

2025-2026 学年八年级数学下学期 3 月学情自测

提升卷 · 全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 新教材沪教版八年级下册第 23 章~24.2。

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 十二边形的外角和是 ()

- A. 180° B. 360° C. 1800° D. 2160°

【答案】B

【分析】多边形的外角和都是 360° , 根据该性质即可得出答案。

【详解】解: 对边形的外角和为 360° ,

故选 B。

【点睛】本题主要考查的是多边形的外角和定理, 属于基础题型。解决这个问题的关键就是要知道多边形的外角和定理。

2. 下列所述图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 菱形 D. 平行四边形

【答案】C

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解。

【详解】解: A、等腰三角形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误;

B、等边三角形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误;

C、菱形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故本选项正确;

D、平行四边形不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项错误。

故选 C。

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念, 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折

叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 后两部分重合.

3. 不能判定一个四边形是平行四边形的条件是 ().

- A. 两组对边分别平行 B. 一组对边平行，另一组对边相等
C. 一组对边平行且相等 D. 两组对边分别相等

【答案】B

【分析】根据平行四边形的判定定理，即可求解.

【详解】 $\because$ ①两组对边分别平行的四边形是平行四边形；②两组对边分别相等的四边形是平行四边形；③两组对角分别相等的四边形是平行四边形；④对角线互相平分的四边形是平行四边形；⑤一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

$\therefore$ A、D、C 均符合是平行四边形的条件，B 则不能判定是平行四边形.

故选 B.

4. 下列说法正确的有 ()

- ①对角线互相平分的四边形是平行四边形；
②平行四边形的对角互补；
③两个全等的三角形可以拼成一个平行四边形；
④平行四边形的四内角之比可以是 $2:3:2:3$.

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

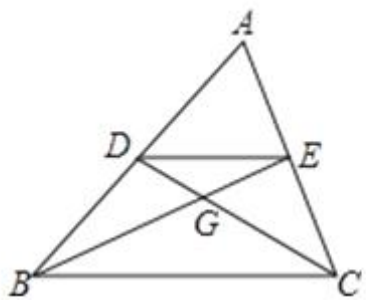
【分析】本题主要考查的是平行四边形的性质，属于基础题型. 理解平行四边形的性质是解决这个问题的关键. 根据平行四边形的性质进行逐一判断即可得出答案.

【详解】解：①对角线互相平分的四边形是平行四边形，故正确；
②平行四边形的对角相等，邻角互补，故错误；
③两个全等的三角形可以拼成一个平行四边形，故正确；
④平行四边形的四内角之比可以是 $2:3:2:3$ ，故正确.

则正确的有 3 个，

故选：C.

5. 如图， $\triangle ABC$ 的中线 BE 与 CD 交于点 G，连接 DE，下列结论不正确的是 ()



- A. 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心
 B. $DE \parallel BC$
 C. $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADE}$
 D. $BG = 2GE$

【答案】C

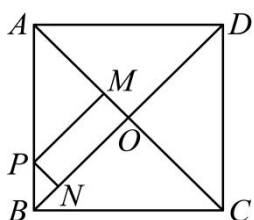
【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的中线 BE 与 CD 交于点 G ， $\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $\therefore DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$ ， 所以选项 A、B 正确；

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， 根据重心性质或利用三角形相似可得 $BG = 2GE$ ， $\therefore$ 选项 D 正确；

由重心性质， 可知 $\triangle ABC$ 的面积 $= 2\triangle ABE = 4\triangle ADE$ 的面积， 所以选项 C 错误。

故选 C.

6. 如图， 在正方形 $ABCD$ 中， 点 P 是 AB 上任意一点， $PM \perp AC$ ， $PN \perp BD$ ， 垂足分别为点 M 、 N ， 若 $BD = 10$ ， 则 $PM + PN$ 的值为 ().

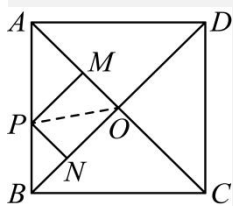


- A. 4
 B. 5
 C. 8
 D. 10

【答案】B

【分析】连接 OP ， 由正方形的性质可得 $OA = OB = \frac{1}{2}BD = 5$ ， $AC \perp BD$ ， 结合三角形的面积公式计算出 $PM + PN$ 即可。

【详解】解： 如图， 连接 OP ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $BD = 10$ ，

$$\therefore OA = OB = \frac{1}{2} BD = 5, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{25}{2},$$

$$\therefore PM \perp AC, \quad PN \perp BD,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2} PM \cdot OA + \frac{1}{2} PN \cdot OB = \frac{5}{2} PM + \frac{5}{2} PN,$$

$$\therefore \frac{5}{2} PM + \frac{5}{2} PN = \frac{25}{2},$$

$$\therefore PM + PN = 5.$$

【点睛】用等面积法计算三角形的高是解题关键.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(2m-3, 1-2m)$ 在第四象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > \frac{3}{2}$

【详解】解: $\because$ 点 $A(2m-3, 1-2m)$ 在第四象限,

$\therefore$ 点 A 的横坐标是正数, 纵坐标是负数,

$$\text{即} \begin{cases} 2m-3 > 0 \\ 1-2m < 0 \end{cases},$$

解得 $m > \frac{3}{2}$.

8. 在平面直角坐标系中, 点 $A(2, 3)$, 点 $B(-2, -3)$. 则 AB 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{13}$

【分析】本题考查平面直角坐标系中两点间距离, 解题的关键是掌握勾股定理公式的应用.

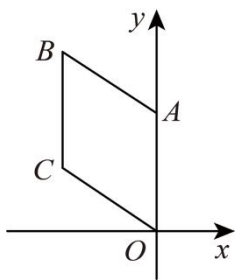
利用勾股定理进行求解即可.

【详解】解: 根据勾股定理得,

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

故答案为: $2\sqrt{13}$.

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴上. 若点 C 的坐标为 $(-3, 2)$, 则点 A 的坐标为_____.



【答案】 $(0, \sqrt{13})$

【分析】 利用勾股定理求得 OC 的长，再利用菱形的性质求得 $OA = OC = \sqrt{13}$ ，据此求解即可.

【详解】 解： $\because$ 点 C 的坐标为 $(-3, 2)$,

$$\therefore OC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore OA = OC = \sqrt{13},$$

$\therefore A$ 点的坐标为 $(0, \sqrt{13})$.

10. 过某个多边形 1 个顶点的所有对角线，将这个多边形分成 7 个三角形，则它的内角和是_____.

【答案】 1260°

【分析】 本题考查的是多边形的边数以及内角和；过多边形一个顶点的所有对角线将多边形分成 $(n-2)$ 个三角形，由此求出边数，再根据内角和公式计算内角和

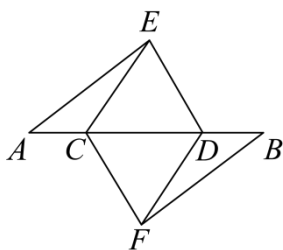
【详解】 解： 设这个多边形的边数为 n ，由题意得 $n-2=7$ ，
解得 $n=9$ ，

所以这个多边形是九边形.

$$\text{内角和为 } (9-2) \times 180^\circ = 7 \times 180^\circ = 1260^\circ.$$

故答案为： 九， 1260° .

11. 如图，点 A 、 B 在 $\square ECFD$ 的对角线 CD 所在的直线上且 $AD = BC$. 若 $\angle DBF = 35^\circ$ ，则 $\angle DAE =$ _____.



【答案】35 度

【分析】本题主要运用全等三角形的判定定理(SSS)以及全等三角形的性质来求解. 先通过线段的等量关系证明三角形全等, 再利用全等三角形对应角相等求出角度.

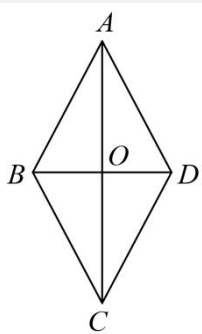
【详解】解: $\because AD = BC$,
 $\therefore AD - CD = BC - CD$,
即 $AC = BD$,
 $\because \square ECFD$ 中, $EC = DF$, $EC \parallel DF$
 $\therefore \angle ECD = \angle CDF$
 $\therefore \angle ACE = \angle BDF$,
 $\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF$
 $\therefore \angle DAE = \angle DBF = 35^\circ$

12. 已知菱形的周长为20cm, 一条对角线长为6cm, 则这个菱形的面积是_____ cm^2 .

【答案】24

【分析】题目主要考查菱形的性质及勾股定理解三角形, 理解题意是解题关键.
根据菱形的性质, 先求另一条对角线的长度, 再运用菱形的面积等于对角线乘积的一半求解.

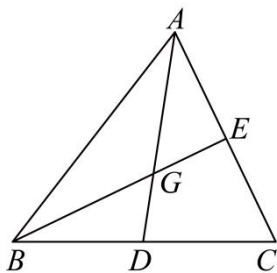
【详解】解: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $BD = 6$.



$\therefore AB = 5$, $BO = 3$,
 $\therefore AO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $AC = 8$.
 $\therefore$ 面积 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

故答案为: 24.

13. 如图, 点 D , E 分别是 BC , AC 中点, AD 与 BE 交于点 G . 若 $BG = 6$, 则 $EG =$ _____.



【答案】3

【分析】本题考查了三角形重心的性质.

根据题意得到 G 点为 ABC 的重心, 再结合 $EG = \frac{1}{2}BG$ 计算即可.

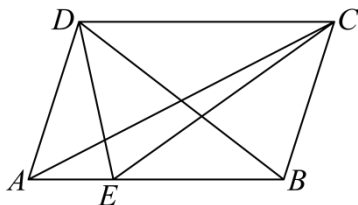
【详解】解: $\because$ 点 D, E 分别是 BC, AC 中点, AD 与 BE 交于点 G ,

$\therefore G$ 点为 ABC 的重心,

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

故答案为: 3.

14. 如图, $\square ABCD$ 中, E 是边 AB (不含端点) 上任意一点, 若 $S_{\triangle ADE} = 3$, $S_{\triangle EBC} = 5$, 则 $S_{\triangle BDC} =$ _____.



【答案】8

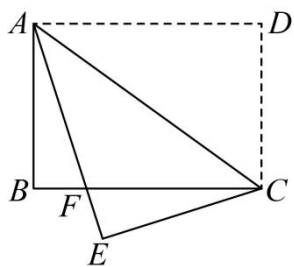
【分析】根据平行四边形的性质可得 $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EBC} = 5 + 3 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BDC} = S_{\triangle DEC} = 8.$$

15. 如图, 矩形 $ABCD$ 沿 AC 折叠, 使点 D 落在点 E 的位置, AE 与 BC 相交于点 F , 若 $AB = 6$, $BC = 8$, 则 BF 的长是_____.



【答案】 $\frac{7}{4}$

【分析】根据矩形与折叠的性质，证明 $\triangle ABF \cong \triangle CEF$ ，得出 $BF = EF$ ，设 $BF = EF = x$ ， $AF = 8 - x$ ，根据勾股定理建立等式，代入数值进行计算，即可作答.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD = 6, BC = AD = 8, \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

$\because$ 折叠，

$$\therefore CD = CE = 6, AE = AD = 8, \angle D = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = CE = 6, \angle B = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CFE,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle CFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = EF,$$

$$\text{设 } BF = EF = x, AF = 8 - x,$$

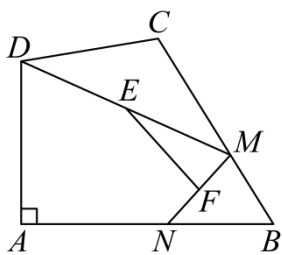
$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF^2 = AF^2 - AB^2,$$

$$\text{即 } x^2 = (8 - x)^2 - 6^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore BF \text{ 的长为 } \frac{7}{4}.$$

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 1$ ， M 、 N 分别是边 BC 、 AB 上的动点（含端点，但点 M 不与点 B 重合）， E 、 F 分别是线段 DM 、 MN 的中点，则 EF 的最大值为_____.

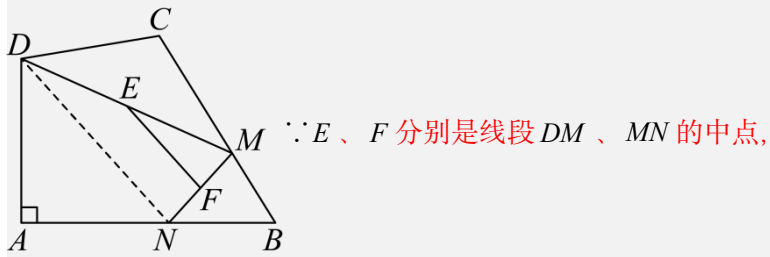


【答案】1

【分析】本题考查中位线的性质、勾股定理，熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

连接 DN ，根据中位线的性质得到 $EF = \frac{1}{2}DN$ ，进而得到 DN 最大时， EF 最大，根据勾股定理求出 DN 的最大值，据此解答即可.

【详解】解：如图，连接 DN ，



$$\therefore EF = \frac{1}{2}DN,$$

$\therefore DN$ 最大时， EF 最大，

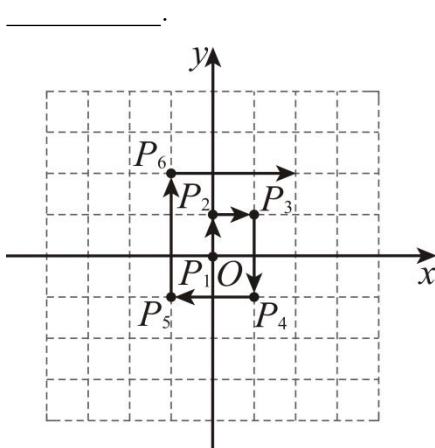
$\therefore$ 当点 N 与 B 重合时， DN 最大，此时 $DN = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 2$ ，

$$\therefore EF = 1,$$

$\therefore EF$ 的最大值为 1.

17. 如图，在平面直角坐标系中，点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 均在边长均为 1 个单位长度网格格点上，其顺序按图中

“ $\rightarrow$ ”方向排列， $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$ ，根据这个规律，点 P_{2026} 的坐标为



【答案】 $(-506, 507)$

【分析】本题主要考查了直角坐标系中的点的特征，坐标系中点的规律，由

$P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$ ，得下标为 4 的倍数的点在第四象限的角平分线上，

被 4 除余 1 的点在第三象限的角平分线上，被 4 除余 2 的点在第二象限的角平分线上，被 4 除余 3 的点在第一象限的角平分线上，横坐标和纵坐标的绝对值都为下标除以 4 的商，由 $2026 \div 4 = 506 \dots 2$ ，所以 P_{2026} 的坐标在第二象限的角平分线上，横坐标为 -506 ，纵坐标为 506 ，然后通过第二象限特点即可求解。

【详解】解： $\because P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1), P_4(1,-1), P_5(-1,-1), P_6(-1,2), \dots$,

$\therefore$ 下标为 4 的倍数的点在第四象限的角平分线上，被 4 除余 1 的点在第三象限的角平分线上，被 4 除余 2 的点在第二象限的角平分线上，被 4 除余 3 的点在第一象限的角平分线上，横坐标和纵坐标的绝对值都为下标除以 4 的商，

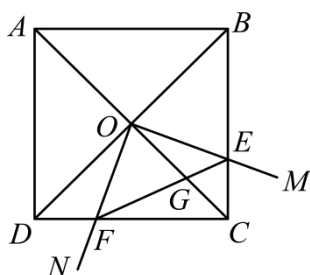
$\because 2026 \div 4 = 506 \dots 2$,

$\therefore P_{2026}$ 的坐标在第二象限的角平分线上，横坐标为 -506 ，纵坐标为 507 ，

$\therefore P_{2026}$ 的坐标为 $(-506, 507)$ ，

故答案为： $(-506, 507)$ 。

18. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线 AC 、 BD 的交点，过点 O 作射线 OM 、 ON 分别交 BC 、 CD 于点 E 、 F ，且 $\angle EOF = 90^\circ$ ， OC 、 EF 交于点 G 。给出下列结论：① $\triangle COE \cong \triangle DOF$ ；② $\triangle OBE \cong \triangle OCF$ ；③ 四边形 $CEOF$ 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$ ；④ $DF^2 + BE^2 = EF^2$ 。其中正确的有_____。（填序号）



【答案】①②③④

【分析】利用正方形的性质，三角形全等的判定和性质，勾股定理，推理判断即可。

【详解】解： $\because$ 正方形 $ABCD$ ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，

$\therefore OA = OB = OC = OD$ ， $\angle BOC = \angle COD = 90^\circ$ ，

$\angle ODF = \angle OCD = \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DOF = 90^\circ - \angle COF = \angle COE$ ， $\angle COF = 90^\circ - \angle COE = \angle BOE$ ，

$\therefore \begin{cases} \angle DOF = \angle COE \\ OD = OC \\ \angle ODF = \angle OCE \end{cases}, \begin{cases} \angle COF = \angle BOE \\ OC = OB \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases}$ ，

$\therefore \triangle COE \cong \triangle DOF$ (ASA), $\triangle OBE \cong \triangle OCF$ (ASA), 故①②正确;

$\therefore COE \cong DOF$,

$\therefore S_{\triangle COE} = S_{\triangle DOF}$,

$\therefore S_{COE} + S_{COF} = S_{DOF} + S_{COF}$,

$\therefore S_{\text{四边形}CEOF} = S_{\triangle COD}$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore S_{\triangle COD} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}$,

$\therefore S_{\text{四边形}CEOF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}$, 故③正确;

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore CF^2 + CE^2 = EF^2$,

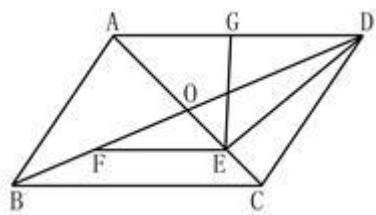
$\therefore CF = BE, DF = CE$,

$\therefore DF^2 + BE^2 = EF^2$, 故④正确;

则正确的结论有①②③④.

三、解答题 (本题共 7 小题, 共 52 分)

19. (本小题 6 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BD=2AB$, AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 、 F 、 G 分别是 OC 、 OB 、 AD 的中点.



(1) 求证: $DE \perp OC$;

(2) 求证: $EG=EF$.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) 证明见解析

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AC 与 BD 相交于点 O , 根据平行四边形的性质, 即可得 $BD=2OD$, $AB=CD$, $AD=BC$, 又由 $BD=2AB$, 可得 $\triangle ODC$ 是等腰三角形, 根据三线合一的性质, 即可证得 $DE \perp OC$;

(2) 由 $DE \perp OC$, 点 G 是 AD 的中点, 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可得 $EG = \frac{1}{2} AD$,

又由三角形中位线的性质，求得 $EF = \frac{1}{2}BC$ ，则可证得 $EG = EF$ 。

【详解】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， AC 与 BD 相交于点 O ，

$$\therefore BD = 2OD, AB = CD, AD = BC.$$

$$\therefore BD = 2AB,$$

$$\therefore OD = AB = CD.$$

$\therefore$ 点 E 是 OC 的中点，

$$\therefore DE \perp OC$$

(2) $\because DE \perp OC$ ，点 G 是 AD 的中点，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}AD;$$

$\therefore$ 点 E 、 F 分别是 OC 、 OB 的中点。

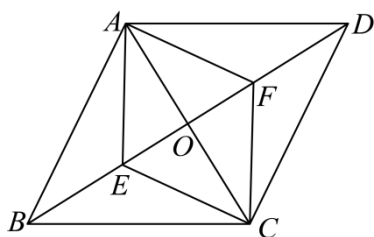
$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC.$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\therefore EG = EF.$$

【点睛】此题考查了平行线的性质、直角三角形的性质、等腰三角形的判定与性质以及三角形中位线的性质。此题综合性较强，难度适中，解题的关键是注意数形结合思想的应用。

20. (本小题 6 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E ， F 是对角线上的点，且 $BE = DF$ ，连接 AE ， CE ， AF ， CF 。



求证四边形 $AECF$ 是菱形

【答案】见详解

【分析】本题主要考查了菱形的判定和性质。

【详解】(1) 证明： $\because ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AO = OC, BO = OD,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore BO - EO = OD - OF,$$

$$\therefore EO = OF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

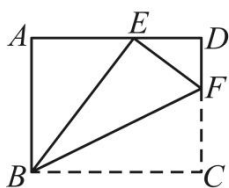
又 $\because AB=AD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore AC \perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

21. (本小题 6 分) 已知, 四边形 $ABCD$ 为长方形, $AB=8$, $BC=10$, 点 E 由点 D 向 DA 运动, 点 F 由点 D 向 DC 运动. 将 CBF 沿 BF 折叠, 点 C 恰好落在点 E 处时, 求此时 BF 的长;



【答案】 $BF = 5\sqrt{5}$

【分析】 根据折叠可得 $CF = EF$, 在 $Rt\triangle EFD$ 中利用勾股定理列方程求解;

【详解】 解: 由折叠知, $BC = BE = 10$, $EF = CF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形,

$\therefore AD = BC = 10$, $\angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABE$ 中, 由勾股定理得: $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

$\therefore ED = AD - AE = 10 - 6 = 4$,

设 $CF = x$, 则 $EF = x$,

$\therefore DF = DC - CF = 8 - x$,

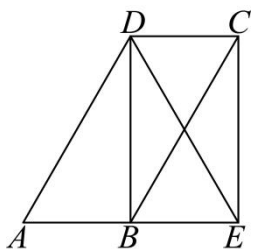
在 $Rt\triangle DEF$ 中, 由勾股定理得: $DE^2 + DF^2 = EF^2$,

$\therefore 4^2 + (8 - x)^2 = x^2$, 解得 $x = 5$,

$\therefore CF = 5$,

在 $Rt\triangle BCF$ 中, 由勾股定理得: $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$;

22. (本小题 8 分) 如图, 已知 $\square ABCD$, 延长 AB 到 E , 使 $BE = AB$, 连接 BD , ED , EC , 若 $ED = AD$.



(1)求证：四边形 $BECD$ 是矩形；

(2)连接 AC ，若 $AD=6$ ， $CD=3$ ，求 AC 的长.

【答案】(1)见解析

(2) $3\sqrt{7}$

【分析】(1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $AB \parallel CD$ ， $AB=CD$ ，又 $BE=CD$ 得四边形 $BECD$ 是平行四边形及 $AD=BC$ ，结合 $ED=AD$ 可得 $BC=ED$ ，由此可得平行四边形 $BECD$ 是矩形；

(2) 连接 AC ，由 (1) 得， $BE=CD$ ， $BE=AB$ ，所以 $AB=BE=3$ ，则 $AE=6$ ，又四边形 $BECD$ 是矩形，故有 $\angle ABD=\angle BEC=90^\circ$ ， $BD=CE$ ，然后通过勾股定理即可求解.

【详解】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB=CD$ ， $AD=BC$ ，

$\because BE=AB$ ，

$\therefore BE=CD$ ，

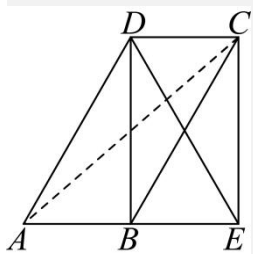
$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形，

$\because AD=BC$ ， $AD=DE$ ，

$\therefore BC=DE$ ，

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是矩形；

(2) 解：如图，连接 AC ，



由 (1) 得， $BE=CD$ ， $BE=AB$ ，

$\because CD=3$ ，

$\therefore AB=BE=3$ ，

$$\therefore AE = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是矩形,

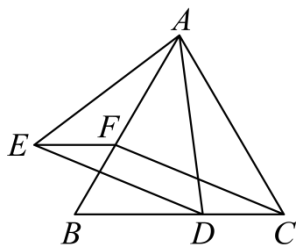
$$\therefore \angle ABD = \angle BEC = 90^\circ, \quad BD = CE,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore CE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{7}.$$

23. (本小题 8 分) 如图, 已知 ABC 是等边三角形, 点 D 、 F 分别在线段 BC 、 AB 上, $\angle EFB = 60^\circ$, $EF = DC$, 连接 AD 、 CF 、 EA 、 ED .



(1) 求证: 四边形 $EFCD$ 是平行四边形;

(2) 连接 BE , 若 $BF = EF$, 求证: $AE = AD$.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

【分析】 本题考查等边三角形的判定和性质, 平行四边形的判定, 全等三角形的判定和性质.

(1) 根据等边三角形的性质, 通过内错角相等得到 $EF \parallel DC$, 继而得证四边形 $EFCD$ 是平行四边形.

(2) 通过证明 $\triangle EFB$ 是等边三角形, 得到 $EB = DC$, 继而证明 $\triangle AEB \cong \triangle ADC$ (SAS), 根据对应边相等得到 $AE = AD$.

【详解】 (1) 证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because \angle EFB = 60^\circ,$$

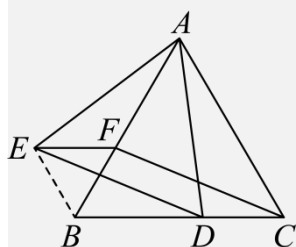
$$\therefore \angle ABC = \angle EFB,$$

$$\therefore EF \parallel DC,$$

$$\because DC = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 是平行四边形;

(2) 解: 如图, 连接 BE ,



$$\because BF = EF, \quad \angle EFB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle EFB$ 是等边三角形,

$$\therefore EB = EF, \quad \angle EBF = 60^\circ,$$

$$\because DC = EF,$$

$$\therefore EB = DC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ACB,$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} EB = DC \\ \angle EBA = \angle DCA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = AD.$$

24. (本小题 8 分) 如图 1, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 连接 BD , 点 E 为线段 BD 上任意一点 (点 E 不与 B , D 重合), 过点 E 作 $HF \parallel AB$ 分别交 AD , BC 于点 H , F . 点 G 为 DE 的中点, 连接 HG .

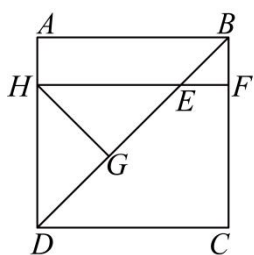


图1

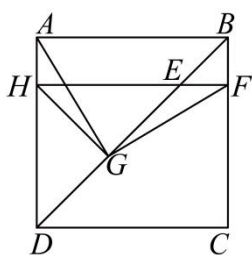


图2

(1) 若 $BF = 1$, 则 $BE =$ _____, $HG =$ _____;

(2) 如图 2, 连接 AG , FG . 求证: $AG = GF$ 且 $AG \perp GF$;

【答案】 (1) $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(2) 见解析

【分析】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 勾股定理等知

识，解决问题的关键是作辅助线，构造全等三角形.

(1) 根据等腰直角三角形的性质得出 $BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}$, $HG = \frac{\sqrt{2}}{2}DH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(2) 可证得 $\triangle AHG \cong \triangle FEG$, 从而 $\angle AGH = \angle FGE$, $AG = FG$, 进而得出结论;

【详解】(1) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore BC = AB = 4$, $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle CBD = \angle ADE = 45^\circ$,

$\because HF \parallel AB$,

$\therefore \angle DHF = \angle A = 90^\circ$, $\angle BFH = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DHF = \angle BFH = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABFH$ 是矩形, $BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}$,

$\therefore AH = BF = 1$,

$\therefore DH = HE = AD - AH = 3$,

$\because G$ 为 DE 的中点,

$\therefore HG \perp DE$,

$\therefore HG = \frac{\sqrt{2}}{2}DH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(2) 证明: 在正方形 $ABCD$ 和矩形 $ABFH$ 中,

$\therefore \angle DBC = 45^\circ$, $\angle BFE = \angle AHF = 90^\circ$, $AH = BF$,

$\therefore \angle FEB = 45^\circ = \angle BEF$,

$\therefore \angle FEG = 135^\circ$, $EF = BF = AH$,

$\because HG \perp DE$, $HG = \frac{1}{2}DE = EG$,

$\therefore \angle BGH = 90^\circ$, $\angle EHG = 45^\circ$,

$\therefore \angle AHG = \angle AHF + \angle EHG = 135^\circ$,

$\therefore \angle AHG = \angle FEG$,

又 $\because AH = EF$, $HG = EG$,

$\therefore \triangle AHG \cong \triangle FEG$ (SAS),

$\therefore \angle AGH = \angle FGE$, $AG = FG$,

$\therefore \angle AGF = \angle BGH = 90^\circ$,

$\therefore AG \perp FG$;

25. (本小题 10 分) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 的坐标分别是 $A(0, \sqrt{3})$ 和 $B(1, 0)$, 连接 AB , 以线段 AB 为边向右侧作菱形 $ABCD$, 且 $\angle ACB = 30^\circ$, 点 C 在 x 轴上.

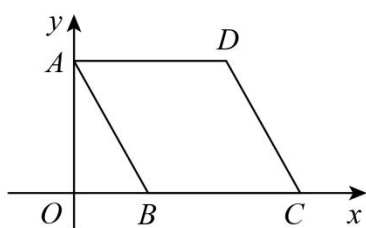


图1

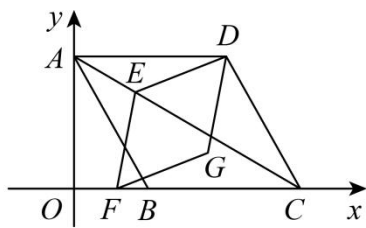


图2

(1) 填空: 点 D 的坐标为 _____, $\angle ABC =$ _____ 度.

(2) 连接 AC , 点 E 是线段 AC 上一动点, 点 F 在 x 轴上, 且 $\angle DEF = \angle ABC$. 过点 D 作 EF 的平行线, 过点 F 作 DE 的平行线, 两线相交于点 G .

求证: 四边形 $DEFG$ 是菱形.

【答案】 (1) $(2, \sqrt{3})$, 120

(2) 见解析

【分析】 本题是四边形的综合题, 考查了菱形的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 勾股定理, 30° 所对的直角边等于斜边的一半, 等腰直角三角形的判定与性质, 熟练掌握以上知识点并数形结合分类讨论是解题的关键.

(1) 利用勾股定理, 可求得 AB 的长度, 从而知道菱形的边长, 再利用菱形的性质, 等腰三角形的性质, 以及三角形的内角和定理, 即可求得点 D 的坐标和 $\angle ABC$ 的度数;

(2) 连接 BE , 设 AB 交 EF 于点 H , 先利用菱形的性质, 求得 $\angle DAC = \angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$, 接着利用外角得 $\angle DEF = 60^\circ + \angle ADE + \angle AHE$, 从而推出 $\angle BHF + \angle ADE = 60^\circ$, 接着证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADE$, 得到 $BE = DE$, $\angle ADE = \angle ABE$, 接着证明 $\angle BHF + \angle ADE = 60^\circ$, 推出 $\angle BFG = \angle ABE$, 从而知道 $\angle EFB = \angle EBF$, $EF = BE = ED$, 借助 $ED \parallel FG$, $EF \parallel DG$, 可得到四边形 $EFGD$ 是平行四边形, 加上邻边相等, 即可得证.

【详解】 (1) 解: $\because$ 点 A, B 的坐标分别是 $A(0, \sqrt{3})$ 和 $B(1, 0)$,

$$\therefore OA = \sqrt{3}, OB = 1.$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2,$$

$\because$ 以线段 AB 为边向右侧作菱形 $ABCD$,

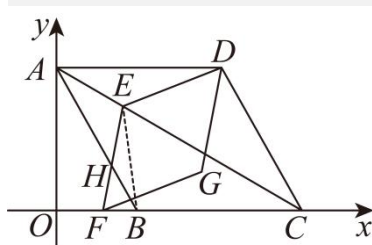
$$\therefore AD = AB = BC = 2, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = 30^\circ, \quad D(2, \sqrt{3}).$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

故答案为: $(2, \sqrt{3})$, 120 .

(2) 证明: 连接 BE , 设 AB 交 EF 于点 H , 如图所示,



由 (1) 可知, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 2$, $\angle ABO = 60^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = AB = BC = CD$,

$$\therefore \angle DAB = \angle ABO = 60^\circ, \quad \angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = \angle BAC = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle DEF = \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DEC + \angle FEC = \angle DAE + \angle ADE + \angle CAB + \angle AHE = 60^\circ + \angle ADE + \angle AHE,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AHE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BHF + \angle ADE = 60^\circ.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle BAC = 30^\circ \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE = DE, \quad \angle ADE = \angle ABE.$$

$$\therefore ED \parallel FG, \quad EF \parallel DG,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGD$ 是平行四边形, $\angle DEF + \angle EFG = 180^\circ$.

$$\therefore \angle DEF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BHF + \angle HFB = \angle BHF + \angle EFG + \angle BFG = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BHF + \angle BFG = 120^\circ - \angle EFG = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BHF + \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFG = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BFG = \angle ABE.$$

$$\therefore \angle EFG = \angle ABO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFG + \angle EFG = \angle ABE + \angle ABO,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle EBF,$$

$$\therefore EF = EB,$$

$$\therefore EF = ED,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGD$ 是菱形.