

2025 学年第二学期启行八年级数学

一、选择题 (共 24 分)

1. 将一个多边形纸片沿一条直线剪下一个三角形后, 变成一个五边形, 则原多边形纸片的边数不可能是 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

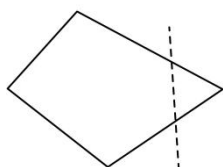
【答案】D

【解析】

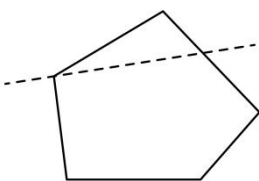
【分析】本题考查了多边形的与截面, 理解多边形边与角的关系, 图形结合分析是解题的关键.

根据题意作图分析, 即可求解.

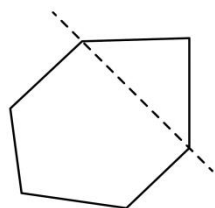
【详解】解: A、如图所示, 四边形纸片剪下一个三角形后, 可以能是五边形, 不符合题意;



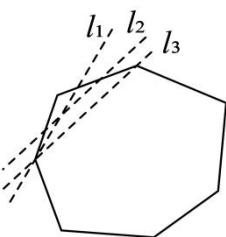
B、如图所示, 五边形纸片剪下一个三角形后, 可以能是五边形, 不符合题意;



C、如图所示, 六边形纸片剪下一个三角形后, 可以能是五边形, 不符合题意;



D、如图所示, 七边形纸片按 l_1 方式剪下一个三角形后得到一个七边形, 按 l_2 方式剪下一个三角形后得到一个七边形, 按 l_3 方式剪下一个三角形后得到一个六边形, 不可能得到五边形, 故该项符合题意;



故选: D.

2. 要判断一个四边形的窗框是否为矩形，可行的测量方案是（ ）

- A. 测量两组对边是否相等
- B. 测量对角线是否相等
- C. 测量对角线是否互相平分
- D. 测量对角线交点到四个顶点的距离是否都相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形的判定定理判定即可.

【详解】A.测量两组对边是否相等，能判定平行四边形，故 A 错误；

B.对角线相等的四边形不一定是矩形，不能判定四边形的形状，故 B 错误；

C.测量对角线是否互相平分，能判定平行四边形，故 C 错误；

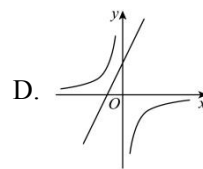
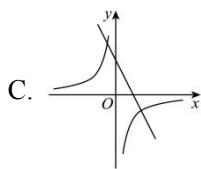
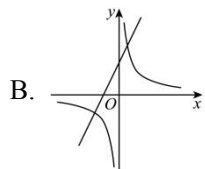
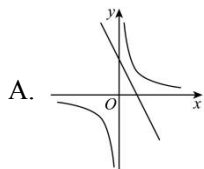
D.根据对角线相等且互相平分四边形是矩形，可知量出对角线的交点到四个顶点的距离，看是否相等，可判断是否是矩形. 故 D 正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了矩形的判定定理，矩形的判定定理有：（1）有一个角是直角的平行四边形是矩形；

（2）有三个角是直角的四边形是矩形；（3）对角线互相平分且相等的四边形是矩形.

3. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与一次函数 $y = -kx + k$ 在同一坐标系中的大致图像是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是反比例函数的图象和一次函数的图象，根据一次函数图象与反比例函数图象与系数的关系逐一判断即可求解，熟悉两函数图象的分布与其解析式中对应系数的关系是解题的关键.

【详解】解：A、由反比例函数得 $k > 0$ ，由一次函数得 $-k < 0$ ，即 $k > 0$ ，则正确，故符合题意；

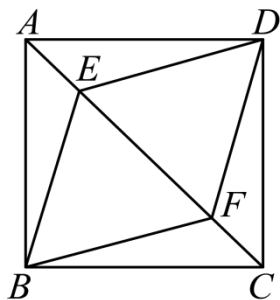
B、由反比例函数得 $k > 0$ ，由一次函数得 $-k > 0$ ，即 $k < 0$ ，则错误，故不符合题意；

C、由反比例函数得 $k < 0$ ，由一次函数得 $-k < 0$ ，即 $k > 0$ ，则错误，故不符合题意；

D、由反比例函数得 $k < 0$ ，由一次函数得 $-k > 0$ ，即 $k < 0$ ，则一次函数应交 y 轴负半轴，则错误，故不符合题意；

故选 A.

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 在对角线 AC 上，连接 BE 、 BF 、 DE 、 DF ，若要判定四边形 $BEDF$ 是菱形，则添加的条件可以是（ ）



- A. $BE = DF$ B. $\angle ABE = \angle ADE$ C. $\angle EDF = 45^\circ$ D. $AB = AF$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查正方形的性质和判定，菱形的性质和判定，根据相关性质逐一判断即可，综合掌握相关知识点是解决问题的关键。

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = AD = BC = DC, \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA = 45^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中：

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE (SAS),$$

$$\therefore BE = DE;$$

同理可证： $\triangle CBF \cong \triangle CDF (SAS)$,

$$\therefore BF = DF;$$

选项 A： $\because BE = DF, BE = DE, BF = DF$,

$\therefore BE = DE = BF = DF$ ，依据四条边相等的四边形是菱形，选项 A 正确。

选项 B： $\because \triangle ABE \cong \triangle ADE$

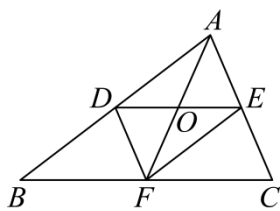
$\therefore \angle ABE = \angle ADE$ 是成立的结论，无法推出四边形 $BEDF$ 的边或对角线满足菱形的判定条件，选项 B 不符合题意。

选项 C：仅知道 $\angle EDF = 45^\circ$ ，无法保证四边形 $BEDF$ 的四条边相等或对角线互相垂直平分，不能判定其为菱形，选项 C 错误。

选项 D： $AB = AF$ 仅能确定点 F 的位置，无法保证点 E 的位置使四边形 $BEDF$ 满足菱形的判定条件，

选项 D 不符合题意.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点, 连接 DE, DF, EF, AF , 设 DE 交 AF 于点 O , 则下列结论中, 错误的是 ()



- A. $DE \parallel BC$
B. $\angle B = \angle EFC$
C. $\angle BAF = \angle CAF$
D. $OD = OE$

【答案】 C

【解析】

【分析】根据中位线定理可得 $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, $DF \parallel AC$, 进而判定四边形 $ADFE$ 是平行四边形, 结合 $AB \neq AC$ 即可求解.

【详解】 $\because$ 点 D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点,

$\therefore DE$ 、 EF 、 DF 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC, EF \parallel AB, DF \parallel AC$, 故 A 正确, 不符合题意;

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$\therefore \angle B = \angle EFC$, 故 B 正确, 不符合题意;

$\because AB \neq AC$, F 是边 BC 的中点,

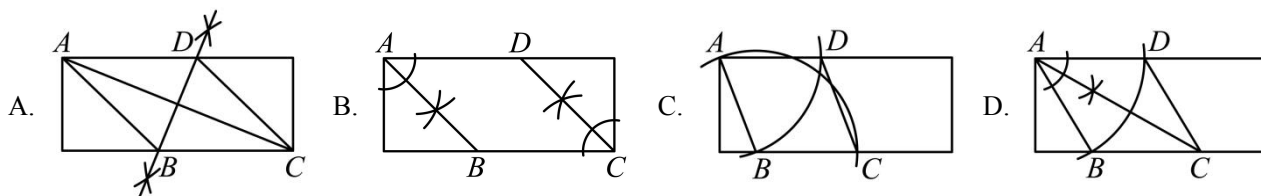
∴ AF 不是 $\angle BAC$ 的平分线, 即 $\angle BAF \neq \angle CAF$, 故 C 错误, 符合题意;

$$\because EF \parallel AD, \quad DF \parallel AE,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

$\therefore OD = OE$, 故 D 正确, 不符合题意.

6. 用直尺和圆规在一个矩形内作菱形 $ABCD$, 下列作法中, 错误的是 ()



【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查作图-复杂作图，菱形的判定，矩形的性质，等腰直角三角形的性质，勾股定理，线段垂直平分线的性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于基础题，中考常考题型.
根据菱形的判定和作图痕迹解答即可.

【详解】 解： A、由作图可得， BD 垂直平分线段 AC ，

$$\therefore BA = BC, DA = DC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ADB,$$

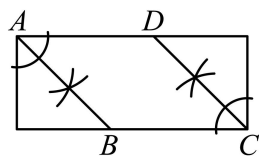
$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore BA = AD,$$

$$\therefore CB = AB = AD = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，正确；

B、由作图可得， AB 平分 $\angle DAE$ ，



$$\therefore \angle BAE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AB = \sqrt{2}BE,$$

$\therefore BC$ 的长度和 EB 的长度关系不确定，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不一定是菱形，错误；

C、由作图可得， $AD = AB = BC$ ，且 $BC \parallel AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，正确；

D、由作图可得， AC 平分 $\angle DAB$ ， $AB = AD$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle CAB,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore AB = BC = AD,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 正确;

故选: B.

二、填空题 (共 48 分)

7. 若一个多边形的内角和与外角和之比为 $7:2$, 则该多边形的边数为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查多边形的内角和和外角和的综合, 根据 n 多边形的内角和公式 $180^\circ(n-2)$ 和外角和为 360° 列方程求解即可.

【详解】 解: 设该多边形的边数为 n ,

根据题意, 得 $180^\circ(n-2) = \frac{7}{2} \times 360^\circ$,

解得 $n=9$, 即该多边形的边数为 9,

故答案为: 9.

8. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1,2)$, $B(-4,0)$, 将线段 AB 平移得到线段 $A'B'$, 点 A 和点 B 的对应点分别是点 A' 和点 B' , 如果点 A' 的坐标是 $(2,1)$, 那么点 B' 的坐标是_____.

【答案】 $(-3,-1)$

【解析】

【分析】 根据点平移的性质进行求解.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(1,2)$ 的对应点为点 $A'(2,1)$,

$\therefore$ 可以看作点 A 先向右平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度,

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(-4+1, 0-1)$, 即 $(-3,-1)$.

9. 已知关于 x 的一次函数 $y=(k-1)x+5$ 的图象经过第一、二、四象限, 写出一个满足条件的 k 的值_____.

【答案】 0 (答案不唯一, 满足 $k < 1$ 即可)

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的性质, 根据一次函数图象经过的象限, 结合常数项的符号, 判断一次项系数的符号, 得到 k 的取值范围, 在取值范围内任选一个满足条件的 k 的值即可.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y=(k-1)x+5$ 图象经过第一、二、四象限,

$\therefore k-1 < 0$, 解得 $k < 1$,

可取 $k=0$.

10. 点 C 在 y 轴上, 点 C 到点 $A(-1, 4)$ 与点 $B(2, -5)$ 的距离相等, 则点 C 的坐标为_____.

【答案】 $(0, 6)$

【解析】

【分析】 设点 C 的坐标为 $(0, y)$, 根据两点间的距离公式列式求解即可, 两点间的距离公式:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

【详解】 设点 C 坐标为 $(0, y)$.

利用两点间的距离公式, 得 $AC = \sqrt{1^2 + (4 - y)^2}$, $BC = \sqrt{2^2 + (5 - y)^2}$.

根据题意, 得 $AC = BC$,

$$\therefore AC^2 = BC^2.$$

$$\text{即 } 1 + (4 - y)^2 = 4 + (5 - y)^2.$$

解得 $y = 6$.

所以, 点 C 的坐标是 $(0, 6)$,

故答案为 $(0, 6)$.

【点睛】 本题考查了两点间的距离公式, 熟记公式与熟练解方程是解答本题的关键.

11. 已知一次函数 $y = (k - 1)x - 3$, 其中 k 为常数, 且 $k \neq 1$. 当 $-3 \leq x \leq 2$ 时, 函数 y 的最小值为 -6 , 则 k 的值为_____.

【答案】 2 或 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据一次项系数的符号分情况讨论函数的增减性, 结合 x 的取值范围确定最小值对应的自变量取值, 代入一次函数解析式求解 k 即可.

【详解】 解: 当 $k - 1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = -3$ 时, y 取得最小值 -6 ,

$$\text{代入解析式得 } -6 = -3(k - 1) - 3,$$

解得 $k = 2$, 符合 $k > 1$;

当 $k - 1 < 0$, 即 $k < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, y 取得最小值 -6 ,

代入解析式得 $-6 = 2(k-1) - 3$,

解得 $k = -\frac{1}{2}$, 符合 $k < 1$;

综上所述, k 的值为 2 或 $-\frac{1}{2}$

故答案为: 2 或 $-\frac{1}{2}$.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 12$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 连接 AG , 那么 $AG =$ _____.

【答案】 $\frac{13}{3}$

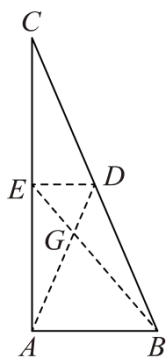
【解析】

【分析】利用勾股定理求出斜边 BC 的长度, 根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半得到 BC 边中线的长度, 再根据重心的性质求出 AG 的长度.

【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 12$,

由勾股定理得: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$,

设 BC 的中点为 D , 连接 AD ,



根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半, 得: $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}$,

作 AC 的中点 E , 连接 DE 、 BE , 设 BE 与 AD 交于点 G ,

根据中位线性质得: $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore \angle DEB = \angle ABE$, $\angle EDA = \angle BAD$,

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle ABG$,

$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$,

$\therefore AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \times \frac{13}{2} = \frac{13}{3}$.

故答案为: $\frac{13}{3}$.

13. 下列说法: ①对角线互相垂直且相等的四边形是菱形; ②矩形的对角线一定互相垂直; ③一组对边平行且相等的四边形是平行四边形; ④对角线垂直的矩形是正方形. 其中正确的是_____. (把所有正确结论的序号都填上)

【答案】③④##④③

【解析】

【分析】根据菱形, 矩形, 平行四边形, 正方形的判定定理和性质, 对每个说法逐一判断.

【详解】解: ①根据菱形的判定定理, 对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 因此对角线互相垂直且相等的四边形不一定是菱形, 故①错误;

②矩形的性质为对角线相等, 矩形对角线不一定互相垂直, 仅邻边相等的特殊矩形即正方形对角线互相垂直, 故②错误;

③根据平行四边形的判定定理, 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 故③正确;

④根据正方形的判定定理, 对角线垂直的矩形是正方形, 故④正确;

综上, 正确的是③④.

14. 我们把边长是两条对角线长度的比例中项的菱形叫做“钻石菱形”, 如果一个“钻石菱形”的边长是6, 那么这个菱形的面积是_____.

【答案】18

【解析】

【分析】根据比例中项的定义可求对角线的乘积. 再根据菱形的面积等于对角线乘积的一半求解.

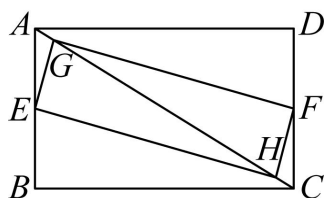
【详解】解: 对角线的乘积 $= 6^2 = 36$,

$\therefore$ 菱形的面积 $= \frac{1}{2} \times 36 = 18$.

故答案为: 18.

【点睛】本题主要考查比例线段、菱形的性质、菱形的面积公式, 熟练掌握菱形性质和菱形的面积公式是解题关键.

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 8$, E 、 F 分别是边 AB 、 DC 的中点, 点 G 、 H 在对角线 AC 上, 如果四边形 $EGFH$ 是矩形, 那么 AG 的长等于_____.

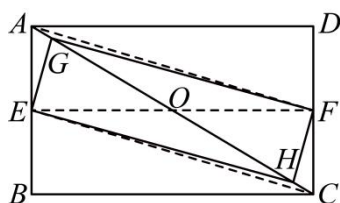


【答案】 $2\sqrt{5} - 4$

【解析】

【分析】 连接 EF ， AF ， CE ，设 AC, EF 交于点 O ，根据勾股定理求出 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ ，证明四边形 $BEFC$ 为平行四边形，得出 $EF = BC = 8$ ，证明四边形 $AECF$ 为平行四边形，得出 $AO = CO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{5}$ ，最后求出结果即可。

【详解】 解：连接 EF ， AF ， CE ，设 AC, EF 交于点 O ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ ，

$\because E$ 、 F 分别是边 AB 、 DC 的中点，

$\therefore BE = AE = \frac{1}{2}AB$ ， $CF = DF = \frac{1}{2}CD$ ，

$\therefore AE = BE = CF = FD$ ，

$\therefore BE = CF$ ，

$\therefore BE \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $BEFC$ 为平行四边形，

$\therefore EF = BC = 8$ ，

$\therefore AE = CF$ ， $AE \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形，

$\therefore AO = CO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{5}$ ，

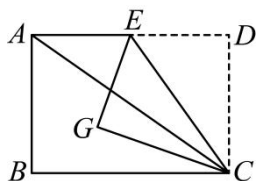
$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 为矩形，

$$\therefore GO = \frac{1}{2}GH, \quad GH = EF = 8,$$

$$\therefore GO = 4,$$

$$\therefore AG = 2\sqrt{5} - 4.$$

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD = 4\sqrt{2}$, E 为 AD 上一点, 将 $\triangle EDC$ 沿 EC 翻折, 点 D 的对应点 G 恰好为 ABC 的重心, 那么 $DC =$ _____.

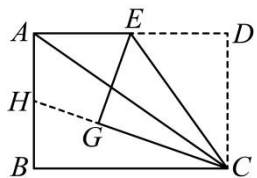


【答案】4

【解析】

【分析】延长 CG 交 AB 于点 H , 由重心的定义和性质可得 $BH = \frac{1}{2}AB$, $CG = 2GH$, 由折叠的性质可得 $CG = CD$, 设 $HG = x$, 则 $CG = CD = AB = 2x$, $BH = x$, $CH = 3x$, 再利用勾股定理建立方程求解即可.

【详解】解: 如图所示, 延长 CG 交 AB 于点 H ,



$\therefore$ 点 G 为 ABC 的重心,

$$\therefore BH = \frac{1}{2}AB, \quad CG = 2GH,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD, \quad BC = AD = 4\sqrt{2}, \quad \angle B = 90^\circ,$$

由折叠的性质可得 $CG = CD$,

设 $HG = x$, 则 $CG = CD = AB = 2x$,

$$\therefore BH = x, \quad CH = 3x,$$

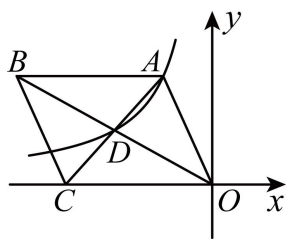
在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, 由勾股定理得 $CH^2 = BH^2 + BC^2$,

$$\therefore (3x)^2 = x^2 + (4\sqrt{2})^2,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = -2$ (舍去),

$$\therefore CD = 4.$$

17. 如图, 点 C 在 x 轴上, 平行四边形 $OABC$ 的对角线 OB , AC 相交于点 D , 双曲线 $y = -\frac{4}{x}$ 经过 A , D 两点, 则平行四边形 $OABC$ 的面积是_____.

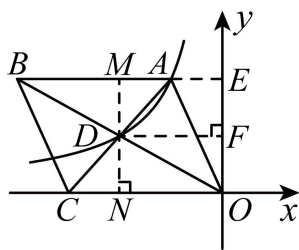


【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的 k 的几何意义, 延长 BA 交 y 轴于点 E , 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于点 F , 过点 D 作 $MN \parallel y$ 轴, 交 AB 于点 M , 交 OC 于点 N , 证明 $\triangle ADM \cong \triangle CDN$ (AAS) 得出 $DM = DN$, $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDN}$, 则 $S_{\text{四边形}AONM} = S_{\text{四边形}BCNM} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$, 由 k 的几何意义可得 $S_{\text{矩形}ONDF} = 4$, $S_{\triangle AOE} = 2$ 得出 $S_{\text{四边形}AONM} = 8 - 2 = 6$, 即可求解.

【详解】 解: 如图, 延长 BA 交 y 轴于点 E , 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于点 F , 过点 D 作 $MN \parallel y$ 轴, 交 AB 于点 M , 交 OC 于点 N ,



$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore AD = CD$, $AB \parallel CO$,

即 $AM \parallel CN$

$\therefore \angle MAD = \angle DCN$

又 $\because \angle ADM = \angle CDN$

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDN$ (AAS),

$\therefore DM = DN$, $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDN}$

又 $\because S_{\triangle OAC} = S_{\triangle ABC}$,

$$\therefore S_{\text{四边形}AONM} = S_{\text{四边形}BCNM} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$$

由 k 的几何意义可得 $S_{\text{矩形}ONDF} = 4$, $S_{\triangle AOE} = 2$

$$\therefore S_{\text{矩形}ONME} = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AONM} = 8 - 2 = 6$$

$\therefore$ 行四边形 $OABC$ 的面积是 12

故答案为: 12.

18. 平行四边形 $ABCD$ 中, 两条邻边长分别为 6 和 10, $\angle BAD$ 与 $\angle ABC$ 的平分线交于点 E , 点 F 是 CD 的中点, 连接 EF , 则 $EF =$ _____.

【答案】 7 或 1

【解析】

【分析】分两种情形分别求解即可解决问题: ①如图 1 中, 当 $AB = 6$, $BC = 10$ 时, 延长 AE 交 BC 于 M . ②如图 2 中, 当 $AB = 10$, $BC = 6$ 时; 由三角形全等的判定和性质, 平行四边形的判定和性质可以得出答案.

【详解】解: ①如图 1 中, 当 $AB = 6$, $BC = 10$ 时, 延长 AE 交 BC 于 M , 过点 F 作 $GH \parallel AM$, 交 AD 于点 G , 交 BC 的延长线于点 H ,

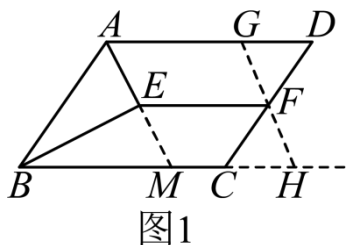


图1

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle AMB,$$

$$\because \angle DAM = \angle BAM,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle AMB,$$

$$\therefore AB = BM = 6,$$

$$\therefore CM = BC - BM = 4,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ,$$

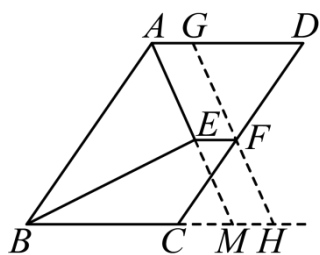
$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp AM,$$

$$\because BA = BM,$$

$\therefore AE = EM$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle D = \angle FCH$, $\angle DGF = \angle CHF$,
 $\because DF = CF$,
 $\therefore \triangle DFG \cong \triangle CFH$ (AAS) ,
 $\therefore CH = DG$, $GF = FH$,
 $\therefore AG \parallel MH$, $GH \parallel AM$,
 $\therefore$ 四边形 $AMHG$ 为平行四边形 ,
 $\therefore AG = MH$, $GH = AM$,
 $\therefore AD - GD = CM + CH$,
 $\therefore 10 - DG = 4 + DG$,
 $\therefore DG = 3$,
 $\therefore AG = 10 - 3 = 7$,
 $\therefore AE = EM = \frac{1}{2} AM$, $GF = FH = \frac{1}{2} GH$,
 $\therefore AE = GF$,
 $\therefore AE \parallel GF$,
 $\therefore$ 四边形 $AEFG$ 为平行四边形 ,
 $\therefore EF = AG = 7$;

②如图 2 中, 当 $AB = 10$, $BC = 6$ 时, 延长 AE , BC 交于点 M , 过点 F 作 $GH \parallel AM$, 交 AD 于点 G , 交 BC 的延长线于点 H ,



同理可证: $AE = EM$, $BM = AB = 10$,
 $\therefore CM = BM - BC = AB - BC = 4$,
 $\therefore \square ABCD$ 中 $AD \parallel BC$, 即 $AG \parallel MH$,
 $\therefore$ 四边形 $AMHG$ 为平行四边形 ,
 $\therefore AG = MH$, $GH = AM$,

$$\therefore AD \parallel CH,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle CHF, \quad \angle D = \angle FCH,$$

$$\therefore CF = DF,$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle CHF (AAS),$$

$$\therefore DG = CH, \quad GF = FH = \frac{1}{2}GH,$$

$$\therefore AD - AG = CM + MH,$$

$$\therefore 6 - AG = 4 + AG,$$

$$\text{解得: } AG = 1,$$

$$\therefore AE = EM = \frac{1}{2}AM, \quad GF = FH = \frac{1}{2}GH, \quad AM = GH,$$

$$\therefore AE = GF,$$

$$\therefore AE \parallel GF,$$

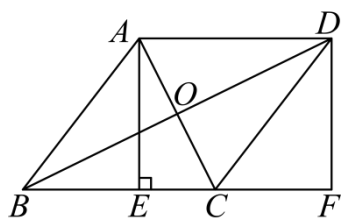
$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 为平行四边形,

$$\therefore EF = AG = 1;$$

综上所述, EF 的长为 7 或 1.

三、解答题: (共 78 分)

19. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , 过点 A 作 BC 的垂线, 垂足为点 E , 延长 BC 到点 F , 使 $CF = BE$, 连接 DF .



(1) 求证: 四边形 $AEFD$ 是矩形;

(2) 若 $AB = 6$, $AC = 4$, 求四边形 $AEFD$ 的面积.

【答案】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AD \parallel BC, AB = DC, AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DCF,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DAE = 90^\circ = \angle AEF,$$

$$\therefore BE = CF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AEB = \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEF = \angle F = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形

$$(2) 16\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 $AD \parallel BC, AB = DC, AB \parallel DC$, 然后可得 $\triangle ABE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)}$, 进而可得 $\angle DAE = \angle AEF = \angle F = 90^\circ$, 最后问题可求证;

(2) 由题意易得 $AD = BC = AB = 6, AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = 2, BO = \frac{1}{2}BD$, 然后根据菱形的面积公式可进行求解.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AD = BC = AB = 6, AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = 2, BO = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 16\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{矩形}AEFD} = AD \cdot AE = S_{\text{菱形}ABCD} = 16\sqrt{2}.$$

20. 如图 1, 在 $\square ABCD$ 中, E 为 BC 上一点, 使 $BE = EC$, 过点 A 作 $AF \parallel BE$ 交 CE 的延长线于点 F , 连接 DF .

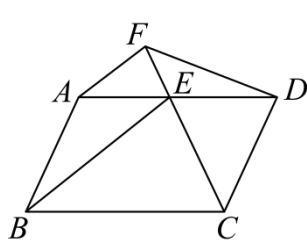


图1

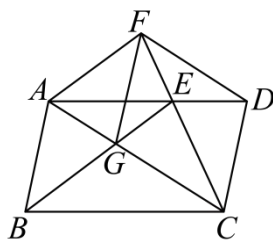


图2

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle FDA$;

(2) 如图 2, 连接 AC 交 BE 于点 G , 若 $BG = AF$, 求证: 四边形 $CDFG$ 是菱形.

【答案】(1) 证明: $\because AF \parallel BE$,

$$\therefore \angle FAE = \angle AEB, \quad \angle AFE = \angle BEC$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC.$$

$$\therefore \angle BCE = \angle AEF;$$

$$\because BE = BC,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle BEC, BE = AD.$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE;$$

$$\therefore AF = AE,$$

在

$\triangle ABE$ 和 $\triangle FDA$ 中,

$$\begin{cases} BE = DA \\ \angle AEB = \angle FAD \\ AE = FA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDA (SAS).$$

(2) 证明: $\because AF \parallel BE, \quad BG = AF$,

$\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是平行四边形.

$$\therefore AB \parallel GF, \quad AB = GF,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$\therefore AB \parallel DC, \quad AB = DC,$$

$$\therefore GF \parallel DC, \quad GF = DC$$

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 是平行四边形.

$$\because \triangle ABE \cong \triangle FDA,$$

$$\therefore FD = AB,$$

$$\text{又} \because AB = CD,$$

$$\therefore FD = CD$$

$\therefore$ 平行四边形 $CDFG$ 是菱形.

【解析】

【分析】(1) 由平行得到 $\angle FAE = \angle AEB, \quad \angle AFE = \angle BEC$, 由 $\square ABCD$ 得到 $\angle BCE = \angle AEF$,

$AD = BC$ 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle FDA$;

(2) 先证明四边形 $ABGF$ 是平行四边形. 得到 $AB \parallel GF$, $AB = GF$, 再由 $\square ABCD$ 得到 $AB \parallel DC$, $AB = DC$, 即可证明四边形 $CDFG$ 是平行四边形. 结合 $\triangle ABE \cong \triangle FDA$ 得到 $FD = AB = CD$, 即可证明平行四边形 $CDFG$ 是菱形.

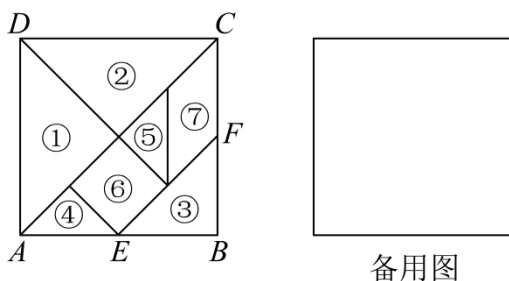
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

21. 七巧板由五个等腰直角三角形与两个平行四边形组成, 用七巧板可以拼出 2600 多种图形. 如图, 图中的正方形 $ABCD$ 就是由七巧板无缝隙、无重叠地拼接而成 (简称密铺). 如果设编号为④的三角形的面积为 2.



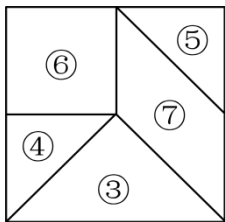
备用图

(1) 直接写出四边形 $AEFC$ 的周长与面积: $C_{AEFC} = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_{AEFC} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 小明说: 他可以用编号分别为③, ④, ⑤, ⑥, ⑦的五块板密铺出一个新的正方形, 试求这个密铺出的新正方形的边长与面积, 并在备用图中画出密铺之后新正方形的示意图 (每块标注对应编号).

【答案】(1) $12 + 4\sqrt{2}$, 12

(2) 新正方形的边长为 4, 面积为 16, 示意图如图所示:



【解析】

【分析】(1) 先求出等腰直角三角形④的腰长, 可得正方形⑥的边长, 进而得到等腰直角三角形①的腰长, 再分别求出等腰直角三角形①和④的底边长, 即可求出 $BE = BF = 2\sqrt{2}$, $AC = 8$, 进而求出 $CF = 2\sqrt{2}$, $EF = 4$, 即可求出四边形 $AEFC$ 的周长与面积;

(2) 根据③, ④, ⑤, ⑥, ⑦五块板的面积和为16, 可得用③, ④, ⑤, ⑥, ⑦五块板密铺出一个新正方形的边长为4, 即可解答.

【小问1 详解】

解: $\because$ 编号为④的等腰直角三角形的面积为2,

$\therefore$ 等腰直角三角形④的腰长为 $\sqrt{2 \times 2} = 2$,

$\therefore$ 正方形⑥的边长为2,

$\therefore$ 等腰直角三角形①的腰长为4,

$\therefore$ 等腰直角三角形①的底边长为 $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 等腰直角三角形④的底边长为 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AD = CD = AB = BC = 4\sqrt{2}$, $AE = 2\sqrt{2}$,

$\therefore BE = BF = AB - AE = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 8$,

$\therefore CF = BC - BF = 2\sqrt{2}$, $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 4$,

$\therefore$ 四边形 $AEFC$ 的周长为 $AC + AE + EF + CF = 8 + 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} = 12 + 4\sqrt{2}$, 面积为

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC - \frac{1}{2} BE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12;$$

【小问2 详解】

解: $\because$ ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦五块板密铺出的正方形的面积刚好是 ABC 的面积,

$\therefore$ 新正方形的面积为 $\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16$;

$\therefore$ 用③, ④, ⑤, ⑥, ⑦五块板密铺出一个新正方形的边长为 $\sqrt{16} = 4$,

$\therefore$ 新正方形的面积为 $4 \times 4 = 16$;

示意图如下 (略).

22. 在四边形 $ABCD$ 中, E , F 分别是 AB , CD 的中点,

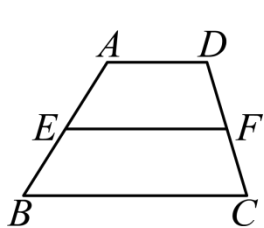


图1

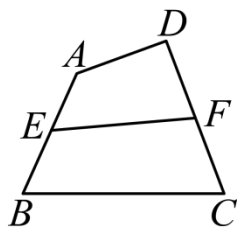
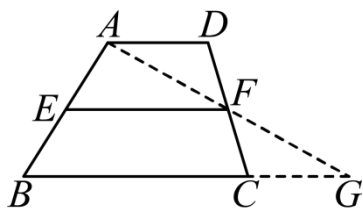


图2

(1) 如图1, 当 $AD \parallel BC$ 时, 求证: $AD + BC = 2EF$

(2) 如图 2, 当 AD 不平行于 BC 时, 求证: $AD + BC > 2EF$.

【答案】(1) 证明: 连接 AF 并延长, 交 BC 的延长线于点 G , 如图所示:



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle D = \angle FCG$, $\angle DAF = \angle CGF$,

$\because F$ 是 CD 的中点,

$\therefore DF = FC$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle GCF$ (AAS),

$\therefore AD = CG$, $AF = FG$,

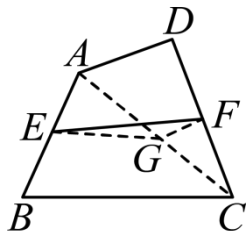
$\because E$ 是 AB 的中点,

$\therefore BG = 2EF$,

$\therefore BC + CG = 2EF$,

$\therefore AD + BC = 2EF$.

(2) 证明: 连接 AC , 取 AC 的中点 G , 连接 EG , FG , 如图所示:



$\because E, F, G$ 分别是 AB, CD, AC 的中点,

$\therefore EG = \frac{1}{2}BC$, $FG = \frac{1}{2}AD$, $EG \parallel BC$, $FG \parallel AD$,

$\therefore FG + EG = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC)$,

$\because AD$ 与 BC 不平行,

$\therefore B, G, F$ 三个点一定不在同一直线上,

$\therefore GF + EG > EF$,

$\therefore \frac{1}{2}(AD + BC) > EF$,

即 $AD + BC > 2EF$.

【解析】

【分析】(1) 连接 AF 并延长, 交 BC 的延长线于点 G , 证明 $\triangle ADF \cong \triangle GCF$ (AAS), 得出 $AD = CG$, $AF = FG$, 根据中位线的性质得出 $BG = 2EF$, 即可得出结论;

(2) 连接 AC , 取 AC 的中点 G , 连接 EG , FG , 根据三角形中位线的性质得出 $EG = \frac{1}{2}BC$, $FG = \frac{1}{2}AD$, $EG \parallel BC$, $FG \parallel AD$, 即可得出 $FG + EG = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC)$, 根据两点之间线段最短得出 $GF + EG > EF$, 即可证明结论.

【小问 1 详解】

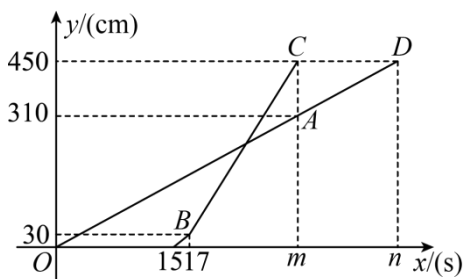
略

【小问 2 详解】

略

23. 甲、乙两台智能机器人从同一地点出发, 沿着笔直的路线行走了 450cm. 甲比乙先出发, 并且匀速走完全程, 乙出发一段时间后速度提高为原来的 2 倍. 设甲行走的时间为 x (s), 甲、乙行走的路程分别为 y_1 (cm)、 y_2 (cm), y_1 、 y_2 与 x 之间的函数图象如图所示, 根据图象所提供的信息解答下列问题:

- (1) 乙比甲晚出发_____s, 乙提速前的速度是每秒_____cm, m =_____, n =_____;
- (2) 当 x 为何值时, 乙追上了甲?
- (3) 在乙提速后到甲、乙都停止的这段时间内, 当甲、乙之间的距离不超过 20cm 时, 求 x 的取值范围.



【答案】(1) 15; 15; 31; 45; (2) 24 秒 (3) $23 \leq x \leq 25$ 或 $43 \leq x \leq 45$

【解析】

【详解】解: (1) 由题意可知, 当 $x=15$ 时, $y_2=0$, 故乙比甲晚出发 15 秒;

当 $x=15$ 时, $y_2=0$; 当 $x=17$ 时, $y_2=30$; 故乙提速前的速度是 $\frac{30}{17-15}=15$ (cm/s);

$\therefore$ 乙出发一段时间后速度提高为原来的 2 倍,

$\therefore$ 乙提速后速度为 30cm/s,

故提速后乙行走所用时间为: $\frac{450-30}{30}=14$ (s),

$\therefore m=17+14=31$ (s),

甲的速度为： $310 \div 31 = 10$ (m/s)

$$n = \frac{450}{10} = 45;$$

故答案为 15; 15; 31; 45;

(2) 设 OA 段对应的函数关系式为 $y_1 = kx$,

$\because$ A (31, 310) 在 OA 上,

$$\therefore 31k = 310, \text{ 解得 } k = 10,$$

$$\therefore y_1 = 10x.$$

设 BC 段对应的函数关系式为 $y_2 = k_1x + b$,

$\because$ B (17, 30)、C (31, 450) 在 BC 上,

$$\therefore \begin{cases} 17k_1 + b = 30 \\ 31k_1 + b = 450 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = 30 \\ b = -480 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = 30x - 480,$$

由乙追上了甲, 得 $10x = 30x - 480$, 解得 $x = 24$.

答: 当 x 为 24 秒时, 乙追上了甲.

(3) 若 $y_1 - y_2 \leq 20$, 即 $10x - 30x + 480 \leq 20$,

解得: $23 \leq x \leq 24$,

若 $y_2 - y_1 \leq 20$, 即 $30x - 480 - 10x \leq 20$,

解得: $24 \leq x \leq 25$,

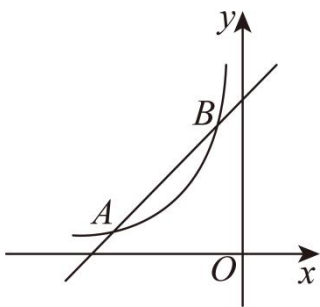
若 $450 - y_1 \leq 20$, 即 $450 - 10x \leq 20$,

解得: $43 \leq x \leq 45$,

综上所述, 当 $23 \leq x \leq 25$ 或 $43 \leq x \leq 45$ 时, 甲、乙之间的距离不超过 20cm.

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y_1 = kx + 5$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 的图象交于 A,

B 两点, 其中点 A 的坐标是 $(-4, 1)$.



(1) 分别求反比例函数和一次函数的表达式;

(2) 将一次函数 $y_1 = kx + 5$ 的图象向右平移 n 个单位, 平移后的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x}$ 图象在第二象限内只有一个交点, 求 n 的值.

(3) 在 (2) 的条件下平移后的图像上有一点 C , 平面内存在一个点 D , 使得 A 、 B 、 C 、 D 所组成的四边形为矩形, 请直接写出满足条件所有点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{4}{x}$, $y_1 = x + 5$

(2) $n = 1$

(3) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 或 $(-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ 或 $(-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 将点 A 的坐标分别代入函数表达式中即可求解;

(2) 求出平移后的一次函数表达式, 联立反比例函数表达式, 得到一元二次方程, 根据 $\Delta = 0$ 求解即可;

(3) 分两种情况讨论, 当 AB 为边时, 当 AB 为对角线时, 分别求出点 C 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解: 将点 A 的坐标 $(-4, 1)$ 代入 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$), 得

$$1 = \frac{m}{-4}, \text{ 解得 } m = -4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为: } y_2 = -\frac{4}{x}.$$

将点 A 的坐标 $(-4, 1)$ 代入 $y_1 = kx + 5$, 得

$$1 = -4k + 5, \text{ 解得 } k = 1,$$

$$\therefore \text{一次函数的表达式为: } y_1 = x + 5;$$

【小问 2 详解】

解: 一次函数 $y_1 = x + 5$ 向右平移 n 个单位后的表达式为: $y_1' = x - n + 5$,

$$\text{联立} \begin{cases} y_1' = x - n + 5 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases},$$

$$\text{则 } x - n + 5 = -\frac{4}{x},$$

$$\text{整理得: } x^2 + (5 - n)x + 4 = 0,$$

$\therefore$ 平移后的图象与反比例函数图象在第二象限内只有一个交点,

$$\therefore \Delta = (5-n)^2 - 4 \times 4 = 0,$$

解得 $n=1$ 或 $n=9$.

当 $n=9$ 时, $y_1' = x-4$, 不经过第二象限, 舍去.

$$\therefore n=1.$$

【小问 3 详解】

解: 当 $n=1$ 时, $y_1' = x+4$.

$$\text{联立} \begin{cases} y_1 = x+5 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases},$$

$$\therefore B(-1, 4).$$

如图, 点 $Q(1, 1)$,

则直线 OQ 的解析式为 $y=x$, $OR=QR=1$,

$$\therefore \angle QOR = \angle RQO = 45^\circ.$$

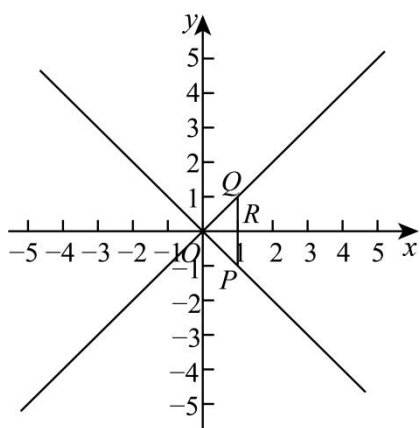
设点 $P(1, -1)$,

则直线 OP 的解析式为 $y=-x$, $OR=PR=1$,

$$\therefore \angle POR = \angle RPO = 45^\circ.$$

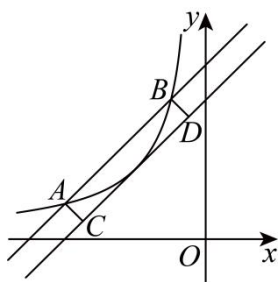
$$\therefore \angle QOP = 90^\circ.$$

$\therefore$ 与直线 $y=x$ 垂直的直线为直线 $y=-x$.



当 AB 为边时,

过点 A 作 AB 的垂线 l_1 , 交直线 $y_1' = x+4$ 于点 C ,



由上可得直线 l_1 的表达式为: $y = -x + b_1$,

将点 $A(-4, 1)$ 代入, 得

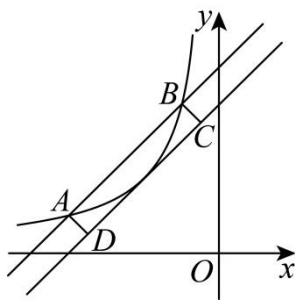
$$1 = 4 + b_1, \text{ 解得 } b_1 = -3.$$

$\therefore$ 直线 l_1 的表达式为: $y = -x - 3$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -x - 3 \\ y_1' = x + 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为: $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

过点 B 作 AB 的垂线 l_2 , 交直线 $y_1' = x + 4$ 于点 C ,



同理可得, 直线 l_2 的表达式为: $y = -x + 3$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -x + 3 \\ y_1' = x + 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

当 AB 为对角线时,

$$\text{则 } AB = \sqrt{(-4+1)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{2},$$

设点 $C(m, m+4)$,

$$\because AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore (m+4)^2 + (m+3)^2 + (m+1)^2 + m^2 = (3\sqrt{2})^2,$$

$$\text{解得 } m = -2 + \sqrt{2} \text{ 或 } m = -2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为: } (-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \text{ 或 } (-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$

综上所述, 点 C 的坐标为: $(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ 或 $(-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ 或 $(-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

25. 综合与实践

【问题背景】折纸是一门将数学、艺术与工程完美结合的学科. 通过折纸不仅能够创造出非常奇妙的图形, 还可以发现一些有趣的数学问题, 下面我们就利用一张正方形纸片来开展“折纸与数学”探究活动.

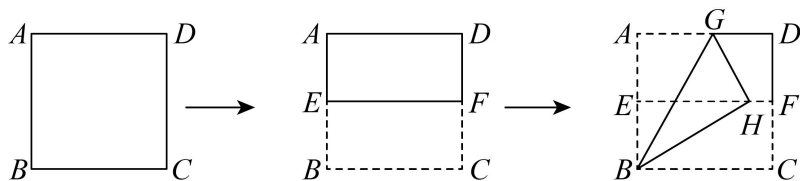


图1正方形 $ABCD$ 图2对折正方形 $ABCD$ 图3将点 A 折至 EF 上点 H

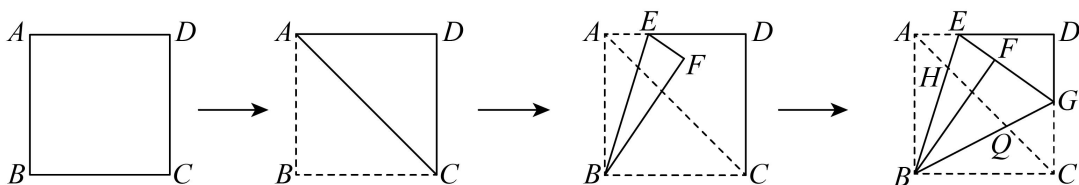


图4正方形 $ABCD$ 图5对折正方形 $ABCD$ 图6将 AB 折至 BF 图7将 BC 折至 BF

【操作探究】

(1) 高斯小组将正方形纸片 (如图 1) 按照图 2 至图 3 的方式操作, 那么图 3 中 $\angle ABG = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$, 并写出求解过程.

(2) 欧拉小组将正方形纸片 (如图 4) 按照图 5 至图 7 的方式操作, 折痕 BE 、 BG 与折痕 AC 的交点分别是 H 、 Q , 经过多次操作和测量, 发现点 E 、 F 、 G 始终三点共线, 设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当 $AE = \frac{1}{3}$ 时, 请你帮助欧拉小组求出此时线段 CG 的长, 并写出求解过程.

(3) 【尝试应用】经过数学老师的启发和指导, 欧拉小组发现线段 AE 与线段 CG 之间存在着数量关系, 设

解得 $x = \frac{1}{2}$,

即 $CG = \frac{1}{2}$;

$$(3) \frac{1-m}{m+1}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}-a-\sqrt{2}a^2}{2-a^2}$$

【解析】

【分析】(1) 利用折叠的性质求得 $\triangle ABH$ 是等边三角形，据此求解即可；

(2) 设 $CG = FG = x$ ，则 $DG = 1 - x$ ，根据点 E 、 F 、 G 三点共线，得出 $EG = EF + FG = \frac{1}{3} + x$ ，根据勾股定理得出 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1-x)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ ，求出 x 的值即可；

(3) 仿照解析 (2) 的方法，进行求解即可；

(4) 过点 H 作 $HM \perp AB$ 于点 M ，作 $HN \perp AD$ 于点 N ，过点 Q 作 $QK \perp CD$ 于点 K ，作 $QJ \perp BC$ 于点 J ，

设 $AE = m$ ，由 (3) 可得 $CG = \frac{1-m}{m+1}$ ，利用等面积法求出 $a = \frac{\sqrt{2}m}{1+m}$ ，同理求出 $m = 1 - \sqrt{2}CQ$ ，把

$m = 1 - \sqrt{2}CQ$ 代入 $a = \frac{\sqrt{2}m}{1+m}$ 得出 $a = \frac{\sqrt{2}m}{1+m} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}CQ)}{1+(1-\sqrt{2}CQ)}$ ，整理即可得出答案.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，边长为 1，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = BC = CD = AD = 1$ ，

$\therefore AE = m$ ，

$\therefore DE = 1 - m$ ，

根据折叠可得 $AE = EF$ ， $CG = GF$ ， $\angle EFB = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle BFG = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EFB + \angle BFG = 180^\circ$ ，

$\therefore E$ 、 F 、 G 三点共线，

设 $CG = FG = x$ ，则 $DG = 1 - x$ ， $EG = EF + FG = m + x$ ，

在 $Rt\triangle EDG$ 中，根据勾股定理得 $DE^2 + DG^2 = EG^2$ ，

$$\therefore (1-m)^2 + (1-x)^2 = (x+m)^2,$$

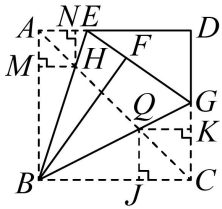
$$\text{解得 } x = \frac{1-m}{m+1},$$

$$\text{即 } CG = \frac{1-m}{m+1};$$

【小问 4 详解】

解：过点 H 作 $HM \perp AB$ 于点 M ，作 $HN \perp AD$ 于点 N ，过点 Q 作 $QK \perp CD$ 于点 K ，作 $QJ \perp BC$ 于点 J ，

如图所示：



则 $\angle ANH = \angle AMH = \angle CKQ = \angle CJQ = 90^\circ$ ，

根据题意得：正方形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = AD = 1$ ，

设 $AE = m$ ，由 (3) 可得 $CG = \frac{1-m}{m+1}$ ，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 中， $\angle BAC = \angle DAC = \angle ACD = \angle ACB = 90^\circ \times \frac{1}{2} = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle AMH$ ， $\triangle ANH$ ， $\triangle CQK$ ， $\triangle CQJ$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore AH = \sqrt{MA^2 + MH^2} = \sqrt{2MH^2} = \sqrt{2}MH, \quad AH = \sqrt{NA^2 + NH^2} = \sqrt{2NH^2} = \sqrt{2}NH,$$

$$CQ = \sqrt{CJ^2 + QJ^2} = \sqrt{2QJ^2} = \sqrt{2}QJ, \quad CQ = \sqrt{CK^2 + QK^2} = \sqrt{2QK^2} = \sqrt{2}QK,$$

$$\therefore MH = NH = \frac{\sqrt{2}}{2}AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad QK = QJ = \frac{\sqrt{2}}{2}CQ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \times AE = \frac{1}{2} \times 1 \times m = \frac{1}{2}m,$$

$$\text{又 } \therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle AEH} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{1}{2}m \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{4}am,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{4}am = \frac{1}{2}m,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}m}{1+m},$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} BC \times CG = \frac{1}{2} \times 1 \times CG = \frac{1}{2} CG,$$

$$\text{又} \because S_{\triangle BCG} = S_{\triangle BCQ} + S_{\triangle CGQ}$$

$$= \frac{1}{2} BC \times QJ + \frac{1}{2} CG \times QK$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} CQ + \frac{1}{2} CG \times \frac{\sqrt{2}}{2} CQ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} CQ + \frac{\sqrt{2}}{4} CG \cdot CQ,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{4} CQ + \frac{\sqrt{2}}{4} CG \cdot CQ = \frac{1}{2} CG,$$

$$\therefore CQ = \frac{\sqrt{2}CG}{1+CG} = \frac{\frac{\sqrt{2}(1-m)}{1+m}}{1+\frac{1-m}{1+m}} = \frac{\sqrt{2}(1-m)}{2},$$

$$\therefore 2CQ = \sqrt{2}(1-m),$$

$$\therefore m = 1 - \sqrt{2}CQ,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}m}{1+m} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}CQ)}{1+(1-\sqrt{2}CQ)},$$

$$\text{解得: } CQ = \frac{\sqrt{2}-2a}{2-\sqrt{2}a} = \frac{(\sqrt{2}-2a)(2+\sqrt{2}a)}{(2-\sqrt{2}a)(2+\sqrt{2}a)} = \frac{\sqrt{2}-a-\sqrt{2}a^2}{2-a^2}.$$