

作业 2

一. 选择题 (本大题共 6 小题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中属于一次函数的是 ()

A. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

B. $y = 2x^2 - 1$

C. $y = 3x - 1$

D. $y = kx + b$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的判断, 根据一次函数的定义: 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k, b 为常数) 的函数叫做一次函数, 逐一判断选项即可.

【详解】 解: $\because$ 选项 A 中 $y = x^2 + \frac{1}{x}$, 含 x^2 和 $\frac{1}{x}$ 项, 不符合一次函数定义, $\therefore$ A 错误;

$\because$ 选项 B 中 $y = 2x^2 - 1$, x 的最高次数为 2, 不符合一次函数定义, $\therefore$ B 错误;

$\because$ 选项 C 中 $y = 3x - 1$, 符合一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的形式, $\therefore$ C 正确;

$\because$ 选项 D 中 $y = kx + b$, 未说明 $k \neq 0$, 当 $k = 0$ 时不是一次函数, $\therefore$ D 错误.

2. $\square ABCD$ 中, $\angle A$ 的度数为 100° , 则 $\angle C =$ ()

A. 60°

B. 80°

C. 100°

D. 120°

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行四边形的对角相等的性质即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

$$\because \angle A = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 100^\circ.$$

故选: C.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 注意掌握平行四边形的对角相等的性质.

3. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 下列条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()

A. $AC = BD$

B. $OA = OB$

C. $\angle DAC = \angle BAC$

D. $\angle ABC = \angle BAD$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了添加一个条件是矩形，添加一个条件是菱形，平行四边形的性质，解题关键是掌握上述判定与性质.

根据添加一个条件是矩形，添加一个条件是菱形，平行四边形的性质，对四个条件逐一分析，再作判断.

【详解】解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

添加 $AC = BD$ ，根据对角线相等的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 A 不符合；

添加 $OA = OB$ ，可得 $AC = BD$ ，

根据对角线相等的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 不符合；

添加 $\angle DAC = \angle BAC$ ，可得出四边形 $ABCD$ 是菱形，

不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 C 符合；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，

添加 $\angle ABC = \angle BAD$ ，可得出 $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，

根据一个角是直角的平行四边形是矩形，

可判定四边形 $ABCD$ 是矩形，故 D 不符合，

故选：C.

4. 一次函数 $y = -3x - 1$ 的图象一定不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质，根据一次函数的解析式判断出直线经过的象限，即可得出结果. 熟练掌握一次函数的性质，是解题的关键.

【详解】解： $\because y = -3x - 1$ ， $-3 < 0$ ， $-1 < 0$ ，

$\therefore$ 一次函数的图象经过二、三、四象限，不经过第一象限；

故选 A.

5. 若点 $(2, y_1)$ ， $(3, y_2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，则 y_1 ， y_2 的大小关系是 ()

A. $y_1 > y_2 > 0$

B. $y_2 > y_1 > 0$

C. $0 > y_1 > y_2$

D. $0 > y_2 > y_1$

【答案】D

【解析】

【分析】直接代入横坐标求出对应纵坐标，再比较大小即可.

【详解】解：∵点 $(2, y_1)$ ， $(3, y_2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，

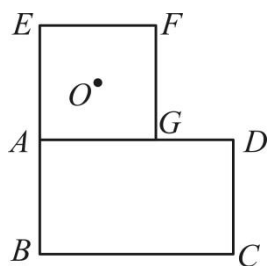
∴将 $x=2$ 代入解析式，得 $y_1 = -\frac{6}{2} = -3$ ，

将 $x=3$ 代入解析式，得 $y_2 = -\frac{6}{3} = -2$ ，

∴ $-2 > -3$ ，且 y_1 、 y_2 都小于0，

∴ $0 > y_2 > y_1$ ，故选D.

6. 如图1，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $BC=10$. 正方形 $AEFG$ 的顶点 E 在 BA 的延长线上， $AE=AB$ ，点 G 在边 AD 上， O 为正方形 $AEFG$ 的中心，如果过点 O 的一条直线平分这个组合图形的面积，且这条直线分别交 EF 、 BC 于点 M 、 N ，那么线段 MN 的长为（ ）



A. $2\sqrt{17}$

B. $4\sqrt{10}$

C. $6\sqrt{5}$

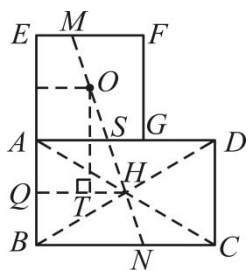
D. 13

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AC ， BD 交于点 H ，过点 O 和点 H 的直线 MN 平分该组合图形的面积，交 AD 于 S ，取 AE 中点 P ，取 AB 中点 Q ，连接 OP ， HQ ，过点 O 作 $OT \perp QH$ 于 T ，由三角形中位线定理可求 $QH = \frac{1}{2}BC = 5$ ， $QH \parallel BC$ ， $AQ = BQ = 3$ ， $PO = \frac{1}{2}AG = 3$ ， $PO \parallel AG$ ， $EP = AP = 3$ ，由平行线分线段成比例可得 $MO = OS = SH = NH$ ，由勾股定理可求 OH 的长，即可求解.

【详解】解：如图，连接 AC ， BD 交于点 H ，过点 O 和点 H 的直线 MN 平分该组合图形的面积，交 AD 于 S ，取 AE 中点 P ，取 AB 中点 Q ，连接 OP ， HQ ，过点 O 作 $OT \perp QH$ 于 T ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AH = HC,$$

∵ Q 是 AB 中点,

$$\therefore QH = \frac{1}{2}BC = 5, \quad QH \parallel BC, \quad AQ = BQ = 3,$$

∵ 四边形 $AEFG$ 是正方形, $AE = AB$,

$$\therefore AG = AE = AB = 6,$$

$$\text{同理可求 } PO = \frac{1}{2}AG = 3, \quad PO \parallel AG, \quad EP = AP = 3,$$

$$\therefore PO \parallel AD \parallel BC \parallel EF \parallel QH, \quad EP = AP = AQ = BQ,$$

$$\therefore MO = OS = SH = NH, \quad \angle OPQ = \angle PQH = 90^\circ,$$

$$\therefore OT \perp QH,$$

∴ 四边形 $POTQ$ 是矩形,

$$\therefore PO = QT = 3, \quad OT = PQ = 6,$$

$$\therefore TH = QH - QT = 2,$$

$$\therefore OH = \sqrt{OT^2 + TH^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore MN = 2OH = 4\sqrt{10},$$

二. 填空题 (本大题共12小题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. 七边形的内角和是_____度.

【答案】 900

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形内角和定理. 应用多边形的内角和公式计算即可.

【详解】 解: 七边形的内角和 $= (n-2) \times 180^\circ = (7-2) \times 180^\circ = 900^\circ$,

故答案为: 900.

8. 在平面直角坐标系中, 已知点 $P(a+2, a-2)$ 在 y 轴上, 那么 $a =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据 y 轴上的点的坐标特点即可求解.

【详解】 根据平面直角坐标系中 y 轴上点的特点, 可知其横坐标为 0 , 因此可得 $a+2=0$, 解得 $a=-2$.

故答案为: -2 .

【点睛】 此题主要考查点的坐标特点, 解题的关键是熟知 y 轴上的点的坐标特点.

9. 点 $A(3,2)$ 与点 $B(3,n)$ 关于 x 轴对称, 则 $n =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

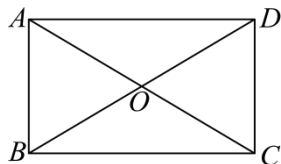
【分析】 本题考查关于 x 轴对称的点的坐标特征, 利用横坐标不变, 纵坐标互为相反数即可求解.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(3,2)$ 与点 $B(3,n)$ 关于 x 轴对称,

$\therefore n$ 是 2 的相反数,

即 $n=-2$.

10. 如图, 矩形 $ABCD$ 的边 $AB=4$, $\angle AOB=60^\circ$, 则 AC 的长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 先判定 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 再根据矩形的性质求解即可.

【详解】 解: 因为矩形 $ABCD$ 的边 $AB=4$,

$$\text{故 } OA=OB=OC=OD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD,$$

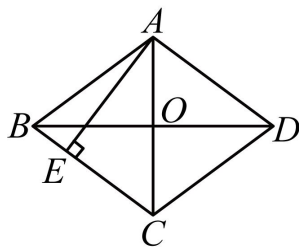
$$\because \angle AOB=60^\circ,$$

故 $\triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\text{故 } OA=AB=4$$

故 AC 的长为 $2OA=8$.

11. 如图所示, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $AE \perp BC$, 垂足为 E . 若 $AC = 6, BD = 8$ 则 AE 的长为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】利用菱形的面积公式: $\frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AE$, 即可解决问题. 本题考查菱形的性质、勾股定理等知识, 解题的关键是学会利用面积法求线段的长, 属于中考常考题型.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = 3, OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$\therefore AB = BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 5AE,$$

$$\therefore AE = \frac{24}{5},$$

故答案为: $\frac{24}{5}$.

12. 恺撒密码应用: 若密文“PM”由恺撒密码(加密密钥为 $k = -2$)加密得到, 则明文为_____.

【答案】 RO

【解析】

【分析】恺撒密码加密规则为: 密文字母对应数字 $y = x + k$, 其中 x 为明文字母对应数字, k 为加密密钥. 由加密密钥为 $k = -2$ 可得 $y = x - 2$, 找出密文对应的数字, 代入 $y = x - 2$ 计算即可.

【详解】解: 设 x 为明文字母, y 为密文字母, 则 $y = x - 2$,

将 26 个英文字母按顺序对应数字 1 到 26, 即 A 对应 1, B 对应 2, ..., Z 对应 26.

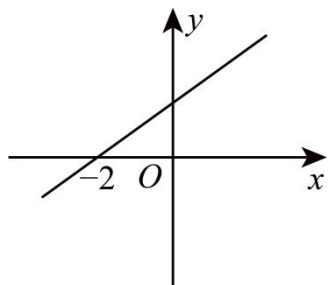
可得密文 P 对应 $y = 16$, 密文 M 对应 $y = 13$,

当 $y=16$ 时, 有 $16=x-2$, 解得: $x=18$, 对应字母为 R .

当 $y=13$ 时, 有 $13=x-2$, 解得: $x=15$, 对应字母为 O .

$\therefore$ 明文为 RO .

13. 如图, 直线 $y=kx+b(k>0)$ 与 x 轴的交点为 $(-2,0)$, 则关于 x 的不等式 $kx+b<0$ 的解集是_____.



【答案】 $x < -2$

【解析】

【分析】 根据一次函数和一元一次不等式的关系, 结合函数图象求不等式的解集.

【详解】 解: 不等式 $kx+b<0$ 表示一次函数图象在 x 轴下方的部分,

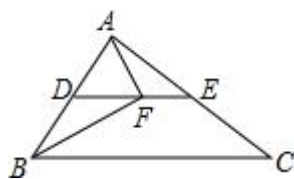
根据图象, 当 $x<-2$, 函数图象在 x 轴下方,

故不等式的解集是 $x<-2$.

故答案是: $x<-2$.

【点睛】 本题考查一次函数与一元一次不等式的关系, 解题的关键是掌握根据函数图象解不等式的方法.

14. 如图所示, DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 点 F 在 DE 上, 且 $\angle AFB=90^\circ$, 若 $AB=6$, $BC=10$, 则 EF 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 由三角形中位线定理可得 DE 的长, 再由直角三角形斜边上中线的性质可得 DF 的长, 则可得 EF 的长.

【详解】 解: $\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 5,$$

$\because \angle AFB=90^\circ$, D 是 AB 的中点,

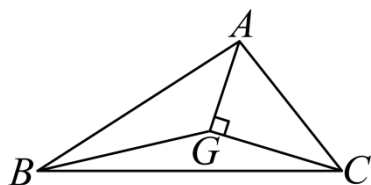
$$\therefore DF = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore EF = DE - DF = 2.$$

故答案为：2.

【点睛】 本题考查了三角形中位线定理与直角三角形斜边上中线的性质，掌握这两个知识点是本题的关键所在.

15. 如图在 $\triangle ABC$ 中， G 是三角形的重心， $AG \perp GC$ ， $AC = 8$ ，则 BG 的长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了三角形重心的性质及其应用问题，延长 BG 交 AC 于点 H ，证明 $GH = \frac{1}{2} AC$ ， $BG = 2GH$ ，即可解决问题.

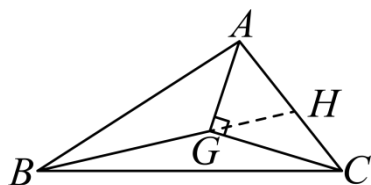
【详解】 解：延长 BG 交 AC 于点 H ，
则 H 是 AC 的中点，

$$\therefore GH = \frac{1}{2} AC = 4,$$

又 $\because G$ 是三角形的重心，

$$\therefore BG = 2GH = 8,$$

故答案为：8.



16. 已知正比例函数 $y = kx$ ，当 $-2 \leq x \leq 2$ 时，函数有最大值 3，则 k 的值为 ____.

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据函数的增减性，再由 x 的取值范围得出 $x = -2$ 时， $y = 3$ 或 $x = 2$ 时， $y = 3$ ，分别代入函数解析式得出 k 的值即可.

【详解】 解：当 $k > 0$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大，

∴ 当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

∴ $2k = 3$, 解得 $k = \frac{3}{2}$;

当 $k < 0$ 时, 函数 y 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x = -2$ 时, $y = 3$,

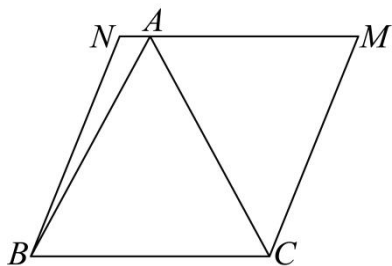
∴ $-2k = 3$, 解得 $k = -\frac{3}{2}$.

∴ k 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查的是一次函数的性质, 熟知一次函数的增减性是解答此题的关键.

17. 对于任意三角形, 如果存在一个菱形, 使得这个菱形的一条边与三角形的一条边重合, 且三角形的这条边所对的顶点在菱形的这条边的对边上, 那么称这个菱形为该三角形的“友好菱形”. 问题: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 S . 如果 $\triangle ABC$ 存在“友好菱形”为菱形 $BCMN$, 那么 S 的取值范围是_____.



【答案】 $9\sqrt{3} \leq S \leq 18$

【解析】

【分析】 由 $\triangle ABC$ 的面积为 S 可得 $\triangle ABC$ 的高为 $\frac{S}{3}$, 然后再分三角形的高取最小值和最大值两种情况求解即可.

【详解】 解: $\because \triangle ABC$ 的面积为 S ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times BC \times h,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 边 } BC \text{ 上的高为 } \frac{S}{3},$$

如图: 当高取最小值时, $\triangle ABC$ 为等边三角形, A 与 M 或 N 或 MN 上重合,

如图: 过 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D ,

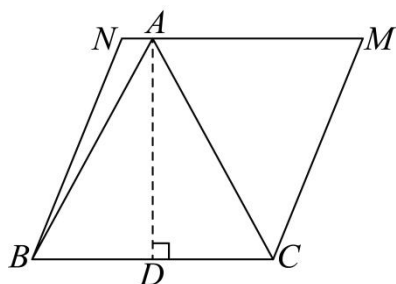
$\because$ 等边三角形 ABC , $BC = 6$,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, BC = 6, \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

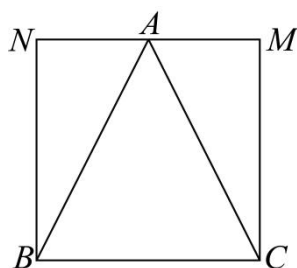
$$\therefore \frac{S}{3} = 3\sqrt{3}, \text{ 即 } S = 9\sqrt{3};$$



如图：当高取最大值时，菱形为正方形，

$\therefore A$ 在 MN 中点，

$$\therefore \frac{S}{3} = 6, \text{ 即 } S = 18$$

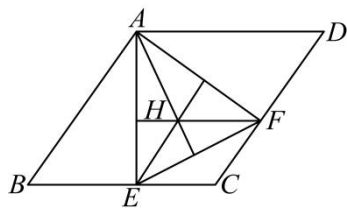


$$\therefore 9\sqrt{3} \leq S \leq 18.$$

故填： $9\sqrt{3} \leq S \leq 18$.

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质、正方形的性质、等边三角形的性质以及勾股定理，考查知识点较多，灵活运用相关知识成为解答本题的关键.

18. 如图， $\square ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于 E ， $AF \perp CD$ 于 F ， H 是 $\triangle AEF$ 三条高的交点， 已知 $AE = a$ ， $EC = b$ ， $EF = c$ ， 则 $AH =$ _____.

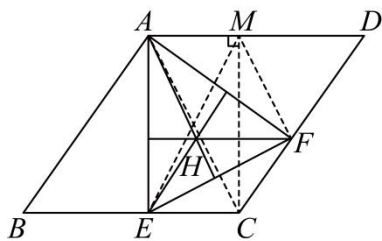


【答案】 $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

【解析】

【分析】连接 AC ，过点 C 作 $CM \perp AD$ 于点 M ，连接 ME ， MF ，构造平行四边形 $ECFH$ 、矩形 $AECM$ 、平行四边形 $AHFM$ ，利用平行四边形的性质推知 $FM \perp EF$ ，最后利用勾股定理求出 FM ，即可得解.

【详解】解：连接 AC ，过点 C 作 $CM \perp AD$ 于点 M ，连接 ME ， MF ，如图所示：



$\because EH \perp AF, CD \perp AF,$

$\therefore EH \parallel CF,$

$\because FH \perp AE, CE \perp AE,$

$\therefore FH \parallel EC,$

$\therefore$ 四边形 $ECFH$ 是平行四边形,

$\therefore FH = EC,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC,$

$\because AE \perp BC, CM \perp AD,$

$\therefore \angle AEC = 90^\circ, AE \parallel CM,$

$\therefore$ 四边形 $AECM$ 是矩形,

$\therefore AM = EC, AC = EM,$

$\therefore AM \parallel FH, AM = FH,$

$\therefore$ 四边形 $AHFM$ 是平行四边形,

$\therefore AH \parallel FM, AH = FM,$

$\because H$ 是 $\triangle AEF$ 三条高的交点,

$\therefore AH \perp EF,$

$\because AH \parallel FM,$

$\therefore FM \perp EF,$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = a, EC = b$, 则由勾股定理可得 $AC^2 = AE^2 + EC^2 = a^2 + b^2,$

$\therefore EM^2 = AC^2 = a^2 + b^2,$

在 $\text{Rt}\triangle EFM$ 中, $EF = c$, 则由勾股定理可得 $FM = \sqrt{EM^2 - EF^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2},$

$$\therefore AH = FM = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

三. 解答题 (本大题共7题, 满分78分)

19. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 是 x 的正比例函数, y_2 是 x 的反比例函数. 且当 $x = 1$ 时, $y = -1$; 当 $x = -2$ 时,

$y = -\frac{5}{2}$. 求 y 关于 x 的函数关系式.

【答案】 $y = 2x - \frac{3}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例和反比例函数的定义, 并且考查了二元一次方程组的解法, 熟练掌握正比例和反比例的定义是解题的关键.

根据正比例和反比例函数的定义设表达式, 再根据给出自变量和函数的对应值求出待定的系数则可.

【详解】 解: 设 $y_1 = kx$, $y_2 = \frac{m}{x}$, 则 $y = kx + \frac{m}{x}$

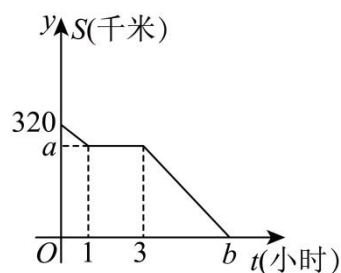
$\because x = 1$ 时, $y = -1$; $x = -2$ 时, $y = -\frac{5}{2}$

$$\therefore \begin{cases} k + m = -1 \\ -2k - \frac{m}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = 2 \\ m = -3 \end{cases}$,

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式是 $y = 2x - \frac{3}{x}$.

20. 王老师驾车从 A 地到 B 景点游玩, 在途中的 M 景点游玩一段时间后, 又驾车按原速度行驶 3 小时到达 B 景点. 王老师离 B 景点的距离 S (千米) 与行驶的时间 t (小时) 之间的函数图象如图所示.



(1) A 地到 B 景点的路程为 _____ 千米, 在 M 景点游玩了 _____ 小时;

(2) 求 a 的值.

【答案】 (1) 320, 2;

(2) a 的值为 240.

【解析】

【分析】(1) 根据函数图象即可求解；

(2) 由题意得，王老师驾车从A地到M景点的速度与从M景点到B景点的速度相同，再结合图象列出方程 $\frac{320-a}{1} = \frac{a}{3}$ ，然后解方程即可.

【小问1详解】

解：由函数图象可知，A地到B景点的路程为320千米，在M景点游玩了 $3-1=2$ (小时)，
故答案为：320，2；

【小问2详解】

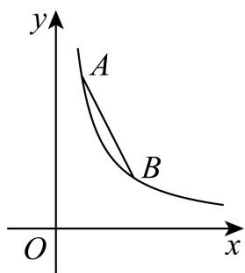
解：由题意得，王老师驾车从A地到M景点的速度与从M景点到B景点的速度相同，

由图象可知， $\frac{320-a}{1} = \frac{a}{3}$ ，

解得： $a=240$ ，

$\therefore a$ 的值为240.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(1,6)$ 、 $B(3,m)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上的两点，连接 AB .



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P ，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{6}{x}$

(2) $(-6, 0)$

【解析】

【分析】本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式，反比例函数图像上点的坐标特征，线段垂直平分线的性质，熟练掌握待定系数法以及线段垂直平分线的性质是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求得即可；

(2) 由反比例函数的解析式求得点 B 的坐标，设 P 点的坐标为 $(x, 0)$ ，根据垂直平分线的性质得出 $PA = PB$ ，

即可得出 $(x-1)^2 + 6^2 = (x-3)^2 + 2^2$ ，解方程即可.

【小问 1 详解】

解：∵ $A(1, 6)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上的点，

$$\therefore k = 1 \times 6 = 6,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{6}{x};$$

【小问 2 详解】

把 $B(3, m)$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得， $m = \frac{6}{3} = 2$,

$$\therefore B(3, 2),$$

设 P 点的坐标为 $(x, 0)$,

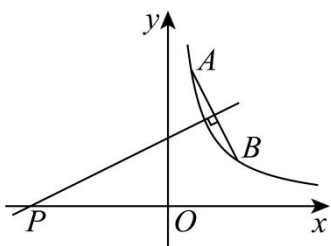
∵ 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P ,

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore (x-1)^2 + 6^2 = (x-3)^2 + 2^2,$$

解得 $x = -6$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-6, 0).$$



22. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 为 AD 的中点。仅用无刻度直尺在给定图形中画图。

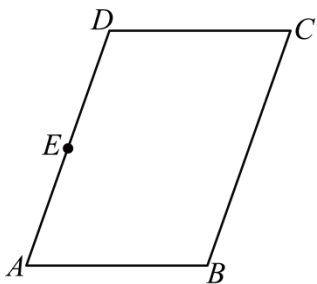


图1

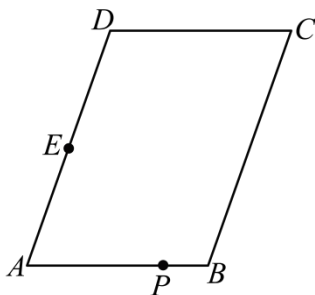


图2

(1) 在图 1 中，画 BC 的中点 M ；

(2) 在图 2 中，点 P 为 AB 边上一点，在 CD 上找点 N ，使得 $CN = BP$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

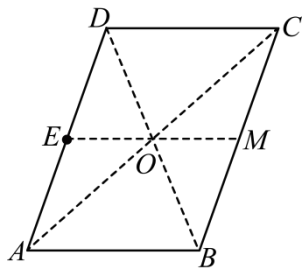
【解析】

【分析】(1) 连接 AC ， BD 交于点 O ，连接 EO ，延长 EO 交 BC 于点 M ，点 M 即为所求；

(2) 连接 AC , BD 交于点 O , 连接 EO , DP 交于点 J , 连接 AJ , 延长 AJ 交 CD 于点 N , 点 N 即为所求.

【小问 1 详解】

解: 如图中, 点 M 即为所求;



理由: 在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 点 O 是 BD , AC 的中点,

$\therefore EO$ 是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore EO \parallel CD, EO \parallel AB$,

$\therefore EM \parallel CD, EM \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $EMCD$ 和四边形 $EMBA$ 是平行四边形,

$\therefore CM = DE, BM = AE$

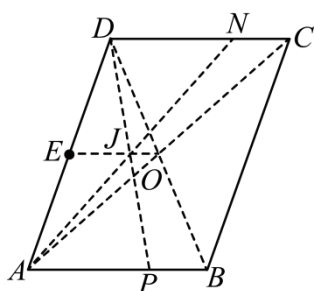
又点 E 为 AD 的中点.

$\therefore DE = AE$,

$\therefore BM = CM$, 即点 M 是 BC 的中点;

【小问 2 详解】

解: 如图, 点 N 即为所求.

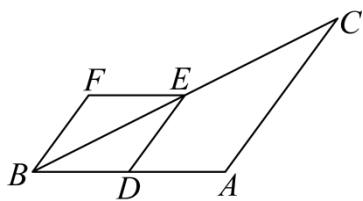


理由: 由 (1) 得 EO 是 $\triangle ABD$ 的中位线, 则 OJ 是 $\triangle DPB$, $\triangle ACN$ 的中位线,

$\therefore OJ = \frac{1}{2}NC, OJ = \frac{1}{2}PB$

$\therefore CN = BP$.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D , E 分别是 AB , BC 的中点, 连接 DE , 过点 B 作 $BF \parallel AC$, 过点 E 作 $EF \parallel AB$.



(1) 求证: 四边形 $BDEF$ 是菱形;

(2) 连接 DF 交 BC 于点 M , 连接 CD , 若 $BE = 4$, $AC = 2\sqrt{5}$, 求 CD 的长.

【答案】 (1) 证明: $\because BF \parallel AC$, $EF \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$\because D$, E 分别是 AB , BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, \quad BD = \frac{1}{2}AB,$$

$\because AB = AC$,

$\therefore DE = BD$,

$\therefore \square BDEF$ 是菱形.

(2) $\sqrt{37}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明四边形 $BDEF$ 是平行四边形, 再根据三角形中位线的性质得到 $DE = BD$, 即可得证;

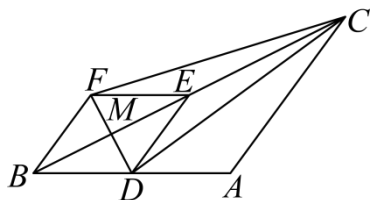
(2) 由菱形的性质得出 $BE \perp DF$, $BM = ME = 2$, 由勾股定理可求出答案.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

解: 如图,



$\because$ 四边形 $BDEF$ 是菱形, $BE = 4$,

$$\therefore BE \perp DF, \quad BM = ME = \frac{1}{2}BE = 2,$$

$\because D$, E 分别是 AB , BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{5},$$

$$\therefore DM = \sqrt{DE^2 - ME^2} = \sqrt{5 - 4} = 1,$$

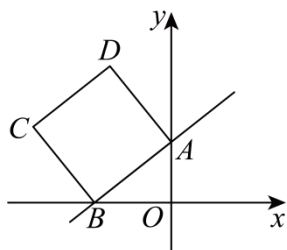
$\therefore$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = CE = 4,$$

$$\therefore MC = ME + EC = 2 + 4 = 6,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDM \text{ 中, } CD = \sqrt{CM^2 + DM^2} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 与 y 轴、 x 轴分别交于 $A(0, 6)$, $B(-8, 0)$ 两点, 以线段 AB 为一边向直线 l 左侧作正方形 $ABCD$.



(1) 求直线 l 的表达式;

(2) 若 M 为 y 轴上的一点, 且 M 的纵坐标小于 10, 当 $\triangle BDM$ 的面积为 48 时, 求点 M 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 P 是直线 l 上的一点, 点 Q 是坐标平面内一点, 当以点 A 、 P 、 M 、 Q 为顶点的四边形是菱形, 直接写出点 Q 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x + 6$

(2) $M(0, 8)$

(3) 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{8}{5}, \frac{46}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{34}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}, 7\right)$ 或 $\left(\frac{48}{25}, \frac{136}{25}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法求解即可;

(2) 过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E , 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BAO$ (AAS) 得到 $DE = AO = 6$, $AE = BO = 8$, 可得 $D(-6, 14)$, 设 $M(0, m)$ ($m < 10$), 运用待定系数法求出直线 BM 解析式为 $y = \frac{m}{8}x + m$, 过点 D 作

$DH \parallel y$ 轴, 交 BM 于点 H , 则 $H\left(-6, \frac{1}{4}m\right)$, $DH = 14 - \frac{1}{4}m$, 根据 $S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}DH \cdot |x_M - x_B|$ 列出方程,

求解即可;

(3) 分三种情况求解：① AQ 是对角线；② AM 是对角线；③ AP 是对角线.

【小问 1 详解】

解：设直线 l 的表达式为 $y = kx + b$,

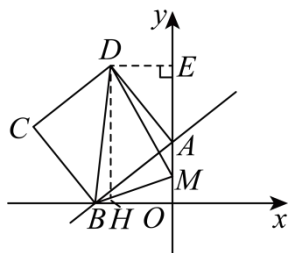
$\therefore$ 直线 l 过点 $A(0, 6)$, $B(-8, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} b = 6 \\ -8k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y = \frac{3}{4}x + 6$.

【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E , 则 $\angle AED = 90^\circ$,



$\therefore A(0, 6)$, $B(-8, 0)$,

$\therefore OA = 6$, $OB = 8$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = DA$, $\angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAE + \angle BAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAE + \angle ADE = 180^\circ - \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAO = \angle ADE$,

$\therefore \angle AOB = \angle DEA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAO (\text{AAS})$,

$\therefore DE = AO = 6$, $AE = BO = 8$,

$\therefore EO = AE + AO = 8 + 6 = 14$,

$\therefore D(-6, 14)$.

$\therefore M$ 为 y 轴上的一点, 且 M 的纵坐标小于 10,

∴ 设 $M(0, m)$ ($m < 10$),

设过点 $B(-8, 0)$, $M(0, m)$ 的直线 BM 解析式为 $y = k'x + b'$,

$$\therefore \begin{cases} -8k' + b' = 0 \\ b' = m \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k' = \frac{m}{8} \\ b' = m \end{cases},$$

∴ 直线 BM 解析式为 $y = \frac{m}{8}x + m$.

过点 D 作 $DH \parallel y$ 轴, 交 BM 于点 H , 则 $H\left(-6, \frac{1}{4}m\right)$,

$$\therefore DH = 14 - \frac{1}{4}m,$$

$$\therefore S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}DH \cdot |x_M - x_B|, \text{ 即 } \frac{1}{2}\left(14 - \frac{1}{4}m\right) \times |0 - (-8)| = 48,$$

解得 $m = 8$,

∴ 点 M 的坐标为 $(0, 8)$.

【小问 3 详解】

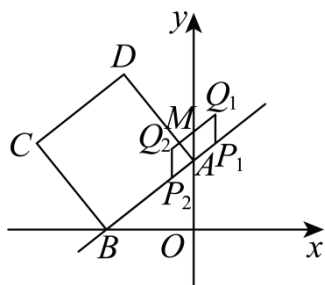
解: ∵ $A(0, 6)$, $M(0, 8)$,

$$\therefore AM = 2,$$

∵ 点 P 在直线 $l: y = \frac{3}{4}x + 6$ 上,

$$\text{设 } P\left(n, \frac{3}{4}n + 6\right),$$

①若 AQ 是对角线, 则 $AP = AM = 2$, 如图



$$\therefore A(0, 6), P\left(n, \frac{3}{4}n + 6\right),$$

$$\therefore AP = \sqrt{n^2 + \left(\frac{3}{4}n + 6 - 6\right)^2} = 2, \text{ 解得 } n = \pm \frac{8}{5},$$

$$\text{当 } n = \frac{8}{5} \text{ 时, } \frac{3}{4}n + 6 = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} + 6 = \frac{36}{5},$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{5}, \frac{36}{5}\right),$$

$\therefore$ 在菱形 $APQM$ 中, $MQ \parallel AP$, $MQ = AP$,

$$\therefore \text{由平移可得 } Q\left(\frac{8}{5}, \frac{46}{5}\right).$$

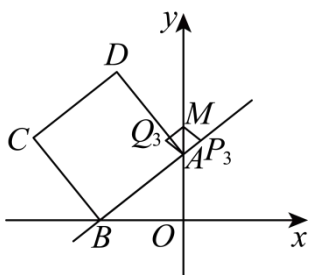
$$\text{当 } n = -\frac{8}{5} \text{ 时, } \frac{3}{4}n + 6 = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{5}\right) + 6 = \frac{24}{5},$$

$$\therefore P\left(-\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right),$$

$\therefore$ 在菱形 $APQM$ 中, $MQ \parallel AP$, $MQ = AP$,

$$\therefore \text{由平移可得 } Q\left(-\frac{8}{5}, \frac{34}{5}\right).$$

②若 AM 是对角线, 则 $AP = PM$, PQ 垂直平分 AM , 如图



$$\therefore A(0, 6), M(0, 8),$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的纵坐标为 } \frac{1}{2}(6 + 8) = 7,$$

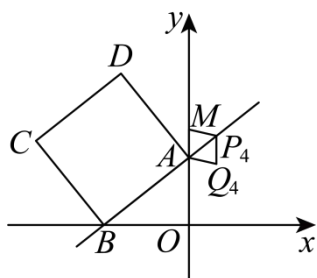
$$\text{把 } y = 7 \text{ 代入直线 } l: y = \frac{3}{4}x + 6, \text{ 得 } \frac{3}{4}x + 6 = 7, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{4}{3}, 7\right),$$

$\therefore$ 菱形 $APMQ$ 关于 y 轴对称,

$$\therefore Q\left(-\frac{4}{3}, 7\right).$$

③若 AP 是对角线，则 $MP = AM = 2$ ，如图



$$\therefore M(0, 8), P\left(n, \frac{3}{4}n + 6\right),$$

$$\therefore MP = \sqrt{n^2 + \left(\frac{3}{4}n + 6 - 8\right)^2} = 2,$$

整理，得 $\frac{25}{16}n^2 - 3n = 0$ ，解得 $n = \frac{48}{25}$ 或 $n = 0$ （不合题意，舍去）

$$\text{当 } n = \frac{48}{25} \text{ 时, } \frac{3}{4}n + 6 = \frac{3}{4} \times \frac{48}{25} + 6 = \frac{186}{25},$$

$$\therefore P\left(\frac{48}{25}, \frac{186}{25}\right),$$

$\therefore$ 在菱形 $AQPM$ 中， $MP \parallel AQ$ ， $MP = AQ$ ，

$$\therefore \text{由平移可得 } Q\left(\frac{48}{25}, \frac{136}{25}\right).$$

综上所述，点 Q 的坐标为 $\left(\frac{8}{5}, \frac{46}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{34}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}, 7\right)$ 或 $\left(\frac{48}{25}, \frac{136}{25}\right)$.

25. 综合与实践

【问题情境】 某数学兴趣小组研究了课本教材中的《折纸与数学》，思索折纸与角的关系，寻求新的折纸方法，其内容如下：

如果我们身旁没有量角器或三角尺，又需要作 60° 、 30° 、 15° 等大小的角，可以采用下面的方法（如图1）：

- (1) 对折矩形纸片 $ABCD$ ，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF ，把纸片展平.
- (2) 再一次折叠纸片，使点 B 落在 EF 上，并使折痕经过点 A ，得到折痕 AM ，点 B 、 E 的对应点分别为 B' 、 E' ，把纸片展平.

(1) **【知识运用】** 请根据上述过程，连接 AB' 、 BB' 、 BE' ，观察图1中 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ，试猜想这三个角的大小关系是：

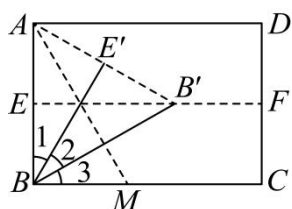


图1

(2) 【拓展提升】兴趣小组成员继续探究五等分线段的方法：如图2，将边长为 $4a$ 正方形纸片 $ABCD$ 对折，得到折痕 MN ，再将 AD 翻折到 MN 的位置，得到折痕 EF ，连接 DE ，将纸片沿 DE 翻折，使点 A 落在点 A' 处，连接 EA' 并延长，交边 BC 于点 G ，求证： G 是线段 BC 的一个五等分点.

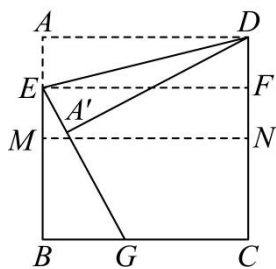


图2

(3) 【延伸探究】如图3，兴趣小组成员又在一个边长为4的正方形 $ABCD$ 的边 AD 上取点 F (F 不与 A , D 重合)，并将四边形 $ABEF$ 沿 EF 翻折，使得点 B 的对应点 B_1 恰好落在边 DC 上，连接 AB_1 ，小组成员探讨发现：线段 EF 与 AB_1 的长度之和，即 $EF + AB_1$ 存在最小值，请求出该最小值及此时线段 BE 的长.

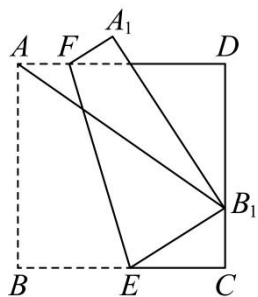


图3

【答案】(1) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

(2) 证明：连接 DG ，

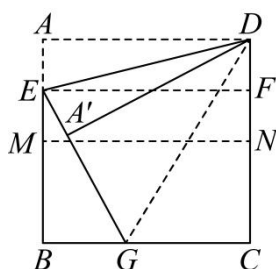


图2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 $4a$ 的正方形，

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AB = BC = CD = AD = 4a,$$

$$\text{由折叠可得 } A'E = AE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}AB = a, \quad A'D = AD = 4a, \quad \angle DA'E = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 4a - a = 3a, \quad A'D = CD, \quad \angle DA'G = 180^\circ - \angle DA'E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'G = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DG = DG,$$

$$\therefore Rt\triangle A'DG \cong Rt\triangle CDG (HL),$$

$$\therefore A'G = CG.$$

$$\text{设 } BG = x, \text{ 则 } A'G = CG = BC - BG = 4a - x,$$

$$\therefore EG = A'E + A'G = a + 4a - x = 5a - x,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BEG \text{ 中, } BE^2 + BG^2 = EG^2,$$

$$\therefore (3a)^2 + x^2 = (5a - x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{8}{5}a,$$

$$\therefore BG = \frac{8}{5}a,$$

$$\therefore BC = 4a,$$

$$\therefore BG = \frac{2}{5}BC,$$

$\therefore G$ 是线段 BC 的一个五等分点.

$$(3) \quad EF + AB_1 \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{5}, \quad BE = \frac{5}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 由折叠的性质可推出 $AB = AB' = BB'$, 可证明 $\triangle ABB'$ 是等边三角形, 得到 $\angle ABB' = 60^\circ$, 由折叠得到 $AE' = B'E'$, 从而根据“三线合一”得到 $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABB' = 30^\circ$, 再由矩形的性质和角的和差关系可得 $\angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ$, 则 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$;

(2) 连接 DG , 由折叠可得 $A'E = AE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}AB = a$, $A'D = AD = 4a$, $\angle DA'E = \angle A = 90^\circ$, 从而 $BE = 3a$, $A'D = CD$, $\angle DA'G = \angle C = 90^\circ$, 即可证明 $Rt\triangle A'DG \cong Rt\triangle CDG (HL)$, 得到 $A'G = CG$, 设 $BG = x$, 则 $A'G = CG = BC - BG = 4a - x$, $EG = A'E + A'G = 5a - x$, 在 $Rt\triangle BEG$ 中根据勾股定理构造方程, 求解得到 $BG = \frac{8}{5}a = \frac{2}{5}BC$, 即可得证;

(3) 连接 BB_1 , 交 EF 于点 K , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H , 证明 $\triangle BCB_1 \cong \triangle FHE (ASA)$ 得到 $BB_1 = FE$, 则 $BB_1 + AB_1$ 的最小值, 就是 $EF + AB_1$ 的最小值. 延长 BC 至点 B_2 , 使 $CB_2 = CB = 4$, 连接 B_1B_2 , AB_2 . 根

据 CD 是 BB_2 的垂直平分线, 得到 $BB_1 = B_2B_1$, 根据勾股定理求出 $AB_2 = \sqrt{AB^2 + BB_2^2} = 4\sqrt{5}$, 从而

$BB_1 + AB_1 = B_1B_2 + AB_1 \geq AB_2 = 4\sqrt{5}$, 得到 $BB_1 + AB_1$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$, 即 $EF + AB_1$ 的最小值为

$4\sqrt{5}$. 当 $BB_1 + AB_1$ 取得最小值时, 点 A , B_1 , B_2 三点共线, 证明 $\triangle ADB_1 \cong \triangle B_2CB_1$ (AAS), 得到

$DB_1 = CB_1 = \frac{1}{2}CD = 2$, 设 $BE = y$, 则 $CE = BC - BE = 4 - y$, $B_1E = BE = y$, 在 $\text{Rt}\triangle B_1EC$ 中根据勾股定理构造方程, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由折叠可得 EF 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AB' = BB',$$

又由折叠有 $AB = AB'$,

$$\therefore AB = AB' = BB',$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABB' = 60^\circ,$$

又由折叠有 $AE = BE$, $AE' = AE$, $B'E' = BE$,

$$\therefore AE' = B'E',$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle ABC - \angle ABB' = 30^\circ,$$

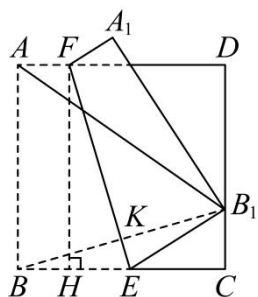
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3;$$

【小问 2 详解】

略

【小问 3 详解】

解: 连接 BB_1 , 交 EF 于点 K , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H .



∵ 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 4, \quad \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ,$$
$$\therefore FH \perp BC,$$
$$\therefore \angle FHB = \angle FHE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHF$ 是矩形,

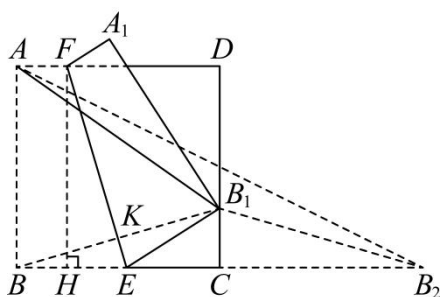
$$\therefore FH = AB = BC,$$

由折叠可得点 B 与 B_1 关于 EF 对称,

$$\therefore EF \perp BB_1,$$
$$\therefore \angle BKE = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle KBE + \angle KEB = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle EFH + \angle FEH = 180^\circ - \angle FHE = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle B_1BC = \angle EFH,$$
$$\therefore \angle BCB_1 = \angle FHE = 90^\circ,$$
$$\therefore \triangle BCB_1 \cong \triangle FHE \text{ (ASA)},$$
$$\therefore BB_1 = FE,$$
$$\therefore EF + AB_1 = BB_1 + AB_1,$$

$\therefore BB_1 + AB_1$ 的最小值, 就是 $EF + AB_1$ 的最小值.

延长 BC 至点 B_2 , 使 $CB_2 = CB = 4$, 连接 B_1B_2 , AB_2 .


$$\therefore B_2C = BC, \quad DC \perp BB_2,$$

$\therefore CD$ 是 BB_2 的垂直平分线,

$$\therefore BB_1 = B_2B_1.$$

