行四边形 (菱形) 后, 得到的两个三角形三边对应相等 (菱形边长相等, 对角线为公共边), 因此两个三角形全等, 且每个三角形有两条边是菱形的边长, 因此是等腰三角形,

$\therefore$ ③正确;

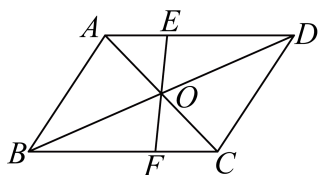
$\because$ 平行四边形的对角线互相平分, 四个小三角形等底同高, 面积都等于平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$, 因此四个小三角形面积相等,

$\therefore$ ④正确;

综上, 正确说法的序号是①③④.

故选: C.

6. 如图, EF 经过 $\square ABCD$ 对角线的交点 O , 交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F . 有下列结论: ①图中共有 4 对全等三角形; ②若 $AB = 4$, $AC = 6$, 则 $2 < BD < 14$ ③ $S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\triangle ABC}$, 其中正确的个数有 ()



A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3. 个

【答案】C

【解析】

【分析】①通过平行四边形的性质分析、列举全等三角形的对数判断是否为 4 对; ②利用平行四边形对角线互相平分和三角形三边关系求出 BD 的范围; ③通过全等三角形的面积相等, 将四边形 $ABFE$ 的面积转化为 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AB = CD, AD = BC, OA = OC, OB = OD, AB \parallel CD, AD \parallel BC$

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF \\ AO = CO \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{ASA}),$$

同理可证 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$, $\triangle AOB \cong \triangle COD$, $\triangle AOD \cong \triangle COB$, $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$,

$\therefore$ 图中共有 6 对全等三角形, 结论①错误;

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad BD = 2BO$$

在 $\triangle ABO$ 中, 根据三角形三边关系: $|AB - AO| < BO < AB + AO$,

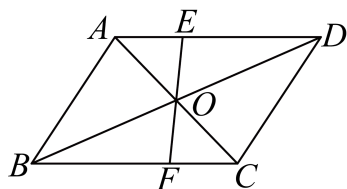
$$\therefore |4 - 3| < BO < 4 + 3, \quad \text{即 } 1 < BO < 7$$

$$\therefore BD = 2BO$$

$$\therefore 2 < BD < 14, \quad \text{结论②正确}$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COF},$$



$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOC}, \quad S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOF} + S_{\triangle COF}$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOF} + S_{\triangle AOE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOF} + S_{\triangle AOE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOE} + S_{\triangle BOF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\triangle ABC}, \quad \text{结论③正确}$$

综上, 正确的结论是②和③. 即选项 C 符合题意.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 如果从多边形的一个顶点出发可以作 3 条对角线, 那么它的内角和是_____.

【答案】 720° ## 720 度

【解析】

【分析】 根据从多边形的一个顶点可以作对角线的条数公式 $(n-3)$ 求出边数, 再根据多边形内角和公式求解即可得解.

【详解】 $\because$ 多边形从一个顶点出发可引出 3 条对角线,

$$\therefore n-3=3,$$

解得 $n=6$.

$$\text{十边形的内角和为: } 180^{\circ} \times (6-2) = 720^{\circ},$$

故答案为: 720° .

【点睛】 本题考查了一个顶点出发的对角线条数以及多边形内角和公式, n 边形的内角和为 $180^{\circ} \times (n-2)$, 牢记公式是解题的关键.

8. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 140^{\circ}$, 则 $\angle B$ 的度数是_____.

【答案】 110° ## 110 度

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质可得 $\angle A = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180^{\circ}$, 即可求 $\angle B$ 的度数.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \angle A + \angle B = 180^{\circ}, \text{ 且 } \angle A + \angle C = 140^{\circ},$$

$$\therefore \angle A = 70^{\circ},$$

$$\therefore \angle B = 110^{\circ},$$

故答案为: 110° .

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 掌握平行四边形的性质是本题的关键.

9. 已知 $\square ABCD$ 的周长为 28cm, 两条对角线相交于点 O , $\triangle BCO$ 的周长比 $\triangle ABO$ 的周长多 4cm, 则 CD 的长度是_____cm.

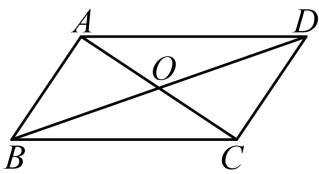
【答案】 5

【解析】

【分析】 由平行四边形的周长可求得 $AB + BC$ 的长, 再根据平行四边形的性质及 $\triangle BCO$ 的周长比 $\triangle ABO$ 的周长多 4cm, 可得 $BC - AB$ 的值, 进而求得 CD 的长.

【详解】 解: 如图: $\because \square ABCD$ 的周长为 28cm,

$$\therefore AB + BC = \frac{1}{2} \times 28 = 14\text{cm}, \quad CD = AB,$$



$\because \triangle BCO$ 的周长比 $\triangle ABO$ 的周长多 4cm ,

$$\therefore BC + BO + CO = AB + AO + BO + 4, \text{ 即 } BC = AB + 4,$$

$$\therefore AB + AB + 4 = 14\text{cm},$$

解得: $AB = 5\text{cm}$,

$$\therefore CD = AB = 5\text{cm}.$$

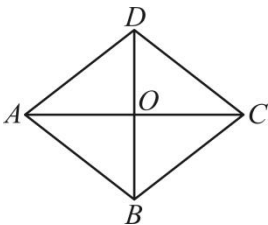
10. 菱形的边长为 5cm , 两条对角线之比为 $3:4$, 则菱形一边上的高的长度为_____ cm .

【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质, 勾股定理, 如图, 令 $BD = 6x\text{cm}$, 则 $AC = 8x\text{cm}$, 先利用菱形的性质及勾股定理求出 $BD = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, 设菱形 $ABCD$ 一边上的高的长度为 $h\text{ cm}$, 再根据菱形的面积公式和平行四边形的面积公式求出 h 即可.

【详解】 解: 如图: 菱形 $ABCD$ 中, $BD : AC = 3 : 4$,



令 $BD = 6x\text{cm}$, 则 $AC = 8x\text{cm}$,

$$\therefore OB = OD = \frac{1}{2} BD = 3x\text{cm}, \quad OA = OC = \frac{1}{2} AC = 4x\text{cm},$$

$\because ABCD$ 为菱形, 边长为 5cm ,

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 5\text{cm}, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } AB^2 = OA^2 + OB^2,$$

$$\therefore 5^2 = (4x)^2 + (3x)^2,$$

解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ (负值舍去),

$$\therefore BD = 6\text{cm}, \quad AC = 8\text{cm},$$

设菱形 $ABCD$ 一边上的高的长度为 h cm,

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 5h,$$

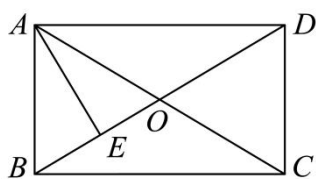
$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 5h,$$

$$\text{解得 } h = \frac{24}{5},$$

即菱形一边上的高的长度为 $\frac{24}{5}$ cm,

故答案为: $\frac{24}{5}$.

11. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$, 垂足为 E , 且 $BE:ED=1:3$, $AB=4$ cm, 则 $BD=$ _____ cm.



【答案】 8

【解析】

【分析】 由矩形的性质得 $OA=OB=OD=\frac{1}{2}BD$, 进而可证 AE 垂直平分 OB , 可得 $OA=AB=4$ cm,

即可得解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA=OB=OD=\frac{1}{2}BD,$$

$$\because BE:ED=1:3,$$

$$\therefore BE=\frac{1}{4}BD,$$

$$\therefore OE=OB-BE=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{4}BD=\frac{1}{4}BD,$$

$$\therefore BE=OE,$$

$$\because AE \perp BD,$$

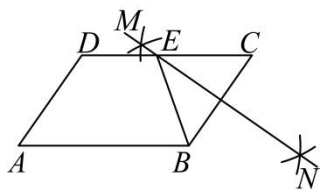
$$\therefore AE \text{ 垂直平分 } OB,$$

$$\therefore OA=AB=4 \text{ cm},$$

$$\therefore BD=2OA=8 \text{ cm}.$$

12. 已知 $\square ABCD$ 中, $\angle A=55^\circ$, 分别以点 B , 点 C 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径画弧, 分别交于点

M , N , 作直线 MN 交 DC 于点 E , 则 $\angle ABE$ 的度数是_____.



【答案】 70°

【解析】

【分析】 先由平行四边形性质求出 $\angle ABC$ 和 $\angle C$ 的度数, 再根据尺规作图得出 MN 是 BC 的垂直平分线, 利用等腰三角形等边对等角求出 $\angle EBC$, 最后通过角的差即可计算出 $\angle ABE$ 的度数.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle A = 55^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 125^\circ, \quad \angle C = \angle A = 55^\circ,$$

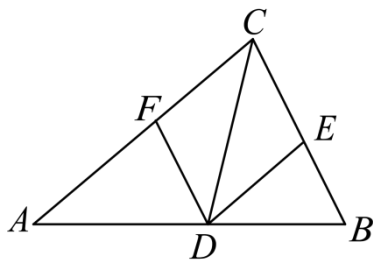
由作图可知, 直线 MN 是线段 BC 的垂直平分线,

$$\therefore EB = EC,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle C = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 125^\circ - 55^\circ = 70^\circ.$$

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点, $DE \parallel AC$, 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$, 交 AC 于点 F , 有下列条件: ① $\angle ACB = 90^\circ$; ② CD 平分 $\angle ACB$; ③ $CD \perp AB$, 且 E 是 BC 的中点. 选择条件_____能使四边形 $DECF$ 是菱形.



【答案】

②③

【解析】

【分析】 先说明四边形 $DECF$ 是平行四边形, 再根据菱形的判定定理逐个判断即可.

【详解】 解: $\because DE \parallel AC, DF \parallel BC$,

$$\therefore \text{四边形 } DECF \text{ 是平行四边形, } \angle DCF = \angle CDE, \quad \angle ACD = \angle CDE,$$

当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时,

四边形 $DECF$ 是矩形, 不是菱形, 则①不符合题意;

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD$,

$\therefore \angle CDE = \angle DCE$,

$\therefore CE = DE$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是菱形, 则②符合题意;

$\because CD \perp AB$, 且 E 是 BC 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = CE$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是菱形, 则③符合题意;

所以选择②③能使四边形 $DECF$ 是菱形.

14. 直角三角形两直角边长为 3 和 4, 则这个三角形重心到直角顶点的距离为_____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】先利用勾股定理求出斜边长, 再根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半得到斜边中线的长度, 最后利用重心的性质计算即可.

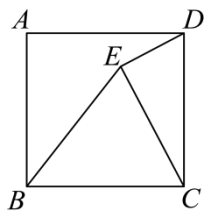
【详解】解: 由勾股定理得, 该直角三角形的斜边长为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

该直角三角形的斜边上的中线长为 $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$,

$\because$ 三角形的重心到一个顶点的距离等于它到该顶点对边中点的距离的两倍,

$\therefore$ 重心到直角顶点的距离等于斜边中线长的 $\frac{2}{3}$, 即为 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$.

15. 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 内部一点, 连接 BE 、 CE 、 DE , $BE = CD$, 若 $\angle CED = 91^\circ$, $\angle CDE = 63^\circ$, 则 $\angle BEC$ 的度数为_____°.



【答案】 64

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质, 等边对等角, 三角形的内角和定理, 根据三角形的内角和定理, 求出 $\angle DCE$ 的度数, 角的和差关系求出 $\angle BCE$ 的度数, 等边对等角即可得出结果.

【详解】解: $\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, BC = CD,$$

$$\because \angle CED = 91^\circ, \angle CDE = 63^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - 91^\circ - 63^\circ = 26^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ,$$

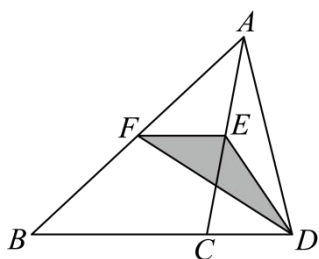
$$\because BE = CD,$$

$$\therefore BE = BC,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE = 64^\circ;$$

故答案为：64

16. 如图，在 $\triangle ABD$ 中， C 是 BD 上一点，且 $BC = 2CD$ ，若 E 、 F 分别是 AC 、 AB 的中点， $\triangle ABD$ 的面积为 24，则 $\triangle DEF$ 的面积为_____.

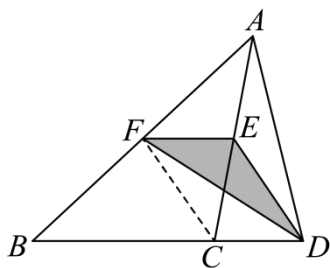


【答案】4

【解析】

【分析】由 $BC = 2CD$ ，可得 $S_{\triangle ABC} = 16$ ， $S_{\triangle ACD} = 8$ ，结合 E 、 F 分别是 AC 、 AB 的中点，可得 $EF \parallel BC$ ，进一步可得答案.

【详解】解：连接 CF .



$$\because \triangle ABD \text{ 的面积为 } 24, BC = 2CD,$$

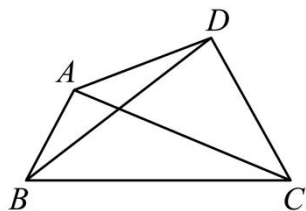
$$\therefore S_{\triangle ABC} = 16, S_{\triangle ACD} = 8,$$

$\because E$ 、 F 分别是 AC 、 AB 的中点，

$$\therefore EF \parallel BC, S_{\triangle ACF} = S_{\triangle BCF} = 8, S_{\triangle AEF} = S_{\triangle CEF} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle EFD} = S_{\triangle EFC} = 4.$$

17. 将连接四边形对边中点的线段称为“中对线”. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD = 6$, 且两条对角线的夹角为 60° , 则该四边形较短的“中对线”的长为_____.

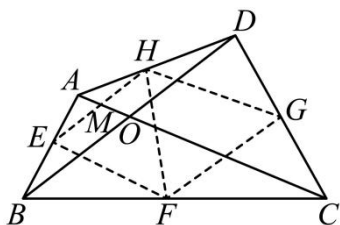


【答案】3

【解析】

【分析】此题考查的是三角形的中位线定理, 根据三角形中位线定理可得菱形 $EFGH$, 然后根据菱形的性质及等边三角形的性质可得答案.

【详解】解: 如图, 取四边的中点, 依次连接起来, 设 AC 与 EH 交点 M ,



$\therefore EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = 3, \quad EH \parallel BD,$$

$$\text{同理 } FG = \frac{1}{2}BD = 3, FG \parallel BD, EF = \frac{1}{2}AC = 3, \quad EF \parallel AC, \quad HG = \frac{1}{2}AC = 3, \quad HG \parallel AC,$$

$$\therefore EF \parallel HG \parallel AC, \quad EF = FG = HG = HE,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = 3, \quad EH \parallel BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ = \angle AME,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle FEH = \angle AME = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle HEF$ 为等边三角形,

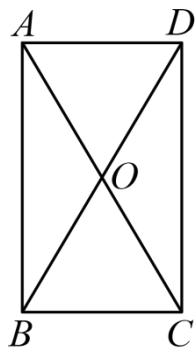
$$\therefore HF = EH = 3,$$

$\therefore$ 较短的“中对线”长度为3.

故答案为: 3.

18. 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 3$, 对角线 AC 、 BD 交于 O , P 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADP$ 绕点 A 顺时针旋

转，使点 D 恰好落在点 O 处，点 P 落在点 P' ，那么 $P'B =$ _____.

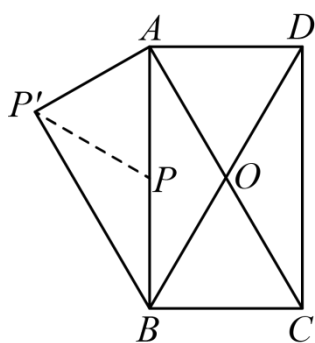


【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，矩形的性质，勾股定理，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.
由旋转的性质和矩形的性质可证 $\triangle AOD$ 为等边三角形，可得 $AD = AO = OD = 3$ ，由勾股定理可求 AB 的长，通过证明 $\triangle ABP'$ 为直角三角形，由勾股定理可求解.

【详解】 解： 如图所示，



由旋转的性质可知 $AD = AO$ ，

由矩形的性质可知 $AO = OD$ ，

$\therefore \triangle AOD$ 为等边三角形，

$\therefore AD = AO = OD = 3$ ，

$\therefore BD = 6$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理得， $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore AP' = AP = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

又 $\because$ 旋转角 $\angle P'AP = \angle DAO = 60^\circ$ ，

$\therefore PP' = PA = PB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore \angle PAP' = \angle PP'A, \angle PBP' = \angle PP'B,$$

$$\text{且 } \angle PAP' + \angle PP'A + \angle PBP' + \angle PP'B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AP'B = \angle PP'B + \angle PP'A = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABP'$ 为直角三角形,

$$\text{在 Rt}\triangle ABP' \text{ 中, } P'B = \sqrt{AB^2 - P'A^2} = \frac{9}{2},$$

故答案为: $\frac{9}{2}$.

三、解答题 (第 19-21 题, 每题 6 分, 第 22-24 题, 每题 8 分, 第 25 题 10 分, 共 52 分)

19. 一个多边形的内角和比四边形的内角和多 720° , 并且这个多边形的各内角相等, 求这个多边形的一个外角的度数.

【答案】 45°

【解析】

【分析】 设这个多边形的边数为 n , 根据多边形内角和公式建立方程可推出这个多边形为八边形, 再根据多边形的外角和为 360 度可求出答案.

【详解】 解: 设这个多边形的边数为 n ,

$$\text{由题意得, } 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ + 720^\circ,$$

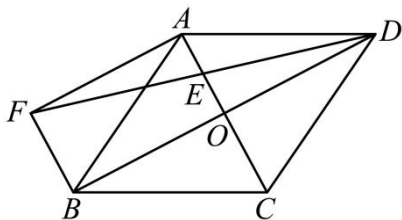
$$\text{解得 } n = 8,$$

$\therefore$ 这个多边形为八边形,

$\therefore$ 这个多边形的各内角相等,

$$\therefore \text{这个多边形的一个外角的度数为 } \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

20. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , E 为 OA 的中点. 连接 DE 并延长至点 F , 使得 $EF = DE$. 连接 AF , BF . 求证: 四边形 $AFBO$ 为平行四边形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查三角形中位线定理, 平行四边形性质与判定, 证明 OE 为 $\triangle DFB$ 的中位线, 则 $OE \parallel BF$, $BF = 2OE$, 得到 $OA = BF$, $OA \parallel BF$ 即可得证.

【详解】证明： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$\therefore BO = DO$,

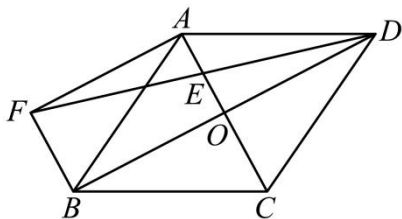
又 $\because E$ 为 OA 的中点,

$\therefore OE$ 为 $\triangle DFB$ 的中位线,

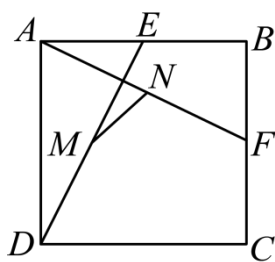
$\therefore OE \parallel BF$, $BF = 2OE$,

$\therefore OA = BF$, $OA \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形为 $AFBO$ 平行四边形;



21. 如图所示, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$. E 、 F 分别为边 AB 、 BC 的中点, 连接 AF 、 DE , 点 N 、 M 分别为 AF 、 DE 的中点, 连接 MN , 求 MN 的长度.



【答案】 $MN = 1$

【解析】

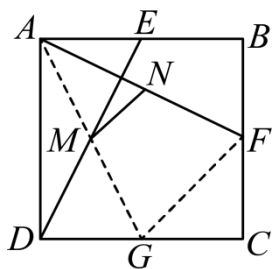
【分析】 本题主要考查了正方形的性质, 全等三角形的性质和判定、勾股定理, 三角形中位线定理, 正确做出辅助线且证出 $AM = MG$ 是解决问题的关键.

连接 AM , 延长 AM 交 CD 于 G , 连接 FG , 由正方形 $ABCD$ 推出 $AB = CD = BC = 2\sqrt{2}$, $AB \parallel CD$,

$\angle C = 90^\circ$, 证得 $\triangle AEM \cong \triangle GDM$, 得到 $AM = MG$, $AE = DG = \frac{1}{2}AB$, 根据三角形中位线定理得到

$MN = \frac{1}{2}FG$, 由勾股定理求出 FG 即可得到 MN .

【详解】 解: 连接 AM , 延长 AM 交 CD 于 G , 连接 FG ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = CD = BC = 2\sqrt{2}, \quad AB \parallel CD, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEM = \angle GDM, \angle EAM = \angle DGM,$$

$\because M$ 为 DE 的中点,

$$\therefore ME = MD,$$

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle GDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAM = \angle DGM \\ \angle AEM = \angle GDM \\ ME = MD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle GDM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AM = MG, \quad AE = DG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD = \sqrt{2},$$

$\because$ 点 N 为 AF 的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}FG,$$

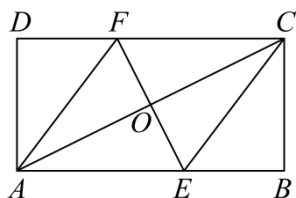
$\because F$ 为 BC 的中点,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2},$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 + CG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\therefore MN = 1.$$

22. 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 O 为对角线 AC 的中点, 过点 O 作 $EF \perp AC$ 交边 AB 、 CD 于点 E 、 F , 联结 AF 、 CE .



(1) 求证：四边形 $AECF$ 为菱形；

(2) 如果四边形 $ABCD$ 为矩形， $AD=8$ ， $CD=16$ ，求 EF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质，菱形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题关键.

(1) 由矩形的性质可 $CF \parallel AE$ ，进而得出 $\angle FCO = \angle EAO$ ，结合 O 为对角线 AC 的中点得出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，即 $CF = AE$ ，即可得出四边形 $AECF$ 是平行四边形，结合 $EF \perp AC$ 即可得出四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 根据勾股定理求出 AC ，然后根据菱形的性质和勾股定理求出 OF ，进而可以解决问题.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore CF \parallel AE,$$

$$\therefore \angle FCO = \angle EAO,$$

$\because O$ 为对角线 AC 的中点，

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CF = AE,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$$\therefore EF \perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AD=8$ ， $CD=16$ ，

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 8\sqrt{5},$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{5},$$

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore DF = CD - CF = 16 - AF,$$

$$\because AD^2 + DF^2 = AF^2,$$

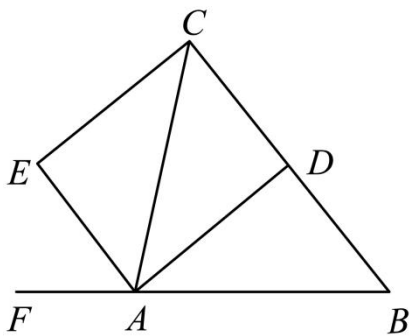
$$\therefore 8^2 + (16 - AF)^2 = AF^2,$$

$$\therefore AF = 10,$$

$$\therefore OF = \sqrt{AF^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore EF = 2OF = 4\sqrt{5}.$$

23. 如图, 在三角形 ABC 中, $AB = AC$, AD 、 AE 分别是 $\angle BAC$ 与它的邻补角的平分线, $CE \perp AE$ 于点 E .



(1) 求证: 四边形 $ADCE$ 是矩形;

(2) 连接 ED 交 AC 于点 O , 若 $\angle AOE = 2\angle B$, 求证: 四边形 $ADCE$ 是正方形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 首先根据等腰三角形三线合一性质得到 $AD \perp BC$, 然后利用角平分线的概念得到 $\angle EAD = 90^\circ$, 然后结合 $CE \perp AE$ 即可证明四边形 $ADCE$ 是矩形;

(2) 首先根据等边对等角得到 $\angle ACB = \angle B$, 然后有矩形的性质得到 $\angle ACB = \angle ODC$, 然后结合 $\angle AOE = 2\angle B$ 得到 $\angle COD = 90^\circ$, 即可证明出四边形 $ADCE$ 是正方形.

【小问1详解】

解: $\because AB = AC$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线

$$\therefore AD \perp BC, \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$\because AE$ 是 $\angle CAF$ 的平分线

$$\therefore \angle CAE = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle CAF$$

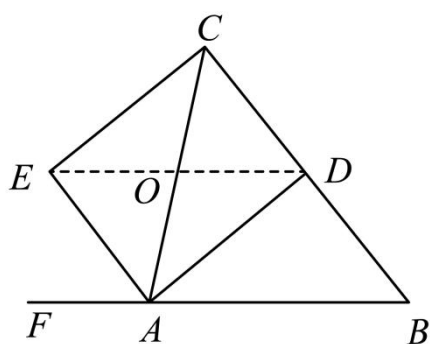
$$\therefore \angle EDA = \angle CAE + \angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAF + \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAF = 90^\circ$$

$\therefore CE \perp AE$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形;

【小问 2 详解】

解: 如图所示,



$\because AB = AC$

$\therefore \angle ACB = \angle B$

$\because$ 四边形 $ADCE$ 是矩形

$\therefore \angle ACB = \angle ODC$

$\therefore \angle AOE = 2\angle B$

$\therefore \angle COD = 2\angle OCD = 2\angle ODC$

$\therefore \angle COD + \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ$

$\therefore \angle COD = 90^\circ$

$\therefore ED \perp AC$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是正方形.

【点睛】 此题考查了矩形的性质和判定, 正方形的性质和判定, 等腰三角形的性质和判定等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

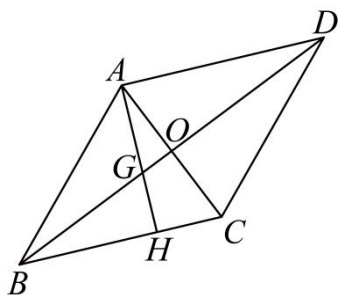
24. 我们定义: 若一个四边形的两条对角线互相垂直, 且其中一条对角线平分另一条对角线, 则称这个四边形为“和谐四边形”.

(1) 请从以下选项中选出属于“和谐四边形”的选项填在横线上. _____

A. 矩形 B. 菱形 C. 等腰梯形

(2) 已知四边形 $ABCD$ 是“和谐四边形”，对角线 $AC \perp BD$ ， AC 平分 BD 于点 O 若 $BD = 8$ ， $AC = 6$ ，求四边形 $ABCD$ 面积_____.

(3) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， AC 平分 $\angle BAD$ ，过点 A 作 $AH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，交 BD 于点 G ， $\angle ABH = 45^\circ$ ， $BG = AC$ ．求证：四边形 $ABCD$ 是“和谐四边形”．



【答案】(1) B (2) 24

(3) 详见解析

【解析】

【分析】(1) 根据“和谐四边形”的定义进行判断即可；

(2) 由于对角线互相垂直，所以四边形的面积可化为 $\frac{1}{2}AO \cdot BD + \frac{1}{2}BD \cdot OC$ 的和，再求解即可；

(3) 先证明 $\text{Rt}\triangle GHB \cong \text{Rt}\triangle CHA$ (HL)，再证得 $AC \perp BD$ ，求得 $AB = AD$ ，由等腰三角形三线合一性质可得 $OB = OD$ ，从而证得结论．

【小问1详解】

解： $\because$ 菱形的两条对角线互相垂直，且两条对角线互相平分，符合“和谐四边形”的定义，

故选：B；

【小问2详解】

解：设 AC 与 BD 相交于点 O ，

$\because AC \perp BD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 的面积为： $\frac{1}{2}BD \cdot OA$ ，

$\triangle CBD$ 的面积为： $\frac{1}{2}BD \cdot OC$ ，

四边形的面积： $\frac{1}{2}AO \cdot BD + \frac{1}{2}BD \cdot OC$ ，

$= \frac{1}{2}BD \cdot AC$ ，

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8,$$

$$= 24,$$

故答案为：24；

【小问3详解】

证明：∵ $AH \perp BC$ ， $\angle ABH = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle BHA = \angle BAH = 45^\circ, \quad \angle GHB = \angle CHA = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = AH,$$

在 $\text{Rt}\triangle GHB$ 和 $\text{Rt}\triangle CHA$ 中，

$$\begin{cases} BH = CH \\ BG = AC \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle GHB \cong \text{Rt}\triangle CHA (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle HBG = \angle HAC,$$

$$\therefore \angle BGH = \angle AGO,$$

$$\therefore \angle AOG = \angle BHG = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OAD,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ADO,$$

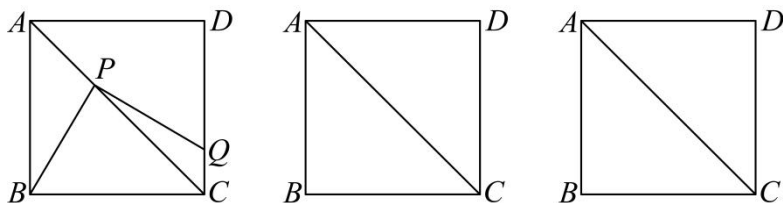
$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore OB = OD \quad (\text{三线合一性质}),$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是“和谐四边形”}.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，直角三角形的性质及三角形的面积，解决本题的关键是熟练掌握对“和谐四边形”的理解。

25. 如图，已知：正方形 $ABCD$ 边长为 1，点 P 是对角线 AC 上一点， $PQ \perp BP$ ， PQ 交射线 DC 于点 Q 。



(1) 当点 Q 在边 CD 上时，线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系？试证明你观察得到的结论；

(2) 当点 Q 在边 DC 的延长线上, $\triangle PCQ$ 是等腰三角形时, 求 PC 的长;

(3) 当以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ 时, 请直接写出 PC 的长是_____.

【答案】(1) $PB = PQ$; 证明见详解

(2) $\sqrt{2} - 1$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由正方形的性质可得 $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F , 则 $PE = PF$, 四边形 $PECF$ 为矩形, 证明 $\triangle BPE \cong \triangle QPF$ (ASA), 即可得解;

(2) 由正方形的性质和勾股定理可得 $\angle BAC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$, $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$, 由点 Q 在边 DC 的延长线上可得 $\angle PCQ$ 为钝角, 证明 $\angle ABP = \angle APB$, 得出 $AP = AB = 1$, 即可得解;

(3) 分两种情况: 当点 Q 在线段 CD 上时, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ; 当点 Q 在 DC 的延长线上时, 作 $PG \perp AB$ 于 G , 延长 GP 交 CD 于 H ; 分别求解即可.

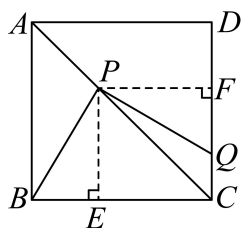
【小问 1 详解】

解: $PB = PQ$,

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$,

如图, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ,



则 $PE = PF$, $\angle PEC = \angle BCO = \angle PFC = \angle PEB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为矩形,

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$,

$\therefore PQ \perp BP$,

$\therefore \angle BPQ = 90^\circ = \angle EPF$,

$$\therefore \angle BPQ - \angle EPQ = \angle EPF - \angle EPQ,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle QPF,$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle QPF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PB = PQ;$$

【小问 2 详解】

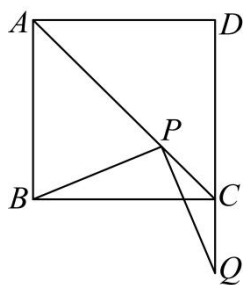
解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 1,

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ, \quad AB = BC = 1,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$

$\because$ 点 Q 在边 DC 的延长线上,

$$\therefore \angle PCQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ 为钝角},$$



$\because \triangle PCQ$ 是等腰三角形,

$$\therefore CP = CQ,$$

$$\therefore \angle Q = \angle CPQ,$$

$$\because \angle Q + \angle CPQ = \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle Q = \angle CPQ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore PQ \perp BP,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle BPQ - \angle CPQ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 180^\circ - \angle APB - \angle BAP = 67.5^\circ,$$

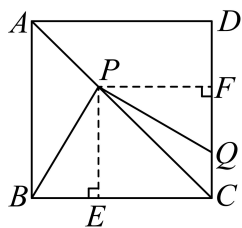
$$\therefore \angle ABP = \angle APB,$$

$$\therefore AP = AB = 1,$$

$$\therefore PC = AC - AP = \sqrt{2} - 1;$$

【小问 3 详解】

解：如图，当点 Q 在线段 CD 上时，作 $PE \perp BC$ 于 E ， $PF \perp CD$ 于 F ，



由 (1) 可得 $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$ ，四边形 $PECF$ 为矩形， $\triangle BPE \cong \triangle QPF$ ，

$\therefore \triangle PEC$ 为等腰直角三角形， $S_{\triangle BPE} = S_{\triangle QPF}$ ，

$\therefore PE = CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为正方形，

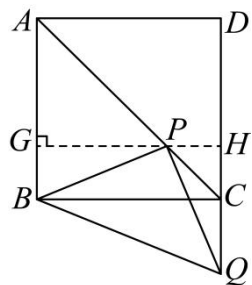
$\therefore S_{\text{四边形}BPQC} = S_{\triangle BPE} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\triangle QPF} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\text{正方形}PECF}$ ，

$\therefore$ 以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，

$\therefore S_{\text{正方形}PECF} = \frac{1}{3}$ ，即 $PE^2 = CE^2 = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore PC = \sqrt{PE^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ；

当点 Q 在 DC 的延长线上时，作 $PG \perp AB$ 于 G ，延长 GP 交 CD 于 H ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle HGB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GBCH$ 为矩形，

$\therefore \angle GHC = 90^\circ$ ， $BG = CH$ ， $BC = GH = 1$ ，

$\therefore \triangle CHP$ 为等腰直角三角形，

$\therefore HC = PH = BG$ ，

$\therefore PQ \perp BP$ ，

$$\therefore \angle GBP + \angle BPG = \angle BPG + \angle GQH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GBP = \angle QPH,$$

$$\therefore \triangle BPG \cong \triangle PQH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BP = PQ, \quad GP = QH, \quad BG = PH$$

$$\text{设 } BG = PH = CH = a, \text{ 则 } QH = GP = 1 - a,$$

$$\therefore \text{以 } P、B、C、Q \text{ 为顶点的四边形的面积为 } \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BPCQ} = S_{\text{梯形}BGHQ} - S_{\triangle BPG} - S_{\triangle PCH} = \frac{1}{2}(a+1-a) \times 1 - \frac{1}{2}a \times (1-a) - \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PH = CH = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{综上所述, } PC \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{3}.$$