

2025 学年第二学期八年级数学学科期末考试

一、选择题

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 P 在第四象限, 且点 P 到 x 轴的距离为 1, 到 y 轴的距离为 3, 则点的坐标为()

- A. (3,-1) B. (-3,1) C. (1,-3) D. (-1,3)

【答案】A

【解析】

【分析】根据点到 x 轴的距离是纵坐标的绝对值, 到 y 轴的距离是横坐标的绝对值, 结合第四象限点 (+, -), 可得答案.

【详解】解: 若点 P 在第四象限, 且点 P 到 x 轴的距离为 1, 到 y 轴的距离为 3, 则点的坐标为 (3, -1), 故选 A.

【点睛】本题考查了各象限内点的坐标的符号特征, 记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键, 四个象限的符号特点分别是: 第一象限 (+, +); 第二象限 (-, +); 第三象限 (-, -); 第四象限 (+, -).

2. 对于一次函数 $y = -\frac{1}{3}x + 3$, 下列结论错误的是 ()

- A. y 随 x 的增大而减小
B. 当 $x > 0$ 时, $y > 3$
C. 函数的图象与 y 轴交于点 $(0, 3)$
D. 函数图象与直线 $y = -\frac{1}{3}x$ 平行

【答案】B

【解析】

【详解】解: A、一次函数 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ 中, $k = -\frac{1}{3} < 0$, 则 y 随 x 增大而减小, 结论正确, 不符合题意;

B、当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{1}{3}x + 3 = 3$, 且 y 随 x 增大而减小, 则当 $x > 0$ 时, $y < 3$, 结论错误, 符合题意;

C、当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{1}{3}x + 3 = 3$, 则与 y 轴交于 $(0, 3)$, 结论正确, 不符合题意;

D、一次函数 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ 向下平移 3 个单位长度, 可以得到直线 $y = -\frac{1}{3}x$ 则函数图像与直线 $y = -\frac{1}{3}x$ 平行, 结论正确, 不符合题意;

3. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图像上三点的坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $(-1, 2)$, 若 $x_1 < 0 < x_2$, 则下列式子正确的是 ()

A. $y_1 < y_2 < 0$

B. $y_1 < 0 < y_2$

C. $y_1 > y_2 > 0$

D. $y_1 > 0 > y_2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用已知点 $(-1, 2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，求出 k 的值，确定 k 的符号，进而判断反比例函数图像所在的象限，明确不同象限内点的横、纵坐标的符号特征即可。

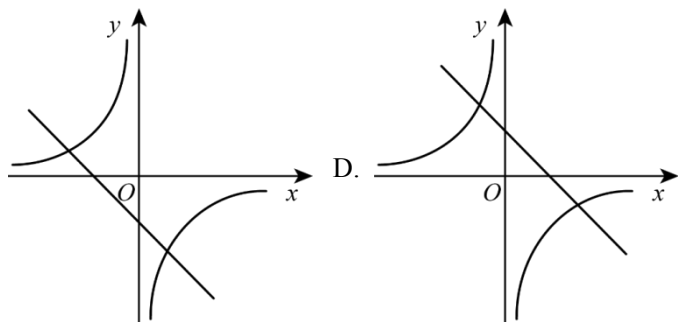
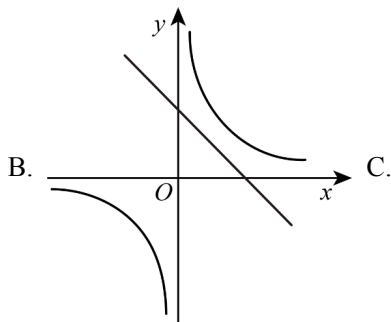
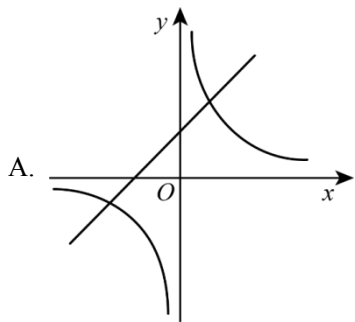
【详解】解：将 $(-1, 2)$ 代入反比例函数得 $k = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 函数图象在二、四象限，

当 $x_1 < 0$ 时 $y_1 > 0$ ， $x_2 > 0$ 时 $y_2 < 0$ ，

$y_1 > 0 > y_2$ 。

4. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y = kx - k (k \neq 0)$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的大致图象可能是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的图象和一次函数的图象，熟悉两函数中 k 的符号对函数图象的影响是解题的关键。

【详解】解：①当 $k > 0$ 时， $y = kx - k$ 过一、三、四象限； $y = \frac{k}{x}$ 位于一、三象限；

②当 $k < 0$ 时, $y = kx - k$ 过一、二、四象限; $y = \frac{k}{x}$ 位于二、四象限.

观察图形可知, 只有 D 选项符合题意.

故选 D.

5. 下列命题, 是真命题的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- B. 对角线相等的平行四边形是正方形
- C. 矩形的对角线互相平分且相等
- D. 平行四边形的对角线相等

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质, 矩形的性质, 菱形的判定定理和正方形的判定定理逐一判断即可.

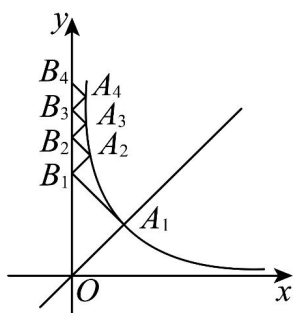
【详解】解: A、对角线互相垂直且平分的四边形是菱形, 原命题是假命题, 不符合题意;

B、对角线相等且互相垂直的平行四边形是正方形, 原命题是假命题, 不符合题意;

C、矩形的对角线互相平分且相等, 原命题是真命题, 符合题意;

D、平行四边形的对角线互相平分但不一定相等, 原命题是假命题, 不符合题意.

6. 如图, 点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 在反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象上, 点 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ 在 y 轴上, 且 $\angle B_1OA_1 = \angle B_2B_1A_2 = \angle B_3B_2A_3 = \dots$, 直线 $y = x$ 与双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 交于点 A_1 , $B_1A_1 \perp OA_1$, $B_2A_2 \perp B_1A_2$, $B_3A_3 \perp B_2A_3$, $\dots$, 则 B_{2026} 的坐标是 ()



- A. $(0, \sqrt{2^{2026}})$
- B. $(0, \frac{\sqrt{2026}}{2})$
- C. $(0, \sqrt{2026})$
- D. $(0, 2\sqrt{2026})$

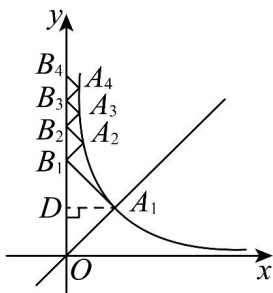
【答案】D

【解析】

【分析】过点 A_1 作 $A_1D \perp y$ 轴于点 D , 先求出交点 $A_1(1,1)$, 进而得出 $OA_1 = \sqrt{2}$, $\angle B_1OA_1 = 45^\circ$, 则 $\triangle OA_1B_1$

是等腰直角三角形，得出 $B_1(0,2)$ ，根据平行设直线 B_1A_2 的解析式为 $y=x+m$ ，求出 $m=2$ ，从而得出 $A_2(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ ，利用坐标两点距离公式，得出 $B_1A_2=2-\sqrt{2}$ ，结合等腰直角三角形的性质， $B_2(0,2\sqrt{2})$ ，同理可得， $B_3(0,2\sqrt{3})$ ， $B_4(0,4)$ ， $B_5(0,2\sqrt{5})$ ，.....，则 $B_n(0,2\sqrt{n})$ ，即可得解.

【详解】解：如图，过点 A_1 作 $A_1D \perp y$ 轴于点 D ，



$$\text{联立} \begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}, \text{解得: } x=1 \text{ 或 } x=-1 \text{ (舍)},$$

$$\therefore A_1(1,1),$$

$$\therefore OD = A_1D = 1,$$

$$\therefore OA_1 = \sqrt{OD^2 + A_1D^2} = \sqrt{2}, \quad \angle B_1OA_1 = 45^\circ,$$

$$\because B_1A_1 \perp OA_1,$$

$$\therefore \triangle OA_1B_1 \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore A_1B_1 = OA_1 = \sqrt{2}, \quad OB_1 = \sqrt{2}OA_1 = \sqrt{2}A_1B_1 = 2,$$

$$\therefore B_1(0,2),$$

$$\because \angle B_1OA_1 = \angle B_2B_1A_2 = 45^\circ,$$

$$\therefore OA_1 \parallel B_1A_2,$$

$$\therefore \text{设直线 } B_1A_2 \text{ 的解析式为 } y=x+m,$$

$$\because B_1(0,2) \text{ 在直线 } B_1A_2 \text{ 的图象上},$$

$$\therefore m=2,$$

$$\therefore \text{直线 } B_1A_2 \text{ 的解析式为 } y=x+2,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}, \text{解得: } x = \sqrt{2} - 1 \text{ 或 } x = -\sqrt{2} - 1 \text{ (舍)},$$

$$\therefore A_2(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1),$$

$$\therefore B_1A_2 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1-2)^2} = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore B_2A_2 \perp B_1A_2,$$

$\therefore \triangle B_1A_2B_2$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore B_1B_2 = \sqrt{2}B_1A_2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore OB_2 = 2 + (2\sqrt{2} - 2) = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore B_2(0, 2\sqrt{2}),$$

同理可得, $B_3(0, 2\sqrt{3}), B_4(0, 4), B_5(0, 2\sqrt{5}), \dots$

$$\therefore B_n(0, 2\sqrt{n}),$$

$$\therefore B_{2026}(0, 2\sqrt{2026}).$$

二、填空题

7. 如果一个多边形的每个外角都等于 36° , 那么这个多边形的边数是_____.

【答案】 10

【解析】

【详解】解: $\because$ 多边形外角和为 360° , 且该多边形的每个外角都等于 36° ,

$\therefore$ 边数为 $360^\circ \div 36^\circ = 10$.

8. 当 $m =$ _____时, 函数 $y = (3-m)x + m^2 - 2m - 3$ (m 是常数) 是正比例函数.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据正比例函数是 $y = kx$ (k 为常数, $k \neq 0$), 即常数项为零且一次项系数不为零, 解答即可.

【详解】解: 函数 $y = (3-m)x + m^2 - 2m - 3$ 是正比例函数,

$$\therefore \begin{cases} 3-m \neq 0 \\ m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases},$$

解得: $m = -1$.

9. 如果将点 $A(1, -2)$ 向左平移 4 个单位长度得到点 B , 点 C 与点 B 关于 x 轴对称. 那么点 C 的坐标是_____.

【答案】 $(-3, 2)$

【解析】

【详解】解: $\because$ 将点 $A(1, -2)$ 向左平移 4 个单位长度得到点 B ,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1-4, -2)$, 即 $(-3, -2)$,

$\because$ 点 C 与点 B 关于 x 轴对称,

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(-3, 2)$.

10. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 40^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数是_____.

【答案】 110° ## 110 度

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质, 求得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, 结合已知求解即可;

【详解】解: 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC$, $\angle C = \angle A$,

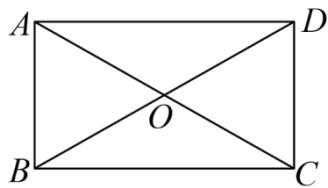
$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$,

$\because \angle A - \angle B = 40^\circ$,

解得 $\angle A = 110^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle A = 110^\circ$.

11. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle OAB$ 是等边三角形, $AB = 6$, 矩形 $ABCD$ 的面积为_____.



【答案】 $36\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据四边形 $ABCD$ 是矩形得 $OA = OC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，根据 $\triangle OAB$ 是等边三角形， $AB = 6$ 得 $AB = OB = OA = OC = 6$ ，可得 $AC = 12$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中，根据勾股定理得， $BC = 6\sqrt{3}$ ，即可得.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OA = OC, \angle B = 90^\circ,$$

$$\because \triangle OAB \text{ 是等边三角形, } AB = 6,$$

$$\therefore AB = OB = OA = OC = 6,$$

$$\therefore AC = 12,$$

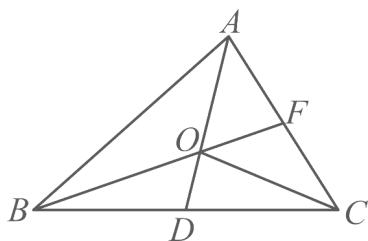
$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, 根据勾股定理得, } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积为: } AB \cdot BC = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3},$$

故答案为: $36\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了矩形的性质，勾股定理，解题的关键是理解题意，掌握这些知识点.

12. 如图， $\triangle ABC$ 的中线 AD 、 BF 交于点 O ，连接 OC ，若 $S_{\triangle COD} = 3$ ，则 $S_{\triangle ABF} =$ _____.



【答案】9

【解析】

【分析】根据重心的性质得到 $OA:OD = 2:1$ ，则 $S_{\triangle AOC} = 2S_{\triangle COD} = 6$ ，进而可求出

$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COD} = 9$ ，再根据三角形的中线平分三角形的面积可得答案.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的中线 AD 、 BF 交于点 O ，

$\therefore$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore OA:OD = 2:1,$$

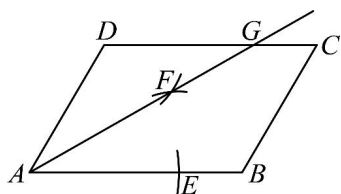
$$\therefore S_{\triangle AOC} = 2S_{\triangle COD} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COD} = 9,$$

又 $\because$ 三角形的中线平分三角形的面积，

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = 9.$$

13. 如图，在 $\square ABCD$ 中，以点 A 为圆心， AD 长为半径画弧，交边 AB 于点 E ，再分别以点 D 、 E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 长为半径画弧，两弧交于点 F ，连接 AF 并延长交边 CD 于点 G 。若 $AE = 12$ ， $\square ABCD$ 的周长为 49，则 $GC =$ _____。



【答案】 0.5 或 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】由作图知 AG 平分 $\angle DAB$ ， $AD = AE = 12$ ，得到 $\angle DAG = \angle BAG$ ，根据平行四边形的性质可得 $AB \parallel CD$ ，得到 $\angle AGD = \angle BAG$ ，结合题意得 $AD + CD = \frac{1}{2} \times 49 = 24.5$ ，推出 $CD = 12.5$ ， $DG = AD = 12$ ，即可求解。

【详解】解：由作图知 AG 平分 $\angle DAB$ ， $AD = AE = 12$ ，
 $\therefore \angle DAG = \angle BAG$ ，

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\square ABCD$ 的周长为 49，

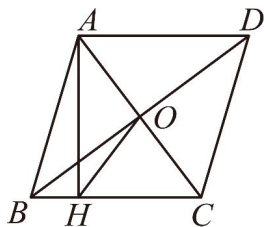
$\therefore \angle AGD = \angle BAG$ ， $AD + CD = \frac{1}{2} \times 49 = 24.5$ ，

$\therefore \angle DAG = \angle AGD$ ， $CD = 24.5 - AD = 24.5 - 12 = 12.5$ ，

$\therefore DG = AD = 12$ ，

$\therefore GC = CD - DG = 12.5 - 12 = 0.5$ 。

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $AD = 8$ ， $DO = 6$ ， $AH \perp BC$ 于点 H ，则 $HO =$ _____。



【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】根据菱形对角线互相垂直， $AD = 8$ ， $DO = 6$ ，得 $AO = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ，根据直角三角形斜边

的中线等于斜边的一半， HO 是 $Rt\triangle AHC$ 斜边中线，得 $HO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{7}$ 。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, AO = CO = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AOD \text{ 中}, AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

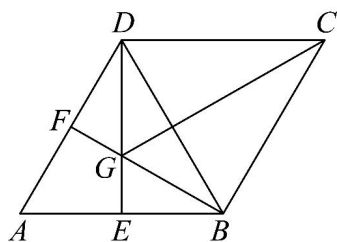
$$\therefore AH \perp BC,$$

$$\therefore \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AHC \text{ 中}, HO = \frac{1}{2}AC = AO = 2\sqrt{7}.$$

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AD = 4$ ， E, F 分别是 AB, AD 的中点， DE, BF 相交于点 G ，连接 BD, CG ，有下列结论：① $\angle BGD = 120^\circ$ ；② $BG + DG = CG$ ；③ $\triangle BDF \cong \triangle CGB$ ；④ $S_{\triangle ABD} = \sqrt{3}$ ，

⑤若点 P 在 AB 上，连接 FP ，则 FP 的最小值为 $\sqrt{3}$ ，其中正确的结论有_____。（填写序号）



【答案】①②⑤

【解析】

【分析】由菱形的性质可得 $AB = AD = BC = CD = 4$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形，由等边三角形的性质可得 $DE \perp AB$ ， $BF \perp AD$ ，即可得出 $\angle BFA = \angle DEA = 90^\circ$ ，结合四边形内角和计算即可判断①正确；证明 $Rt\triangle CDG \cong Rt\triangle CBG$ (HL)，得出 $BG = DG$ ， $\angle BCG = \angle DCG = \frac{1}{2}\angle BCD = 30^\circ$ ，结合直角三角形的性质即可判断②正确；由全等三角形的判定定理即可判断③错误；求出 $BF = 2\sqrt{3}$ ，再由三角形的面积公式即可判断④错误；由垂线段最短可得，当 $FP \perp AB$ 时， FP 最小，即可判断⑤正确。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore AB = AD = BC = CD = 4, AD \parallel BC, \angle A = \angle BCD = 60^\circ, \angle ADC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore E, F \text{ 分别是 } AB, AD \text{ 的中点},$$

$$\therefore DE \perp AB, BF \perp AD,$$

$$\therefore \angle BFA = \angle DEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EGF = 360^\circ - \angle BFA - \angle DEA - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle EGF = 120^\circ, \text{ 故①正确;}$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ADE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle CBG = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = CB, \quad CG = CG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDG \cong \text{Rt}\triangle CBG (\text{HL}),$$

$$\therefore BG = DG, \quad \angle BCG = \angle DCG = \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ,$$

$$\therefore CG = 2BG,$$

$$\therefore BG + DG = CG, \text{ 故②正确;}$$

在 $\triangle BDF$ 中, $BD = 4$, $DF = 2$, 在 $\triangle CGB$ 中, $BC = 4$, 对应边不相等, 故 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CGB$ 不全等,

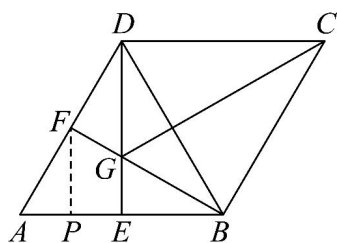
③错误;

$$\therefore AF = DF = \frac{1}{2} AD = 2,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \times BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \text{ 故④错误;}$$

如图: 由垂线段最短可得, 当 $FP \perp AB$ 时, FP 最小,



$$\therefore \angle AFP = 90^\circ - \angle A = 30^\circ,$$

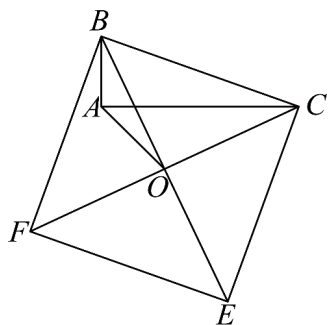
$$\therefore AP = \frac{1}{2} AF = 1,$$

$$\therefore FP = \sqrt{AF^2 - AP^2} = \sqrt{3}, \text{ 即 } FP \text{ 的最小值为 } \sqrt{3}, \text{ 故⑤正确;}$$

综上所述, 正确的有①②⑤.

16. 如图, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 为边, 在 $\triangle ABC$ 的同侧作正方形 $BCEF$, 对角线 BE 、 CF 交

于点 O ，连接 AO 。若 $AB=3$ ， $AO=3\sqrt{2}$ ，则 $BC=$ _____.

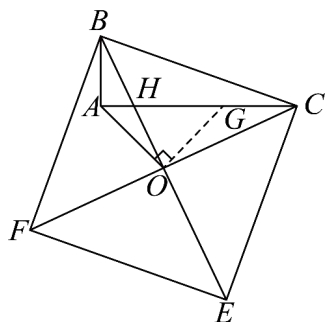


【答案】 $3\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 过点 O 作 $OG \perp AO$ ，先证 $\triangle ABO \cong \triangle GCO$ ，求出 AC 的长，再用勾股定理解答即可.

【详解】 解：如下图所示，过点 O 作 $OG \perp AO$ ，交 AG 于点 G ，



$$\therefore \angle AOG = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $BCEF$ 为正方形,

$$\therefore OB = OC, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = \angle COG = 90^\circ - \angle BOG,$$

$$\because \angle BAC = \angle BOC = 90^\circ, \angle AHB = \angle OHC,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle OCG,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle GCO (ASA),$$

$$\therefore OG = OA = 3\sqrt{2}, CG = AB = 3,$$

$$\therefore AG = \sqrt{AO^2 + GO^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6,$$

$$\therefore AC = AG + CG = 6 + 3 = 9,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}.$$

17. 在平面直角坐标系中，已知两点 $P(a, 3)$ ， $Q(-2, b)$ ，且 a, b 满足 $|a-2| + \sqrt{b+5} = 0$ ，若点 M 在坐

标轴上, 且满足 $PM = QM$, 则点 M 的坐标为_____.

【答案】 $(-2, 0)$ 或 $(0, -1)$

【解析】

【分析】 根据绝对值和算术平方根的非负性求出 $a = 2$, $b = -5$, 则 $P(2, 3)$, $Q(-2, -5)$, 再分点 M 在 x 轴、 y 轴上两种情况讨论, 利用勾股定理即可求解.

【详解】 解: $\because |a - 2| + \sqrt{b + 5} = 0$,

$$\therefore a - 2 = 0, \quad b + 5 = 0,$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -5,$$

$$\therefore P(2, 3), \quad Q(-2, -5),$$

当点 M 在 x 轴上时, 设点 M 的坐标为 $(x, 0)$,

$$\because PM = QM,$$

$$\therefore PM^2 = QM^2,$$

$$\therefore (x - 2)^2 + 3^2 = (x + 2)^2 + 5^2,$$

解得 $x = -2$,

$$\therefore M(-2, 0);$$

当点 M 在 y 轴上时, 设点 M 的坐标为 $(0, y)$,

$$\because PM = QM,$$

$$\therefore PM^2 = QM^2,$$

$$\therefore 2^2 + (y - 3)^2 = 2^2 + (y + 5)^2,$$

解得 $y = -1$,

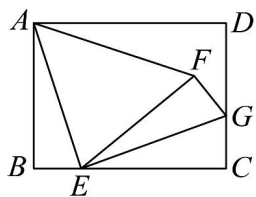
$$\therefore M(0, -1);$$

综上, 点 M 的坐标为 $(-2, 0)$ 或 $(0, -1)$.

18. 已知: 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, 点 E 、 G 分别在边 BC 、 CD 上, $EG \perp AE$. 将 $\triangle EGC$ 沿直线 EG 翻折得 $\triangle EGF$, 连接 AF . 当 $\triangle AEF$ 为等腰三角形时, 线段 BE 的长为_____.

$\therefore 3^2 + (4-2a)^2 = (4-a)^2$, 此方程无解, 故此情形不存在;

当 $AE = EF$ 时,



设 $BE = b$, 则 $AE = EF = CE = 4 - b$,

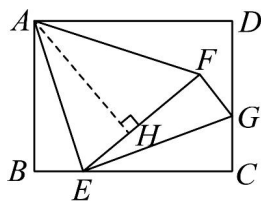
由勾股定理得 $AB^2 + BE^2 = AE^2$,

$$\therefore 3^2 + b^2 = (4 - b)^2,$$

$$\text{解得 } b = \frac{7}{8},$$

$$\therefore BE = \frac{7}{8};$$

当 $AE = AF$ 时, 过点 A 作 $AH \perp EF$ 于点 H ,



$$\text{则 } EH = FH = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}EC,$$

$$\because \angle AEB = \angle AEH, \angle ABE = \angle AHE = 90^\circ, AE = AE,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AHE (AAS),$$

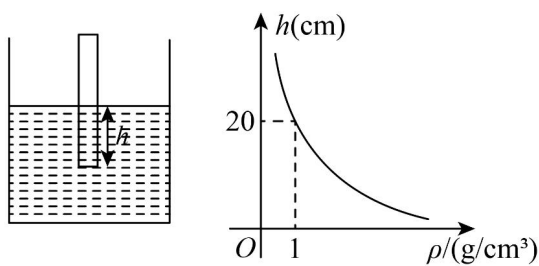
$$\therefore BE = EH = \frac{1}{2}EC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3};$$

综上所述, 当 $\triangle AEF$ 为等腰三角形时, 线段 BE 的长为 $\frac{7}{8}$ 或 $\frac{4}{3}$.

三、解答题

19. 综合实践小组的同学们利用自制密度计测量溶液的密度, 当密度计悬浮在不同的液体中时, 浸在溶液中的高度 $h(\text{cm})$ 是液体的密度 $\rho(\text{g/cm}^3)$ 的反比例函数, 其图像如图所示 ($\rho > 0$), 根据函数图像, 回答下列问题:



- (1) 写出浸液高度 h (cm) 关于液体密度 ρ (g/cm³) 的反比例函数解析式_____;
- (2) 当溶液密度 $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ 时, 密度计浸在溶液中的高度 h 为_____ cm ;
- (3) 若使用该密度计时, 浸入溶液的高度 h 不能低于 5cm (高度过低会导致密度计倾倒失效), 求该密度计可正常测量的溶液密度 ρ 的取值范围.

【答案】(1) 反比例函数解析式为 $h = \frac{20}{\rho}$

(2) 10

(3) 该密度计可正常测量的溶液密度 ρ 的取值范围为 $0 < \rho \leq 4 \text{ g/cm}^3$

【解析】

【分析】(1) 设反比例函数的解析式为 $h = \frac{k}{\rho}$, 观察图像, 结合点 (1, 20) 计算出反比例函数的 k , 即可得到答案;

(2) 把 $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ 代入反比例函数的解析式中即可求解;

(3) 浸入溶液的高度 h 不能低于 5cm, 则 $h \geq 5$, 从而解得 ρ 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 设反比例函数的解析式为 $h = \frac{k}{\rho}$, 代入图像上点 (1, 20) 得 $k = 1 \times 20 = 20$,

$$\therefore h = \frac{20}{\rho};$$

【小问 2 详解】

解: $\because h = \frac{20}{\rho}, \rho = 2$,

$$\text{得 } h = \frac{20}{2} = 10;$$

【小问 3 详解】

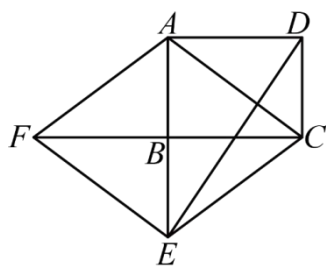
解：由题意可知， $h \geq 5$ ，即 $\frac{20}{\rho} \geq 5$ ，解得 $\rho \leq 4$ ，

又 $\rho > 0$ ，

$\therefore 0 < \rho \leq 4 \text{ g/cm}^3$ ，

答：该密度计可正常测量的溶液密度 ρ 的取值范围为 $0 < \rho \leq 4 \text{ g/cm}^3$ 。

20. 如图，四边形 $ABCD$ 是一个矩形，延长 AB 至点 E ，使得 $BE = AB$ ，延长 CB 至点 F ，使得 $BF = BC$ ，连接 AC ， BC ， EF ， FA ， DE 。



(1) 求证：四边形 $AFEC$ 是一个菱形；

(2) 若 $\frac{BE}{BF} = \frac{3}{4}$ ， $DE = 8$ ，求菱形 $AFEC$ 的面积。

【答案】(1) 证明： $\because BE = AB$ ， $BF = BC$ ，矩形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = 90^\circ$ ，
即四边形 $AFEC$ 的对角线互相垂直平分，

$\therefore$ 四边形 $AFEC$ 为菱形；

(2) 菱形 $AFEC$ 的面积为 $\frac{384}{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得 $\angle ABC = 90^\circ$ ，根据四边形 $AFEC$ 的对角线互相垂直平分即可证明四边形 $AFEC$ 是一个菱形；

(2) 根据菱形和矩形的性质结合已知可设 $AB = BE = 3k$ ， $BC = BF = AD = 4k$ ，由勾股定理得 $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 8^2$ ，即可求出 $k^2 = \frac{16}{13}$ ，再根据菱形 $AFEC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times AE \times CF$ 计算即可。

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $AFEC$ 是菱形，四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = BE$ ， $BC = BF$ ， $BC = AD$ ，

$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{设 } AB = BE = 3k, \quad BC = BF = AD = 4k,$$

$$\text{由勾股定理得 } DE^2 = AD^2 + AE^2 = 8^2,$$

$$\therefore 16k^2 + 36k^2 = 8^2,$$

$$\text{解得 } k^2 = \frac{16}{13},$$

$$\text{菱形 } AFEC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times AE \times CF = \frac{1}{2} \times 6k \times 8k = 24k^2 = 24 \times \frac{16}{13} = \frac{384}{13}.$$

21. 在平面直角坐标系中, 对于任意一点 M , 给出如下定义: 点 M 到 x 轴、 y 轴的距离中的较小值叫做点 M 的短距, 如果点 P 和点 Q 的短距相等, 那么称两点为等距点. 例如点 $P(-2, 5)$ 与点 $Q(-4, 2)$ 为等距

点. 已知点 A 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 如果点 B 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 上, 且 A 、 B 两点为等距点, 求点 B 的坐标.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 或 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

【解析】

【分析】 根据定义可得点 A 的“短距”为 $\frac{1}{2}$, 则点 B 到 x 轴的距离为 $\frac{1}{2}$ 或点 B 到 y 轴的距离为 $\frac{1}{2}$, 据此求出点 B 的坐标.

【详解】 解: 由题意得, 点 A 的短距为 $\frac{1}{2}$,

$$\text{设 } B\left(x, -\frac{1}{2}x + 1\right),$$

$\therefore A$ 、 B 两点为等距点,

$\therefore$ 点 B 到 x 轴的距离为 $\frac{1}{2}$ 或点 B 到 y 轴的距离为 $\frac{1}{2}$,

$$\text{当 } \left|-\frac{1}{2}x + 1\right| = \frac{1}{2} \text{ 时, 则 } x \geq -\frac{1}{2}x + 1, \text{ 即 } x \geq \frac{2}{3},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore x = 1 \text{ 或 } x = 3,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}, \text{ 当 } x = 3 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore B\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ 或 } B\left(3, -\frac{1}{2}\right);$$

当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 则 $x < -\frac{1}{2}x + 1$, 即 $x < \frac{2}{3}$ 时,

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = -\frac{1}{2},$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{4}$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{5}{4}$,

$$\therefore B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ 或 } B\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right);$$

综上, 点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 或 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

22. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AP \perp BD$ 于点 P , 请用尺规作图在 BD 上求作一点 Q , 连接 AQ , CQ , PC , 使得四边形 $APCQ$ 是平行四边形.

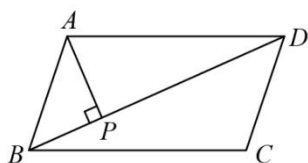


图1

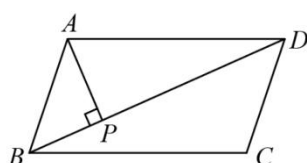


图2

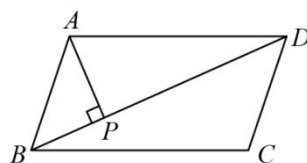


图3

(1) 某数学小组经过讨论, 得到如下两种作法, 请分别在图 1 和图 2 中完成尺规作图, 并选择其中一种作法说明其正确性.

思路 1: 在 BD 上截取 $DQ = BP$, 点 Q 即为所求

思路 2: 过点 C 作 $CQ \perp BD$ 于点 Q , 点 Q 即为所求

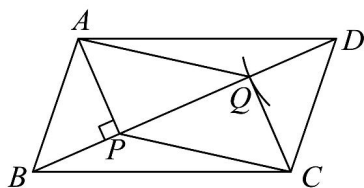
我选择思路_____, 理由如下:

证明:

(2) 请你用不同于 (1) 中的尺规作图方法求作出点 Q (在图 3 中完成, 保留作图痕迹, 不写作法)

【答案】 (1) 我选择思路 1, 理由如下:

证明: 在 BD 上截取 $DQ = BP$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB = CD, AD = BC, AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore \angle ABP = \angle CDQ, \angle ADQ = \angle CBP,$

$\therefore DQ = BP,$

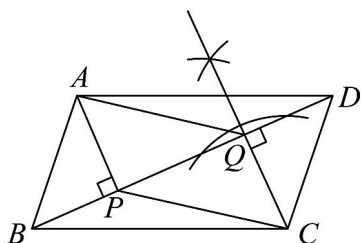
$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CDQ (SAS), \triangle ADQ \cong \triangle CBP (SAS),$

$\therefore AP = CQ, AQ = CP,$

$\therefore$ 四边形 $APCQ$ 是平行四边形;

我选择思路 2, 理由如下:

证明: 过点 C 作 $CQ \perp BD$ 于点 Q ,



则 $\angle APB = \angle APQ = \angle CQP = \angle CQD = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$

$\therefore \angle ABP = \angle CDQ,$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CDQ (AAS),$

$\therefore AP = CQ,$

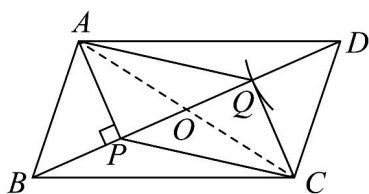
$\therefore \angle APQ = \angle CQP = 90^\circ, PQ = QP,$

$\therefore \triangle AQP \cong \triangle CPQ (SAS),$

$\therefore AQ = CP,$

$\therefore$ 四边形 $APCQ$ 是平行四边形;

(2) 连接 AC 交 BD 于点 O , 在 OD 上作 $OQ = OP$, 则点 Q 即为所求,



【解析】

【分析】(1) 根据题意作出图形，再利用平行四边形的性质，并结合全等三角形的判定与性质证明即可；

(2) 连接 AC 交 BD 于点 O ，在 OD 上作 $OQ = OP$ ，则点 Q 即为所求。

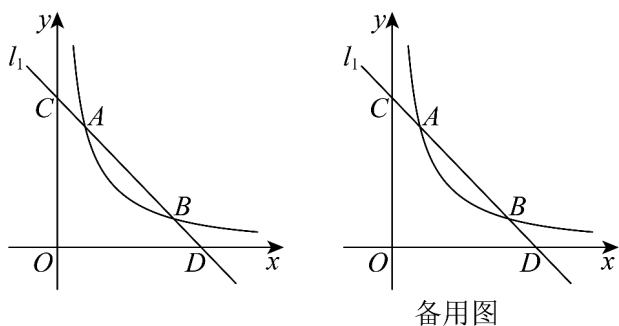
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

23. 如图，直线 $l_1: y_1 = kx + b$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 D 、 C ，与反比例函数 $y_2 = \frac{a}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(1, 4)$ 、 $B(4, m)$ 。



(1) 求反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 请根据图像观察，若 $\frac{a}{x} > kx + b$ ，则 x 的取值范围是_____；

(3) 若点 P 是反比例函数图像 $y_2 = \frac{a}{x} (x > 0)$ 上的一点，且在点 B 右侧，当 $\triangle ABP$ 面积为 6 时，求点 P 坐标。

【答案】(1) 反比例函数解析式为 $y_2 = \frac{4}{x}$ ，一次函数解析式为 $y_1 = -x + 5$

(2) $0 < x < 1$ 或 $x > 4$

(3) $P\left(\frac{9+\sqrt{65}}{2}, \frac{9-\sqrt{65}}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先根据待定系数法求得反比例函数，代入 $B(4, m)$ ，得 $m = 1$ ，即 $B(4, 1)$ ，将 A, B 代入一次

函数 $y_1 = kx + b$ ，即可求解；

(2) 根据反比例函数图象在一次函数上方的区域即可解答；

(3) 如图，过 P 作 $PM \parallel x$ 轴交直线 AB 于 M ，设 $P\left(t, \frac{4}{t}\right)$ ，则 $M\left(5 - \frac{4}{t}, \frac{4}{t}\right)$ ，然后根据

$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle AMP} - S_{\triangle BMP}$ 列式解答即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(1, 4)$ 代入反比例函数得 $a = 4$ ，

$\therefore$ 反比例函数为 $y_2 = \frac{4}{x}$ ，

将 $B(4, m)$ 代入反比例函数， $m = \frac{4}{4}$ ，得 $m = 1$ ，即 $B(4, 1)$ ，

将 A, B 代入一次函数得 $\begin{cases} k + b = 4 \\ 4k + b = 1 \end{cases}$ ，

解得 $k = -1$ ， $b = 5$ ，

$\therefore$ 一次函数为 $y_1 = -x + 5$ ；

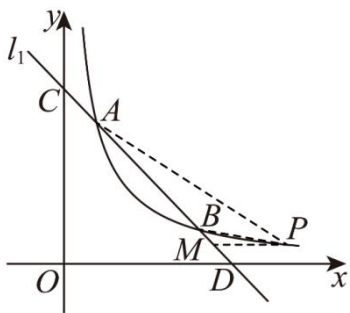
【小问 2 详解】

解： $\because$ 一次函数 $y_1 = -x + 5$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x}$ 的图象交于点 $A(1, 4)$ 、 $B(4, 1)$ ，

$\therefore$ 根据图象可知，当 $\frac{a}{x} > kx + b$ ，则 x 的取值范围是 $0 < x < 1$ 或 $x > 4$ ；

【小问 3 详解】

解：如图，过 P 作 $PM \parallel x$ 轴交直线 AB 于 M ，连接 AP 、 BP ，



$\because$ 点 P 是反比例函数图像 $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的一点，且在点 B 右侧， $A(1, 4)$ ， $B(4, 1)$ ，

设 $P\left(t, \frac{4}{t}\right) (t > 4)$ ，则点 M 的纵坐标为 $\frac{4}{t}$ ，

由 (1) 可知 $y_1 = -x + 5$ ，

$$\therefore M\left(5-\frac{4}{t}, \frac{4}{t}\right), \text{ 则 } PM=t-\left(5-\frac{4}{t}\right),$$

$$\therefore S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2} \times\left[t-\left(5-\frac{4}{t}\right)\right] \times\left(4-\frac{4}{t}\right), \quad S_{\triangle BMP}=\frac{1}{2} \times\left[t-\left(5-\frac{4}{t}\right)\right] \times\left(1-\frac{4}{t}\right),$$

$$\therefore S_{\triangle PAB}=S_{\triangle AMP}-S_{\triangle BMP}=\frac{1}{2} \times\left[t-\left(5-\frac{4}{t}\right)\right] \times(4-1)=6,$$

$$\text{解得 } t=\frac{9+\sqrt{65}}{2} \text{ 或 } t=\frac{9-\sqrt{65}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\frac{4}{t}=\frac{4}{\frac{9+\sqrt{65}}{2}}=\frac{9-\sqrt{65}}{2}$$

$$\therefore P\left(\frac{9+\sqrt{65}}{2}, \frac{9-\sqrt{65}}{2}\right).$$

24. 综合实践: 学习 “一次函数” 时, 我们从 “数” 和 “形” 两方面研究一次函数的性质, 请运用积累的经验和方法对函数 $y=-2|x-1|+3$ 的图像与性质进行研究, 并解决相关问题:

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-1	_____	3	1	_____	...

(1) 初步感知: 补全表格中横线部分的数据, 并用描点法在图 1 所给的平面直角坐标系中画出函数

$y=-2|x-1|+3$ 的图像;

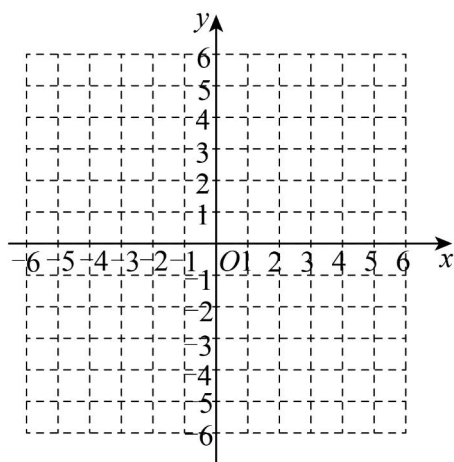
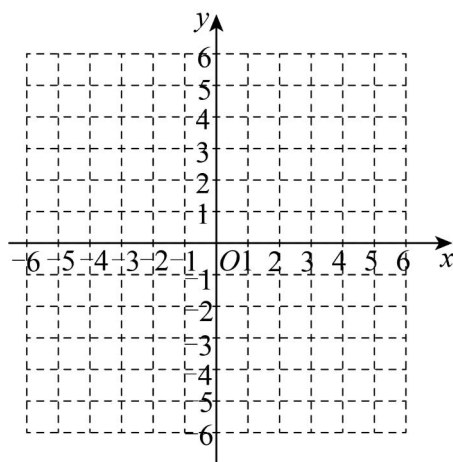


图1



备用图

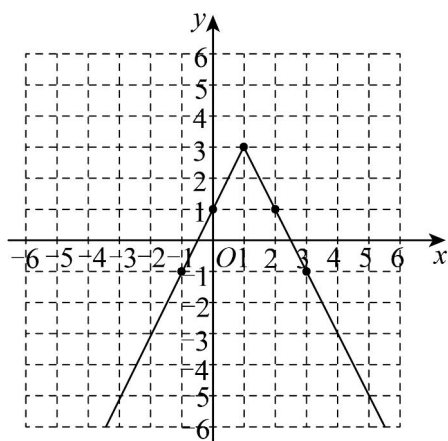
(2) 探究性质：观察函数 $y = -2|x-1| + 3$ 的图像，判断下列关于该函数性质的命题：①当 $x \geq 1$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小；②当 $y = 0$ 时， $x = \frac{5}{2}$ ；③该函数存在最小值，最小值为 3；④该函数图像是轴对称图形．其中正确的是 _____ ．（请写出所有正确命题的序号）

(3) 观察图像，当 $-3 \leq x < 6$ 时， y 的取值范围是 _____ ．

【答案】(1) 补全表格如下：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-1	1	3	1	-1	...

用描点法在图 1 所给的平面直角坐标系中画出函数 $y = -2|x-1| + 3$ 的图像如下：



(2) ①④

(3) $-7 < y \leq 3$

【解析】

【分析】(1) 当 $x = 0$ 时 $y = 1$ ，当 $x = 3$ 时 $y = -1$ ，然后填表，再描点连线画出图像即可；

(2) 结合图像逐一判断四个说法的正误即可；

(3) 首先结合函数图像判断当 $-3 \leq x < 6$ 时存在函数最大值，进而再求得 $x = -3$ 和 $x = 6$ 时对应的 y 的值比较最小值即可得出 y 的取值范围．

【小问 1 详解】

解：表格数据：

当 $x = 0$ 时 $y = 1$ ；

当 $x = 3$ 时 $y = -1$ ；

【小问 2 详解】

解：① $x \geq 1$ 时 $y = -2x + 5$ ， y 随 x 增大而减小，正确；

② $y=0$ 时, $-2|x-1|+3=0$, 解得 $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$, 错误;

③ 函数最大值为 3, 无最小值, 错误;

④ 对称轴为 $x=1$, $y=-2|x-1|+3$ 是轴对称图形, 正确.

故选: ①④;

【小问 3 详解】

解: 当 $x=-3$ 时 $y=-5$,

当 $x=1$ 时 $y=3$,

当 $x=6$ 时 $y=-7$,

结合函数图象可得, 当 $-3 \leq x < 6$ 时, y 的取值范围是 $-7 < y \leq 3$.

25. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 在边 BC 上, F 在边 CD 上, 连接 AE 、 BF , 若 $BE=CF$.

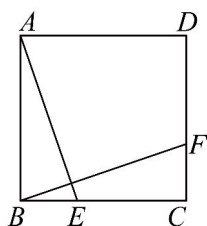


图1

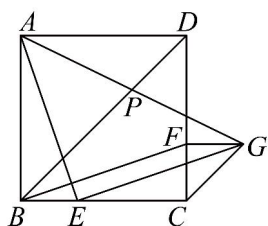


图2

(1) 求证: $AE \perp BF$;

(2) 如图 2, 连接 BD , 若将 AE 绕着点 E 旋转 90° 至 EG , 连接 GF , 连接 AG 交 BD 于点 P .

① 求证: 点 P 是 AG 中点;

② 求证: $PB = PD + \sqrt{2}BE$.

【答案】(1) 见详解 (2) ①见详解; ②见详解

【解析】

【分析】(1) 设 AE 与 BF 交于点 H , 证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$, 易得 $\angle BAE = \angle CBF$, $AE = BF$, 进而证明 $\angle CBF + \angle BEA = 90^\circ$, 即可证明结论;

(2) ① 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 CP, CG , 首先证明四边形 $BEGF$ 为平行四边形, 进而可得 $\triangle GFC$ 为等腰直角三角形, $\triangle AGC$ 为直角三角形, 然后证明 $PA = PC = PG$, 即可证明结论;

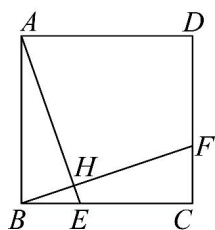
② 过点 C 作 $CQ \parallel AG$, 交 BD 于点 Q , 首先根据勾股定理证明 $CG = \sqrt{2}CF = \sqrt{2}BE$, 再证明四边形

$PQCG$ 为平行四边形, 易得 $PQ = CG = \sqrt{2}BE$, 然后证明 $\triangle ADP \cong \triangle CBQ$, 易得 $PD = QB$, 即可证明

结论.

【小问 1 详解】

解：如下图，设 AE 与 BF 交于点 H ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABC = \angle BCF, \\ BE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (SAS),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CBF, \quad AE = BF,$$

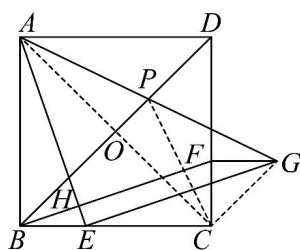
$$\therefore \angle BAE + \angle BEA = 180^\circ - \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle BEA = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BF;$$

【小问 2 详解】

①如下图，连接 AC 交 BD 于点 O ，连接 CP, CG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形， AC 为该正方形的对角线，

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

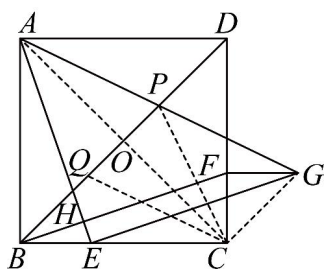
根据题意，将 AE 绕着点 E 旋转 90° 至 EG ，

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ, \quad AE = GE,$$

由 (1) 可知， $AE \perp BF$ ， $AE = BF$ ，

$\therefore \angle AHF = 90^\circ = \angle AEG, \quad BF = GE,$
 $\therefore BF \parallel EG,$
 $\therefore$ 四边形 $BEGF$ 为平行四边形,
 $\therefore FG = BE = FC, \quad FG \parallel BE,$
 $\therefore \angle GFC = \angle BCF = 90^\circ,$ 即 $\triangle GFC$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore \angle FCG = \angle FGC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ACG = \angle ACD + \angle FCG = 90^\circ,$ 即 $\triangle AGC$ 为直角三角形,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, AC 和 BD 为该正方形的对角线,
 $\therefore AC \perp BD, \quad OA = OC,$ 即 BD 垂直平分 AC ,
 $\therefore PA = PC,$
 $\therefore \angle PAC = \angle PCA,$
 又 $\because \angle PAC + \angle PGC = \angle PCA + \angle PCG = 90^\circ,$
 $\therefore \angle PGC = \angle PCG,$
 $\therefore PC = PG,$
 $\therefore PA = PC = PG,$
 $\therefore$ 点 P 是 AG 中点;

② 如下图, 过点 C 作 $CQ \parallel AG$, 交 BD 于点 Q ,



由 (2) 可知, $\triangle GFC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore CG^2 = CF^2 + GF^2 = 2CF^2,$$

$$\therefore CG = \sqrt{2}CF = \sqrt{2}BE,$$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ACG = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \parallel CQ,$$

又 $\because CQ \parallel AG$,

$\therefore$ 四边形 $PQCG$ 为平行四边形,

$$\therefore PQ = CG = \sqrt{2}BE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore BC = DA, BC \parallel DA,$$

$$\therefore \angle CBQ = \angle ADP,$$

$\because CQ \parallel AG$,

$$\therefore \angle BQC = \angle BPQ,$$

$$\text{又} \because \angle DPA = \angle BPG,$$

$$\therefore \angle DPA = \angle BQC,$$

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle CBQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle DPA = \angle BQC \\ \angle ADP = \angle CBQ, \\ AD = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle CBQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore PD = QB,$$

$$\therefore PB = BQ + PQ = PD + \sqrt{2}BE.$$

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、勾股定理、旋转的性质等知识, 熟练掌握相关知识, 正确作出辅助线是解题关键.