

上海复旦五浦汇实验学校 2021 学年度第二学期

八年级数学期中测试试卷

(答题时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (本大题共 10 题, 每题 2 分, 满分 20 分)

1. 在实数范围内, 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的实数根的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】先移项得出 $x^4=16$, 再根据四次方根的定义求出方程的解即可.

【详解】解: $x^4-16=0$,

$$x^4=16,$$

$$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2,$$

即方程 $x^4-16=0$ 的实数根的个数是 2,

故选: B.

【点睛】本题考查了解高次方程, 能求出 $x=\pm\sqrt[4]{16}$ 是解此题的关键.

2. 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = 0$ B. $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ C. $2x^2+x+1=0$ D. $\sqrt{-2x+3} = -x$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的性质可以判断 A; 根据解分式方程的方法和分式方程有意义的条件可以判断 B; 根据解一元二次方程的方法可以判定 C; 根据二次根式的性质可以判断 D.

【详解】解: A、 $\because x-5 \geq 0$, $\therefore x \geq 5$,

当 $x \geq 5$ 时, $\sqrt{x+3} > 0$,

$\therefore \sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = 0$ 没有实数根, 故该选项不符合题意;

B、去分母得, $x=2$,

检验当 $x=2$ 时, $x-2=0$,

$\therefore$ 原方程无解,

$\therefore$ 方程 $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ 没有实数根, 故该选项不符合题意;

C、 $2x^2+x+1=0$, $a=2$, $b=1$, $c=1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 2\times 1=-7<0$,

$\therefore$ 方程 $2x^2+x+1=0$ 没有实数根, 故该选项不符合题意;

D、原方程两边同时平方得 $-2x+3=x^2$,

整理得: $x^2+2x-3=0$,

解得: $x_1=-3$, $x_2=1$,

检验: $x=-3$ 是原方程的解, $x=1$ 不是原方程的解,

$\therefore$ 方程 $\sqrt{-2x+3}=-x$ 有实数根, 故该选项符合题意.

故选: D.

【点睛】 本题主要考查解方程, 关键是要牢记各种方程的求解方法及根的判别式, 一元二次方程有实数根的条件是 $\Delta \geq 0$, 分式方程的分母不能为 0, 二次根式具有双重非负性.

3. 一多边形的每一个内角都等于它相邻外角的 4 倍, 则该多边形的边数是 ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

【答案】 C

【解析】

【分析】 设外角为 x , 则相邻的内角为 $4x$, 再根据内角与它相邻的外角互补列出方程求出 x , 然后再根据多边形的外角和为 360° 即可解答.

【详解】 解: 设外角为 x , 则相邻的内角为 $4x$,

由题意得, $4x+x=180^\circ$, 解得 $x=36^\circ$,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$\therefore 360^\circ \div 36^\circ = 10$,

$\therefore$ 这个多边形的边数为 10.

故选 C.

【点睛】 本题考查了多边形内角和相邻外角的关系、多边形的外角和等知识点, 掌握多边形的外角和为 360° 是解答本题的关键.

4. 已知下列关于 x 、 y 的方程, 说法正确的是 ()

A. $2x^5+b=0$ 是二项方程

B. $\frac{x+1}{2}-3=\frac{2x}{p}$ 是分式方程

C. $2\sqrt{3}x+5=x$ 是无理方程

D. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 是二元二次方程组

【答案】 D

【解析】

【分析】 方程 $2x^5+b=0$ 的左边是二次多项式，即可判断选项 A；根据分式方程的定义即可判断选项 B；根据无理方程的定义即可判断选项 C；根据二元二次方程组的定义即可判断选项 D.

【详解】 A.方程 $2x^5+b=0$ 的左边的常数项不一定不等于 0，不能说是二项方程，故本选项不符合题意；
B.方程的分母中不含未知数，不是分式方程，故本选项不符合题意；
C.方程中根号内不含未知数，不是无理方程，故本选项不符合题意；
D.是二元二次方程组，故本选项符合题意；

故选： D.

【点睛】 本题考查了高次方程组的定义，分式方程的定义，无理方程的定义等知识点，①分母中含有未知数的方程，叫分式方程，②根号内含有未知数的方程，叫无理方程.

5. 等腰梯形的两底之差等于腰长，则腰与下底的夹角为 ()

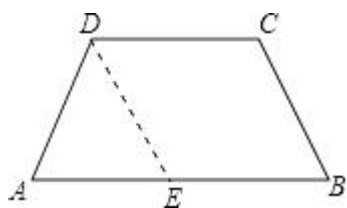
- A. 120° B. 60° C. 45° D. 135°

【答案】 B

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E，则易得四边形 BCDE 是平行四边形，由平行四边形的性质及已知条件，可得 $\triangle ADE$ 是等边三角形，从而问题解决.

【详解】 如图，过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E.



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 BCDE 是平行四边形,

$\therefore DE = CB$, $CD = BE$,

$\because AD = BC$,

$\therefore DE = AD$,

又 $\because AD = AB - CD$, $AE = AB - BE$,

$\therefore AD = AE$,

$$\therefore AD=AE=DE,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A=60^\circ,$$

$\therefore$ 腰与下底的夹角为 60° .

故选: B.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质, 等边三角形的判定与性质, 等腰梯形的性质, 辅助线的作法, 梯形中常作的辅助线: 作底边上的高, 作腰的平行线等.

6. 今日, 上海疫情防控形势严峻, 某工厂计划生产 1000 套防护服, 由于工人加班加点, 实际每天比计划多制作 20%, 结果比原计划提前 2 天完成任务. 设原计划每天制作 x 套防护服, 则可列方程为 ()

A. $\frac{1000}{x} - \frac{1000(1+20\%)}{x} = 2$

B. $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{(1+20\%)x} = 2$

C. $\frac{1000(1+20\%)}{x} - \frac{1000}{x} = 2$

D. $\frac{1000}{(1+20\%)x} - \frac{1000}{x} = 2$

【答案】B

【解析】

【分析】设原计划每天制作 x 套防护服, 则实际每天制作为 $(1+20\%)x$, 根据结果比原计划提前 2 天完成任务, 列出方程即可.

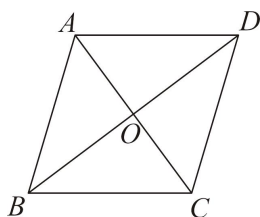
【详解】解: 设原计划每天制作 x 套防护服,

可列方程为: $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{(1+20\%)x} = 2$,

故选: B.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列出方程.

7. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AC+BD=14$, 则菱形 $ABCD$ 的面积为 ()



A. 12

B. 20

C. 24

D. 48

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可设 $BO=x$, $AO=7-x$, 在 $Rt\triangle AOB$ 由勾股定理可列方程 $x^2 + (7-x)^2 = 5^2$ 求出 x 的值, 即可得出 AC 和 BD 的长, 最后根据菱形的面积计算公式求解即可.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$$\therefore AC \perp BD, AO = \frac{1}{2}AC, BO = \frac{1}{2}BD$$

$$\therefore AC + BD = 14$$

$$\therefore AO + BO = 7$$

设 $BO=x$, 则 $AO=7-x$,

在 $Rt\triangle AOB$ 中, $AB=5$

$$\therefore AO^2 + BO^2 = AB^2$$

$$\therefore x^2 + (7-x)^2 = 5^2$$

解得, $x_1=3, x_2=4$

$$\therefore BO=3, AO=4 \text{ 或 } BO=4, AO=3$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \times BD = AO \times BO = 3 \times 4 = 12$$

故选 C

【点睛】 本题考查了菱形的性质, 勾股定理, 熟练掌握菱形的面积公式是本题的关键.

8. 下列命题中, 错误的是 ()

- A. 有两个角相等的梯形是等腰梯形
- B. 顺次联结矩形各边中点所成四边形是菱形
- C. 对角线相等的平行四边形是矩形
- D. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用等腰梯形的判定方法、菱形及矩形的判定方法分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解: A、有两个角相等的梯形可能是等腰梯形, 也可能是直角梯形, 故错误, 符合题意;

B、顺次联结矩形各边中点所成四边形是菱形, 正确, 不符合题意;

C、对角线相等的平行四边形是矩形, 正确, 不符合题意;

D、对角线互相平分且相等的四边形是矩形, 正确, 不符合题意.

故选: A.

【点睛】 考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解等腰梯形的判定方法、菱形及矩形的判定方法, 难度不大.

9. 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 那么下列条件中能判定这个四边形是

矩形的是 ()

A. $AD = BC$, $AC = BD$

B. $AC = BD$, $\angle BAD = \angle BCD$

C. $AO = CO$, $AB = BC$

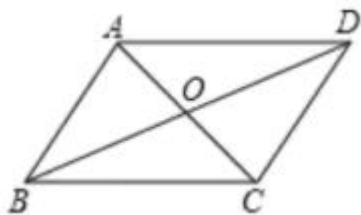
D. $AO = OB$, $AC = BD$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据矩形的判定方法，一一判断即可解决问题.

【详解】 解： A、 $AB \parallel DC$, $AD = BC$, 无法得出四边形 ABCD 是平行四边形，故无法判断四边形 ABCD 是矩形. 故错误；



B、 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = \angle ADC + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$

$\therefore$ 得出四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\because AC = BD,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是矩形. 故正确；

C、 $\because AO = CO$, $AB = BC$,

$$\therefore BD \perp AC, \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB,$$

$$\therefore BC = CD,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形，无法判断四边形 ABCD 是矩形. 故错误；

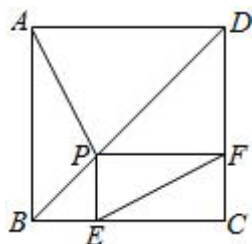
D、 $AO = OB$, $AC = BD$ 无法判断四边形 ABCD 是矩形，故错误；

故选： B.

【点睛】 本题考查矩形的判定方法、熟练掌握矩形的判定方法是解决问题的关键，记住对角线相等的平行四边形是矩形，有一个角是 90 度的平行四边形是矩形，有三个角是 90 度的四边形是矩形，属于中考常考

题型.

10. 如图, 点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点, $PE \perp BC$ 于点 E , $PF \perp CD$ 于点 F , 连接 EF , 给出下列 5 个结论: ① $AP = EF$, ② $AP \perp EF$, ③ $\triangle APD$ 一定是等腰三角形, ④ $\angle PFE = \angle BAP$ ⑤ $PD = 2EC$, 其中正确的结论个数是 ()



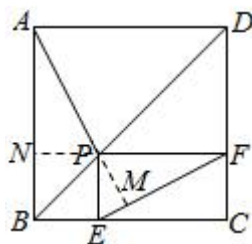
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】可以证明 $\triangle ANP \cong \triangle FPE$, 即可证得①④是正确的, 根据三角形的内角和定理即可判断②正确; 根据 P 的任意性可以判断③⑤的正确性.

【详解】解: 延长 FP 交 AB 于点 N , 延长 AP 交 EF 于点 M .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

$\therefore \angle ABP = \angle CBD$,

又 $\because NP \perp AB$, $PE \perp BC$,

$\therefore \angle PNB = \angle NBE = \angle PEB = 90^\circ$, $PN = PE$,

$\therefore$ 四边形 $BNPE$ 是正方形, $\angle ANP = \angle EPF$,

$\therefore NP = EP$,

$\therefore AN = PF$,

在 $\triangle ANP$ 与 $\triangle FPE$ 中,

$$\begin{cases} NP = EP \\ \angle ANP = \angle EPF, \\ AN = PF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ANP \cong \triangle FPE$ (SAS),

$\therefore AP = EF$, $\angle PFE = \angle BAP$ (故①④正确);

$\triangle APN$ 与 $\triangle FPM$ 中, $\angle APN = \angle FPM$, $\angle NAP = \angle PFM$,

$\therefore \angle PMF = \angle ANP = 90^\circ$,

$\therefore AP \perp EF$, (故②正确);

P 是 BD 上任意一点, 因而 $\triangle APD$ 是等腰三角形和 $PD = 2EC$ 不一定成立, (故③⑤错误);

故正确的是: ①②④.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了正方形的性质, 正确证明 $\triangle ANP \cong \triangle FPE$, 以及理解 P 的任意性是解决本题的关键.

二、填空题: (本大题共 10 题, 每题 3 分, 满分 30 分)

11. 正十边形的对角线条数为_____.

【答案】 35

【解析】

【分析】根据十边形有 10 个顶点, 从每个顶点出发有 7 条对角线, 求解即可.

【详解】解: 十边形有 10 个顶点, 先选一个, 再从和它不相邻的 7 个顶点中再选一个, 即可构成一条对角线, 考虑重复问题, 则十边形的对角线的条数为 $\frac{7 \times 10}{2} = 35$,

故答案为: 35.

【点睛】本题考查多边形的对角线, 注意其中对角线的重复问题是解题的关键.

12. 方程 $(x+3) \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】由 $(x+3) \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 可以得出 $x+3=0$ 或 $x-2=0$ 且 $x-2 \geq 0$, 由此求得原方程的解即可.

【详解】 $\because (x+3) \cdot \sqrt{x-2} = 0$,

$\therefore x+3=0$ 或 $x-2=0$ 且 $x-2 \geq 0$,

解得: $x = -3$ 或 $x = 2$ 且 $x \geq 2$,

$x = -3$, 不合题意, 舍去,

$\therefore x = 2$.

故答案为: $x = 2$.

【点睛】本题考查了解无理方程, 注意被开方数必须大于或等于 0, 求此类方程的解必须满足这一条件.

13. 用换元法解方程 $\frac{x^2+2}{x+1} + \frac{5x+5}{x^2+2} = 6$ 时, 如果设 $\frac{x^2+2}{x+1} = y$, 那么原方程可以化为关于 y 的整式方程

_____.

【答案】 $y^2 - 6y + 5 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\frac{x^2+2}{x+1} = y$ ，由原方程可得 $y + \frac{5}{y} = 6$ ，再化为整式方程即可.

【详解】 解： $\because \frac{x^2+2}{x+1} + \frac{5x+5}{x^2+2} = 6$,

$$\therefore \frac{x^2+2}{x+1} + \frac{5(x+1)}{x^2+2} = 6,$$

$$\text{设 } \frac{x^2+2}{x+1} = y, \text{ 则 } \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{y},$$

$$\therefore \text{原方程可化为 } y + \frac{5}{y} = 6,$$

$$\therefore y^2 - 6y + 5 = 0.$$

故答案为： $y^2 - 6y + 5 = 0$.

【点睛】 本题考查了用换元法解方程，在解分式方程和无理方程时，最常用的方法是换元法，通过观察确定用来换元的式子是解决本题的关键.

14. 如果方程 $2 + \sqrt{4x+3} = k$ 无实数解，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 2$

【解析】

【分析】 先移项，再根据算术平方根的性质得到答案.

【详解】 $2 + \sqrt{4x+3} = k$,

$$\sqrt{4x+3} = k - 2,$$

$\because \sqrt{4x+3}$ 的结果是非负数,

$\therefore$ 当 $k-2 < 0$, 方程 $2 + \sqrt{4x+3} = k$ 无实数解,

即 $k < 2$,

故答案为： $k < 2$.

【点睛】 此题考查方程无解的情况，算术平方根的性质.

15. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m+3}{2x-1}=1$ 的解不大于 2, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq 0$, 且 $m \neq -3$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 表示出整式方程的解, 根据解不大于 2 且最简公分母不为 0, 求出 m 的范围即可.

【详解】解: $\frac{m+3}{2x-1}=1$

去分母得: $m+3=2x-1$,

解得: $x=\frac{m+4}{2}$, 且 $2x-1 \neq 0$, 即 $x \neq \frac{1}{2}$,

根据题意得: $\frac{m+4}{2} \leq 2$, 且 $x \neq \frac{1}{2}$

解得: $m \leq 0$, 且 $m \neq -3$,

故答案为: $m \leq 0$, 且 $m \neq -3$.

【点睛】此题考查了分式方程的解, 需注意在任何时候都要考虑分母不为 0.

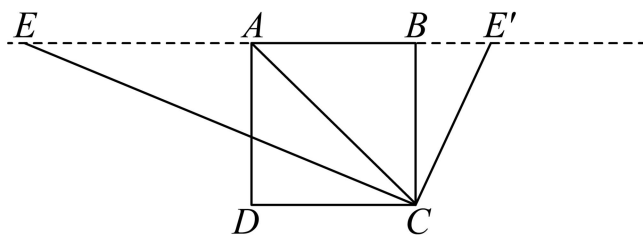
16. 四边形 $ABCD$ 是正方形, 在直线 AB 上取一点 E , 使得 $AE=AC$, 则 $\angle CEB$ 的度数是 _____度.

【答案】 22.5 或 67.5

【解析】

【分析】分两种情况画图, 根据正方形的性质和等腰三角形的性质即可解决问题.

【详解】解: 如图, 分两种情况画图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle CAB=45^\circ$,

① $\because AE=AC$,

$\therefore \angle CEB=\angle ACE=\frac{1}{2} \times 45^\circ=22.5^\circ$;

② $\because AE'=AC$,

$\therefore \angle CE'B=\angle ACE=\frac{1}{2} (180^\circ-45^\circ)=67.5^\circ$.

则 $\angle CEB$ 的度数是 22.5 或 67.5 度.

故答案为: 22.5 或 67.5.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，等腰三角形的性质，解决本题的关键是掌握正方形的性质.

17. 一个多边形截去一个角后，形成的新多边形的内角和是 2880° ，则原多边形的边数是__.

【答案】 17, 18 或 19

【解析】

【分析】 根据多边形的内角和公式可得： $(n-2) \cdot 180^\circ = 2880^\circ$ ，求出新多边形的边数，然后再根据截去一个角的情况进行讨论，计算即可.

【详解】 解： 设新多边形的边数为 n ，

则 $(n-2) \cdot 180^\circ = 2880^\circ$ ，

解得： $n = 18$ ，

若截去一个角后边数增加 1，则原多边形边数为 19，

若截去一个角后边数减少 1，则原多边形边数为 17，

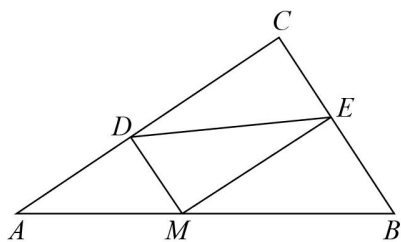
若截去一个角后边数不变，则原多边形边数为 18，

则多边形的边数是 17, 18 或 19，

故答案为： 17, 18 或 19.

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 是整数)，注意要分情况进行讨论，避免漏解.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC=6$ ， $AC=8$ ， M 为斜边 AB 上一动点，过点 M 分别作 $MD \perp AC$ 于点 D ，作 $ME \perp CB$ 于点 E ，则线段 DE 的最小值为__.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 由勾股定理求出 AB 的长，再证明四边形 $DMEC$ 是矩形，可得 $DE=CM$ ，再根据垂线段最短和三角形面积即可解决问题.

【详解】 解： $\because \angle C=90^\circ$ ，且 $BC=6$ ， $AC=8$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ，

$\because DM \perp AC, EM \perp BC,$

$\therefore \angle MDC = \angle MEC = \angle C = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $DMEC$ 是矩形,

$\therefore CM = DE,$

$\therefore$ 当 $CM \perp AB$ 时, CM 的值最小,

此时, $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} AB \times CM,$

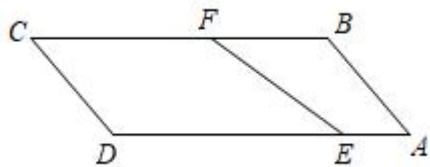
$$\therefore CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5},$$

$\therefore DE$ 的最小值为 $\frac{24}{5},$

故答案为: $\frac{24}{5}.$

【点睛】 本题考查了矩形的判定和性质、勾股定理、三角形面积、垂线段最短等知识, 解题的关键是根据矩形的性质判定出 CM 的最小值.

19. 如图, 在 $\square ABCD$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm, $BC = 16$ cm, $\angle A = 45^\circ$ 、点 E 从点 D 出发沿 DA 边运动到点 A , 点 F 从点 B 出发沿 BC 边向点 C 运动, 点 E 运动速度为 2 cm/s, 点 F 运动速度为 1 cm/s, 它们同时出发, 同时这运动, 经过__s 时, $EF = AB$.

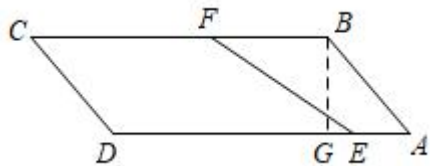


【答案】 4 或 $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】 分两种情况: ① 四边形 $ABFE$ 是平行四边形; ② 四边形 $ABFE$ 是等腰梯形; 根据长度之间的等量关系列出方程求解即可.

【详解】 解: 如图, 过点 B 作 $BG \perp AD$ 于 G ,



$\because AB = 2\sqrt{2}$ cm, $\angle A = 45^\circ$, $BG \perp AD$,

$$\therefore BG = AG = 2 \text{ (cm)},$$

设经过 ts 时, $EF = AB$,

当四边形 $ABFE$ 是平行四边形时,

$$\therefore BF = AE,$$

$$\therefore t = 16 - 2t,$$

$$\therefore t = \frac{16}{3},$$

当四边形 $ABFE$ 是等腰梯形,

$$\therefore t + 2 \times 2 = 16 - 2t,$$

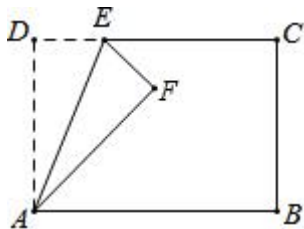
$$\therefore t = 4,$$

综上所述: 经过 4 或 $\frac{16}{3}s$ 时, $EF = AB$,

故答案为 4 或 $\frac{16}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的性质以及等腰梯形两腰相等的性质, 解决本题的关键是要熟练掌握平行四边形的性质.

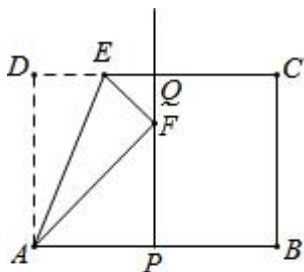
20. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=5$, $AB=8$, 点 E 为射线 DC 上一个动点, 把 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 折叠, 当点 D 的对应点 F 刚好落在线段 AB 的垂直平分线上时, 则 DE 的长为_____.



【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 10

【解析】

【详解】 如图①, 当点 E 在 DC 上时, 点 D 的对应点 F 刚好落在线段 AB 的垂直平分线 QP 上,



图①

$$\because AF=AD=5, AP=4,$$

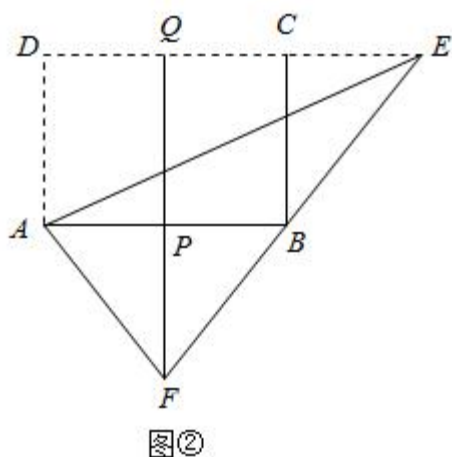
$$\therefore FP=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

$$\therefore FQ=2,$$

设 $FE=x$, 则 $DE=x$, $QE=4-x$,

在 $Rt\triangle EQF$ 中, $(4-x)^2+2^2=x^2$, 所以 $x=\frac{5}{2}$.

如图②, 当, 所以 $FQ=$ 点 E 在 DG 的延长线上时, 点 D 的对应点 F 刚好落在线段 AB 的垂直平分线 QP 上, 易求 $FP=3$,



所以 $FQ=8$, 设 $DE=x$, 则 $FE=x$, $QE=x-4$, 在 $Rt\triangle EQF$ 中, $(x-4)^2+8^2=x^2$, 所以 $x=10$,

综上所述, $DE=\frac{5}{2}$ 或 10 .

三、解答题: (本大题共 6 题, 为 6+6+10+10+12, 满分 50 分)

21. 解方程: $\sqrt{x-1}=x-7$.

【答案】 $x=10$

【解析】

【分析】 把方程两边平方去根号后求解.

【详解】 解: 两边平方, 得 $x-1=(x-7)^2$,

整理, 得 $x^2-15x+50=0$,

解得 $x_1=5$, $x_2=10$,

经检验: $x_1=5$ 是增根, $x_2=10$ 是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x=10$.

【点睛】 本题主要考查解无理方程, 解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法,

注意最后要把求得的 x 的值进行检验.

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 1 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -\frac{2}{5} \\ y_3 = \frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】将原方程组转化为四个二元一次方程组, 然后解方程组即可.

【详解】解:
$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 1 \text{ ①} \\ x^2 - 4y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

由①, 得 $(x-3y)^2 = 1$,

$\therefore x-3y=1$ ③或 $x-3y=-1$ ④,

由②, 得 $(x+2y)(x-2y)=0$,

$\therefore x+2y=0$ ⑤或 $x-2y=0$ ⑥,

由③⑤, ③⑥, ④⑤, ④⑥组成方程组,

得
$$\begin{cases} x-3y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=-1 \\ x-2y=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -\frac{2}{5} \\ y_3 = \frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

所以原方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -\frac{2}{5} \\ y_3 = \frac{1}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了二元二次方程组的解法. 把原二元二次方程组降幂, 转化为二元一次方程组是解题的关键.

23. 甲乙两人分别从相距 27 公里的 A 、 B 两地同时出发, 相向而行, 3 小时相遇, 相遇后两人用原来的速度继续前进, 甲到达 B 地比乙到达 A 地快 1 小时 21 分钟, 则甲乙两人的速度分别是多少?

【答案】甲的速度是 5 公里/小时, 则乙的速度为 4 公里/小时.

【解析】

【分析】设甲的速度是 x 公里/小时，则乙的速度为 $(\frac{27}{3}-x)$ 公里/小时，根据到达 B 地比乙到达 A 地快 1

小时 21 分钟可得 $\frac{27}{x} = \frac{27}{\frac{27}{3}-x} - \frac{81}{60}$ ，解出方程检验即可得答案.

【详解】解：设甲的速度是 x 公里/小时，则乙的速度为 $(\frac{27}{3}-x)$ 公里/小时，

根据题意得： $\frac{27}{x} = \frac{27}{\frac{27}{3}-x} - \frac{81}{60}$ ，

去分母化为整式方程得： $x^2+31x-180=0$ ，

解得 $x=5$ 或 $x=-36$ ，

经检验， $x=5$ 和 $x=-36$ 都是原方程的解，但 $x=-36$ 不符合题意，舍去，

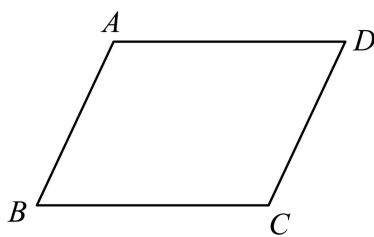
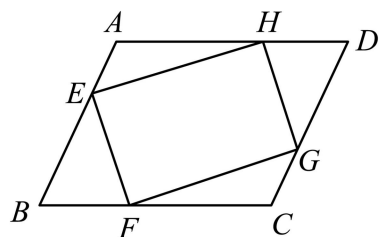
$\therefore x=5$ ，

$\therefore \frac{27}{3}-x=9-5=4$ ，

答：甲的速度是 5 公里/小时，则乙的速度为 4 公里/小时.

【点睛】本题考查分式方程的应用，解题的关键是读懂题意，找到等量关系列方程.

24. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上， $BE=DG$ ， $BF=DH$.



备用图

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 当 $AB=BC$ ，且 $BE=BF$ 时，求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据全等证得 $EF=HG$ ， $EH=FG$ ，对边相等，即可证得四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 证得四边形 $EFGH$ 中一个角为直角，即可证得四边形 $EFGH$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$ ， $AD=BC$ ， $\angle B=\angle D$ ， $\angle A=\angle C$ ，

$\because BE=DG$ ， $BF=DH$ ，且 $\angle B=\angle D$ ，

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DGH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = HG,$$

同理可得 $EH = FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

$$\because AB = BC, BE = BF$$

$$\therefore AB = BC = CD = AD, BE = BF = DH = DG,$$

$$\therefore AE = AH,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ,$$

$$\because BE = BF, AE = AH,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE = \frac{180^\circ - \angle B}{2}, \angle AEH = \angle AHE = \frac{180^\circ - \angle A}{2},$$

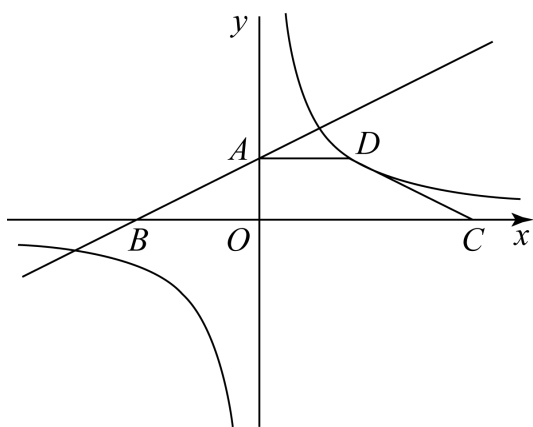
$$\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了矩形的判定，平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，灵活运用这些性质进行推理证明是本题的关键.

25. 已知：如图，平面直角坐标系中有一个等腰梯形 $ABCD$ ，且 $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，点 A 在 y 轴正半轴上，点 B 、 C 在 x 轴上（点 B 在点 C 的左侧），点 D 在第一象限， $AD = 3$ ， $BC = 11$ ，梯形的高为 2. 双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 经过点 D ，直线 $y = kx + b$ 经过 A 、 B 两点.



(1) 求点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标;

(2) 求双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 和直线 $y = kx + b$ 的解析式;

(3) 点 M 在双曲线上, 点 N 在 y 轴上, 以 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形, 求出点 N 的坐标.

【答案】(1) $A(0, 2)$, $B(-4, 0)$, $C(7, 0)$, $D(3, 2)$;

(2) $y = \frac{6}{x}$, $y = \frac{1}{2}x + 2$;

(3) 点 N 的坐标为 $(0, \frac{1}{2})$ 或 $(0, \frac{7}{2})$ 或 $(0, -\frac{1}{2})$.

【解析】

【分析】(1) 首先过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H , 易得四边形 $AOHD$ 是矩形, 证得 $Rt\triangle ABO \cong Rt\triangle DCH$, 又由 $AD = 3$, $BC = 11$, 梯形的高为 2, 即可求得答案;

(2) 由双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 过点 D , 直线 $y = kx + b$ 过点 A , B , 直接利用待定系数法求解即可求得答案;

(3) 分情况讨论: ①如图 2, 当四边形 $ABMN$ 是平行四边形时, 由四边形 $ABMN$ 是平行四边形, 可得点 M 的横坐标为 -4, 继而求得点 M 的坐标, 又由 $AN = BM$, 求得点 N 坐标; ②如图 3, 当四边形 $NBMA$ 是平行四边形时, 根据①可知 $AN = BM = \frac{3}{2}$, 可得点 N 坐标; ③如图 4, 当四边形 $MABN$ 是平行四边形时, 可得点 M 的横坐标为 4, 代入反比例函数解析式求得点 M 的坐标, 继而可得点 N 坐标.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H ,

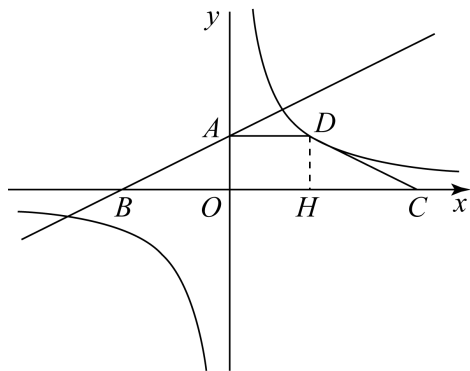


图1

$\therefore AD \parallel BC$, $AB = CD$, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$\therefore AO \perp AD$, $AD \perp DH$,

$\therefore$ 四边形 $AOHD$ 是矩形,

$\therefore AO = DH$, $AD = OH$, $\angle AOB = \angle DHC = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABO$ 和 $Rt\triangle DCH$ 中, $\begin{cases} AO = DH \\ AB = DC \end{cases}$,

$\therefore Rt\triangle ABO \cong Rt\triangle DCH$ (HL),

$$\therefore BO = CH,$$

$\therefore$ 梯形的高为 2,

$$\therefore AO = DH = 2,$$

$$\therefore AD = 3, \quad BC = 11,$$

$$\therefore BO = CH = 4, \quad OC = 7,$$

$$\therefore A(0, 2), \quad B(-4, 0), \quad C(7, 0), \quad D(3, 2);$$

【小问 2 详解】

$\therefore$ 双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 经过点 $D(3, 2)$,

$$\therefore m = xy = 6,$$

$\therefore$ 双曲线的解析式为: $y = \frac{6}{x}$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 经过 $A(0, 2)$ 、 $B(-4, 0)$ 两点,

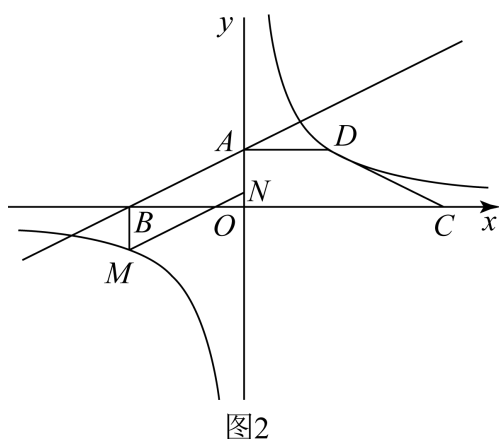
$$\therefore \begin{cases} b = 2 \\ -4k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x + 2$;

【小问 3 详解】

①如图 2, 当四边形 $ABMN$ 是平行四边形时,



$\therefore BM \parallel AN$ 且 $BM = AN$,

$\therefore$ 点 N 在 y 轴上,

$\therefore$ 过点 B 作 x 轴的垂线与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 的交点即为点 M ,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $M(-4, -\frac{3}{2})$,

$$\therefore BM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AN = BM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore ON = OA - AN = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $N(0, \frac{1}{2})$;

②如图 3, 当四边形 $NBMA$ 是平行四边形时,

$$\text{同理可得 } AN = BM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore ON = OA + AN = \frac{7}{2},$$

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $N(0, \frac{7}{2})$;

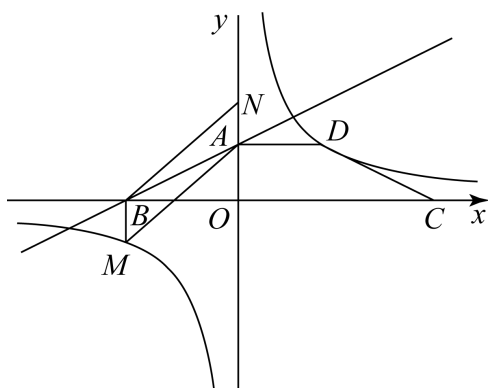


图3

③如图 4, 当四边形 $MABN$ 是平行四边形时,

$\because$ 点 A 、 N 在 y 轴上,

$\therefore$ 平行四边形 $MABN$ 对角线的交点在 y 轴上,

$$\therefore B(-4, 0),$$

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 4,

$$\text{把 } x=4 \text{ 代入 } y=\frac{6}{x} \text{ 得: } y=\frac{3}{2},$$

$$\therefore M(4, \frac{3}{2}),$$

$$\text{设 } N(0, a), \text{ 则 } \frac{a+2}{2} = \frac{0+\frac{3}{2}}{2},$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore N(0, -\frac{1}{2}),$$

综上所述, 点 N 的坐标为 $(0, \frac{1}{2})$ 或 $(0, \frac{7}{2})$ 或 $(0, -\frac{1}{2})$.

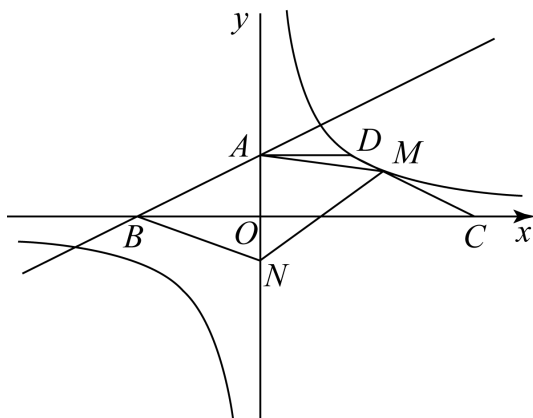


图4

【点睛】此题属于反比例函数与一次函数综合题. 考查了待定系数法求函数解析式、全等三角形的判定与性质、等腰梯形的性质、矩形的判定与性质以及平行四边形的性质等知识. 注意准确作出图形是解此题的关键.

26. 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AC=4\sqrt{3}$, 点 M 是 AC 上一点, 点 N 在射线 CB 上, 且 $MB=MN$, 联结 DN , 设 $AM=x$.

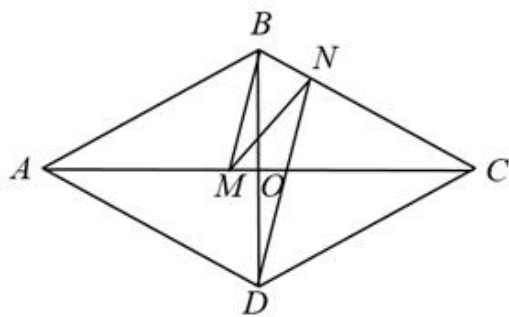
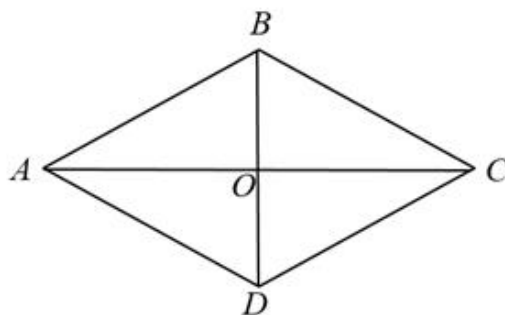


图1



备用图

(1) 当点 M 、 N (N 在边 BC 上) 运动时, $\angle MND$ 的大小是否会变化? 若不变请求出度数, 若变化请说明理由.

(2) 若 $\angle BMN=30^\circ$, 求 AM 的值.

(3) 当 N 在线段 BC 上时, 设 $DN=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及其定义域.

【答案】(1) 不变, $\angle MND=30^\circ$;

(2) AM 的长为 $2\sqrt{3}-2$ 或 $4\sqrt{3}-4$;

$$(3) y = \sqrt{3x^2 - 12\sqrt{3}x + 48} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{8\sqrt{3}}{3} \right)$$

【解析】

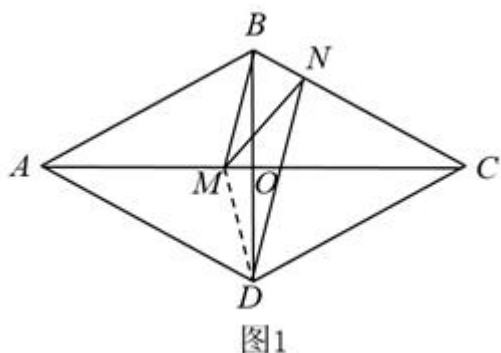
【分析】(1) 联结 DM ，设 $\angle MBO = \alpha$ ，可表示出 $\angle DMN$ ， $\angle CDM$ ， $\angle CMD$ ， $\angle CMB$ ， $\angle CMN$ ，进而计算求得 $\angle DMN = 120^\circ$ ，从而求得结果；

(2) 分点 N 在边 BC 上和点 N 在 CB 延长线上时两种情况讨论，进而求得结果；

(3) 作 $ME \perp AB$ 于 E ， $MF \perp DN$ ，在 $\triangle ABM$ 中表示出 MB ，进而表示出 MN ，进一步表示出 DN ，从而求得结果.

【小问 1 详解】

解：如图 1，



联结 DM ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}, BD = 2OD = 2OB, AD = AB,$$

$$\therefore DM = BM, OD = OB = \sqrt{AD^2 - OA^2} = 2,$$

$$\therefore BD = 4,$$

$$\therefore AD = AB = BD,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 60^\circ, \angle CBD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ,$$

设 $\angle MBO = \alpha$,

$$\therefore MN = MB,$$

$$\therefore \angle MBN = \angle MNB = \angle DBC + \angle MBO = 60^\circ + \alpha,$$

在 $\triangle CBM$ 中，

$$\angle CMB = 180^\circ - \angle ACB - \angle CBM = 180^\circ - 30^\circ - (60^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CMD = \angle CMB = 90^\circ - \alpha,$$

在 $\triangle MND$ 中，

$$\angle BMN = 180^\circ - \angle MBN - \angle MNB = 180^\circ - 2(60^\circ + \alpha) = 60^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle CMB - \angle BMN = 90^\circ - \alpha - (60^\circ - 2\alpha) = 30^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle DMN = \angle CMN + \angle CMD = (30^\circ + \alpha) + (90^\circ - \alpha) = 120^\circ,$$

$$\therefore BM = DM = MN,$$

$$\therefore \angle MND = \angle MDN = \frac{180^\circ - \angle BMN}{2} = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

解：当点 N 在边 BC 上时，

在 $\triangle MBN$ 和 $\triangle CBM$ 中，

$$\angle BMN = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\angle CBM = \angle MBN,$$

$$\therefore \angle CMB = \angle MBN,$$

$$\therefore MB = MN,$$

$$\therefore \angle MBN = \angle MNB,$$

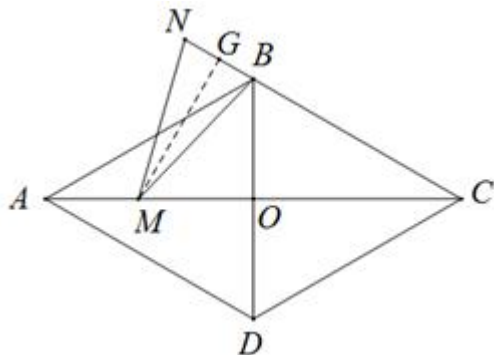
$$\therefore \angle CBM = \angle MBN,$$

$$\therefore CM = CB = 4,$$

$$\therefore AM = AC - CM = 4\sqrt{3} - 4;$$

当点 N 在 CB 延长线上时，

过点 M 作 $MG \perp BN$ 于点 G ，



$$\therefore MB = MN,$$

$$\therefore \angle NMG = \angle BMG = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle GMC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BMO = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OBM$ 是等腰直角三角形，

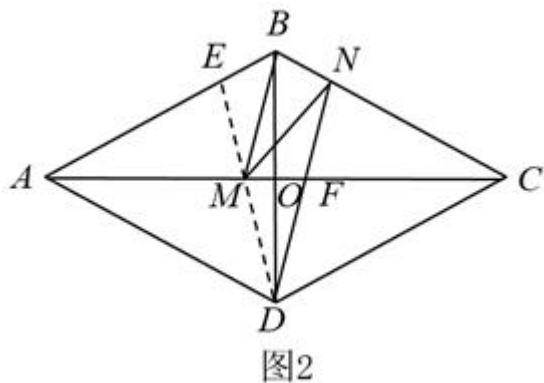
$$\therefore OB = OM = 2,$$

$$\therefore AM=AO-OM=2\sqrt{3}-2;$$

综上, AM 的长为 $2\sqrt{3}-2$ 或 $4\sqrt{3}-4$;

【小问3详解】

解: 如图2,



作 $ME \perp AB$ 于 E , $MF \perp DN$,

$$\because \angle CAB=30^\circ,$$

$$\therefore EM=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}x,$$

$$\therefore AE=\sqrt{AM^2-EM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore BE=AB-AE=4-\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

在 $Rt\triangle BEM$ 中,

$$BM=\sqrt{BE^2+EM^2}=\sqrt{\left(4-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+16},$$

在 $Rt\triangle MNF$ 中,

$$\text{同理可得: } NF=\frac{\sqrt{3}}{2}MN=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+16},$$

$$\therefore DN=2NF,$$

$$\therefore y=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+16}=\sqrt{3x^2-12\sqrt{3}x+48}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{8\sqrt{3}}{3}\right).$$

【点睛】 本题考查了菱形性质, 直角三角形性质, 等腰三角形判定和性质等知识, 解决问题的关键是设角, 通过计算寻找角的数量关系.

