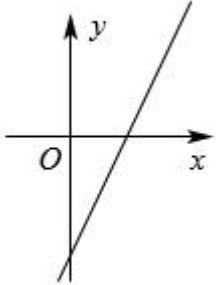


2023 学年度第二学期八年级数学期中练习卷八年级数学

(测试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、填空题 (本大题共 15 题, 每题 2 分, 满分 30 分)

1. 如图, 直线 $y = 2x - 6$ 与 x 轴的交点坐标是_____.



【答案】(3, 0)

【解析】

【分析】代入 $y = 0$ 可求出 x 的值, 进而可得出直线与 x 轴的交点坐标.

【详解】解: 当 $y = 0$ 时, $2x - 6 = 0$,

解得: $x = 3$,

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 6$ 与 x 轴的交点坐标是 (3, 0).

故答案为: (3, 0).

【点睛】本题考查一次函数图象上点的坐标特征, 牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y = kx + b$ 是解题的关键.

2. 平行于直线 $y = 3x - 1$ 且在 y 轴上的截距为 2 的直线表达式为_____.

【答案】 $y = 3x + 2$

【解析】

【分析】本题考查了两条直线的交点或平行问题, 利用两直线平行得到 k 的值, 利用在 y 轴上的截距的意义得到 b 的值, 从而可确定函数的解析式.

【详解】解: 设直线表达式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = 3x - 1$ 且在 y 轴上的截距为 2,

$\therefore k = 3, b = 2$,

$\therefore$ 直线的表达式为 $y = 3x + 2$,

故答案为: $y = 3x + 2$.

3. 已知直线 $y = x - m + 1$ 的图像经过第一、三、四象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与系数的关系: 对于一次函数 $y = kx + b$ (k 为常数, $k \neq 0$), 当 $k > 0$, $b > 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、二、三象限; 当 $k > 0$, $b < 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、三、四象限; 当 $k < 0$, $b > 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限; 当 $k < 0$, $b < 0$, $y = kx + b$ 的图象在二、三、四象限, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = x - m + 1$ 的图像经过第一、三、四象限,

$$\therefore -m + 1 < 0,$$

$$\therefore m > 1,$$

故答案为: $m > 1$.

4. 已知一次函数 $y = -x + b$ 的图像经过点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 如果 $x_1 < x_2$, 那么 y_1 _____ y_2 (填 “>”、“=”、“<”)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比较一次函数值的大小, 根据一次项系数小于 0 可得 y 随 x 增大而减小, 据此可得答案.

【详解】 解: $\because$ 一次函数解析式为 $y = -x + b$, $-1 < 0$,

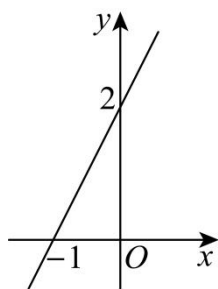
$\therefore y$ 随 x 增大而减小,

$\because$ 一次函数 $y = -x + b$ 的图像经过点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为: $>$.

5. 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $(-1, 0)$ 与 $(0, -2)$, 则关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是_____.



【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数与一元一次不等式的关系，不等式 $kx + b < 0$ 的解集就是一次函数 $y = kx + b$ 的图象在 x 轴下方时 x 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-1, 0)$ 与 $(0, -2)$ ，
则由图可知关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < -1$ ，
故答案为： $x < -1$.

6. 方程 $\sqrt{2x+3} = x$ 的解为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据无理方程的解法，首先，两边平方解出 x 的值，然后验根，解答即可.

【详解】 解： 两边平方得： $2x+3 = x^2$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解方程得： $x_1 = 3, x_2 = -1$,

检验： 当 $x_1 = 3$ 时，方程的左边 = 右边，所以 $x_1 = 3$ 为原方程的解，

当 $x_2 = -1$ 时，原方程的左边 $\neq$ 右边，所以 $x_2 = -1$ 不是原方程的解.

故答案为 3.

【点睛】 此题考查无理方程的解，解题关键在于掌握运算法则

7. 二项方程 $\frac{1}{4}x^4 - 4 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先把原方程变形为 $x^4 = 16$ ，令 $t = x^2 (t \geq 0)$ ，则 $t^2 = 16$ ，解得 $t = 4$ ，则 $x^2 = 4$ ，据此解方程即可得到答案.

【详解】 解： $\because \frac{1}{4}x^4 - 4 = 0$,

$$\therefore \frac{1}{4}x^4 = 4,$$

$$\therefore x^4 = 16,$$

$$\text{令 } t = x^2 (t \geq 0),$$

$$\therefore t^2 = 16,$$

解得 $t = 4$ 或 $t = -4$ (舍去),

$$\therefore x^2 = 4,$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = -2$,

故答案为: $x_1 = 2, x_2 = -2$.

8. 用换元法解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x}{x-1} = y$, 那么原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 此题主要考查了换元法解分式方程, 设 $\frac{x}{x-1} = y$, 则方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} - 2 = 0$ 可转化为:

$y - \frac{1}{y} - 2 = 0$ 然后再去分母, 将该分式方程转化为整式方程即可.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x-1} = y$,

则方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} - 2 = 0$ 可转化为: $y - \frac{1}{y} - 2 = 0$,

去分母, 方程两边同时乘以 y , 得: $y^2 - 2y - 1 = 0$,

故答案为: $y^2 - 2y - 1 = 0$.

9. 在平行四边形 ABCD 中, 两邻角的度数比是 7: 2, 那么较小角的度数为_____度.

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题主要依据平行四边形的性质, 得出两邻角之和 180° , 再有两邻角的度数比是 7: 2, 得出较小角的度数.

【详解】 解: 设两邻角分别为 $7x, 2x$,

则 $7x + 2x = 180^\circ$,

解得: $x = 20^\circ$,

$\therefore$ 较小的角为 40° .

故答案为：40.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的基本性质，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握平行四边形的两邻角之和为 180° .

10. 若一个多边形的每个外角都等于 30° ，则这个多边形的边数为_____.

【答案】12

【解析】

【分析】本题考查多边形的外角. 根据多边形的外角和为 360° ，列式计算即可.

【详解】解：由题意，得：这个多边形的边数为 $\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$ ；

故答案为：12.

11. 有两块不同规格的正方形瓷砖，大正方形的面积比小正方形多 9 平方分米，小正方形的边长比大正方形的边长少 1 分米，求小正方形的面积. 如果设小正方形的面积为 x 平方分米，根据题意，可列出关于 x 的方程是_____.

【答案】 $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 1$

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根的应用，设小正方形的面积为 x 平方分米，则大正方形的面积为 $(x+9)$ 平方分米，根据小正方形的边长比大正方形的边长少 1 分米，即可列出关于 x 的方程.

【详解】解：设小正方形的面积为 x 平方分米，则大正方形的面积为 $(x+9)$ 平方分米，

根据题意得： $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 1$ ，

故答案为： $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + 1$.

12. 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像与坐标轴围成的三角形，称为该一次函数的坐标三角形. 已知一次函数 $y = x + n$ 的坐标三角形的面积为 6，则 $n =$ _____.

【答案】 $\pm 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，解答本题需要注意有两种情况，不要漏解，表示出函数图象与坐标轴的交点，再利用三角形的面积公式得到关于 n 的方程，解方程即可求出 n 的值.

【详解】解： $\because y = x + n$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = n$ ，令 $y = 0$ ，则 $x = -n$ ，

∵一次函数 $y = x + n$ 的坐标三角形的面积为 6,

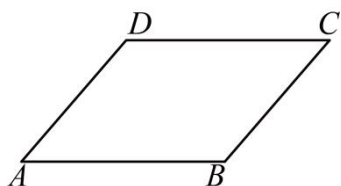
$$\therefore \frac{1}{2}n^2 = 6,$$

$$\text{解得: } n = \pm 2\sqrt{3},$$

故答案为: $\pm 2\sqrt{3}$.

13. 如图, 在 $ABCD$ 中, 若 AD 、 AB 、 BC 三条边的长分别为 $(x-3)\text{cm}$ 、 $(x+1)\text{cm}$ 和 2cm , 则

$$DC = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}.$$



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 由平行四边形的性质可得 $AD = BC$, $AB = CD$, 列出等式, 即可求解.

【详解】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AB = CD,$$

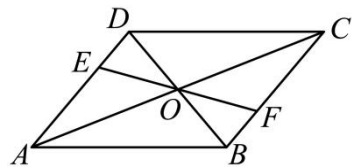
$$\therefore x - 3 = 2,$$

$$\text{解得: } x = 5,$$

$$\therefore AB = CD = 5 + 1 = 6(\text{cm}).$$

故答案为: 6.

14. 如图, 已知 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 过点 O 的线段 EF 与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F , 如果 $AD = 4$, $AB = 5$, 四边形 $EFCD$ 的周长为 12. 则 $OE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题利用了平行四边形的性质, 全等三角形的判定与性质, 由平行四边形的性质可得 $AB = CD = 5$, $AD = BC = 4$, $AO = OC$, $AD \parallel BC$ 由 “AAS” 可证 $\triangle OAE \cong \triangle OCF$, 可得

$OF = OE$, $CF = AE$, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 平行四边形,

$\therefore AB = CD = 5$, $AD = BC = 4$, $AO = OC$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle OAD = \angle OCF$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle OCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAD = \angle OCF \\ \angle AOE = \angle COF, \\ AO = CO \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ (AAS),

$\therefore OF = OE$, $CF = AE$,

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 的周长

$$= ED + CD + CF + OF + OE$$

$$= ED + AE + CD + OE + OF$$

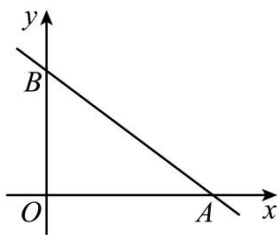
$$= AD + CD + OE + OF = 12,$$

$$\therefore 4 + 5 + 2OE = 12,$$

$$\therefore OE = \frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

15. 如图, 已知直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 在 x 轴正半轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 则点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(9, 0)$ 或 $(\frac{7}{8}, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 等腰三角形定义, 勾股定理, 先求出一一次函数与坐标轴的交点坐标, 再利用勾股定理求出 AB 长, 利用等腰三角形可得点 C 坐标.

【详解】解: 分两种情况讨论,

①当点 C 在点 A 右侧的 x 轴上时,

$\because$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点,

当 $x = 0$ 时, $y = 3$; 当 $y = 0$ 时, $x = 4$

$$\therefore A(4, 0), B(0, 3),$$

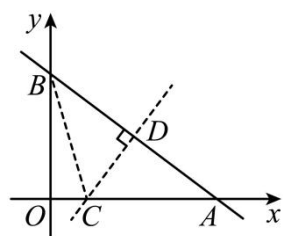
$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\because AB = AC$, 且点 C 在 x 轴正半轴,

$$\therefore OC = OA + AC = 4 + 5 = 9,$$

$$\therefore C(9, 0);$$

②当点 C 在点 A 的左侧时, 如图作线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 C , 设 $C(m, 0)$,



在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, $OC = m$, $BC = 4 - m$, $OB = 3$,

由勾股定理得: $OC^2 + OB^2 = BC^2$,

$$\therefore m^2 + 3^2 = (4 - m)^2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{7}{8},$$

$$\therefore C\left(\frac{7}{8}, 0\right),$$

综上所述, 符合题意的点 $C(9, 0)$ 或 $\left(\frac{7}{8}, 0\right)$,

故答案为: $(9, 0)$ 或 $\left(\frac{7}{8}, 0\right)$.

二、选择题 (本大题共 4 题, 每题 3 分, 满分 12 分)

16. 如果将直线 $l_1: y = 2x - 2$ 平移后得到直线 $l_2: y = 2x$, 那么下列平移过程正确的是 ()

A. 将 l_1 向左平移 2 个单位

B. 将 l_1 向右平移 2 个单位

C. 将 l_1 向上平移 2 个单位

D. 将 l_1 向下平移 2 个单位

【答案】C

【解析】

【分析】根据“上加下减”的原则求解即可.

【详解】将函数 $y = 2x - 2$ 的图象向上平移 2 个单位长度, 所得图象对应的函数解析式是 $y = 2x$.

故选 C.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象变换的法则是解答此题的关键.

17. 下列方程组中, 二元二次方程组的个数是 ()

$$\begin{cases} x^2 + xy = x + 2 \\ 3y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3y + \sqrt{x} = 5 \\ 3y^2 + 1 = x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y \\ x^2y = -8 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二元二次方程组的定义, 根据含有两个未知数, 且未知数的最高次数是 2, 这样的整式方程组是二元二次方程组, 根据定义逐一分析即可.

【详解】解: $\begin{cases} x^2 + xy = x + 2 \\ 3y = 2 \end{cases}$, 是二元二次方程组;

$\begin{cases} 3y + \sqrt{x} = 5 \\ 3y^2 + 1 = x \end{cases}$, 第一个式子不是整式方程, 故不是二元二次方程组;

$\begin{cases} x = y \\ x^2y = -8 \end{cases}$, 未知数的最高次数是三次, 故不是二元二次方程组;

$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$, 是二元二次方程组;

综上所述, 二元二次方程组共有 2 个,

故选: B.

18. 下列方程中, 没有实数根的方程是 ()

A. $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}$

B. $x^2 + x - 1 = 0$

C. $\sqrt{x^2+1} = 0$

D. $\sqrt{x} = -x$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程, 解分式方程和根的判别式等知识点, 先把分式方程转化成整式方程, 求出方程的解, 再进行检验即可判断选项 A; 根据根的判别式即可判断选项 B; 根据 $x^2 + 1 \geq 1$ 和算术平方根即

可判断选项 C；根据二次根式的性质进行判断选项 D.

【详解】解：A、 $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}$,

$$\frac{1}{x+2} = \frac{3}{(x+2)(x-2)},$$

去分母得： $x-2=3$,

解得： $x=5$,

经检验， $x=5$ 是分式方程的解，即方程有实数根，不符合题意；

B、 $x^2+x-1=0$,

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0, \text{ 方程有实数根, 不符合题意;}$$

C、 $\sqrt{x^2+1}=0$ ，不论 x 为何值， $x^2+1 \geq 1$ ，

即 $\sqrt{x^2+1} \neq 0$ ，方程无实数根，符合题意；

D、当 $x=0$ 时， $\sqrt{x}=-x$ ，即方程有实数根，不符合题意，

故选：C.

19. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

A. $\angle ADB = \angle CBD$, $AB \parallel CD$

B. $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle DAB = \angle BCD$

C. $\angle ABD = \angle CDB$, $OA = OC$

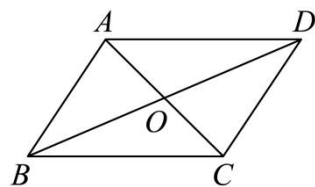
D. $\angle DAB = \angle BCD$, $AB = CD$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了平行四边形的判定，平行线的判定与性质，全等三角形的判定与性质，根据平行四边形的判定定理分别进行分析即可

【详解】解：如图：



A、 $\because \angle ADB = \angle CBD$,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故此选项不合题意;

B、 $\because \angle ADB = \angle CBD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$

$\because \angle DAB = \angle BCD$,

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故此选项不合题意;

C、 $\because \angle ABD = \angle CDB$, $\angle AOB = \angle COD$, $OA = OC$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$ (AAS),

$\therefore AB = CD$,

$\because \angle ABD = \angle CDB$

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故此选项不合题意;

D、 $\angle DAB = \angle BCD$, $AB = CD$ 不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故此选项符合题意.

故选: D.

三、(本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

20. 解关于 x 方程: $ax^2 = 2$ ($a \neq 0$)

【答案】 $x = \pm \frac{\sqrt{2a}}{2} (a > 0)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 利用直接开平方的方法解方程即可.

【详解】 解: $\because ax^2 = 2$ ($a \neq 0$),

$$\therefore x^2 = \frac{2}{a},$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{2a}}{2} (a > 0).$$

21. 解方程: $x + 2\sqrt{x-1} = 1$

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程，先移项得到 $2\sqrt{x-1}=1-x$ ，再把方程两边同时平方得到 $4(x-1)=(1-x)^2$ ，据此利用因式分解法解一元二次方程即可得到答案.

【详解】 解： $\because x+2\sqrt{x-1}=1$,

$$\therefore 2\sqrt{x-1}=1-x,$$

$$\therefore 4(x-1)=(1-x)^2,$$

$$\therefore (x-1)^2-4(x-1)=0,$$

$$\therefore (x-1-4)(x-1)=0,$$

$$\therefore x-1-4=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

解得 $x=5$ 或 $x=1$,

检验：当 $x=5$ 时，左边 $=5+4=9$ ，右边 $=1$ ，所以不是原方程的解，

当 $x=1$ 时，左边 $=1+2\times\sqrt{1-1}=1$ ，右边 $=1$ ，所以是原方程的解，

$$\therefore x=1.$$

22. 解方程组：
$$\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+3xy-10y^2=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=6 \end{cases}, \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先将二次方程化为两个一次方程，则原方程组化为两个二元一次方程组，解方程组即可.

【详解】 解：
$$\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+3xy-10y^2=0 \end{cases}$$

由②得： $(x-2y)(x+5y)=0$

原方程组可化为
$$\begin{cases} x-y=6 \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-y=6 \\ x+5y=0 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=6 \end{cases}, \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-1 \end{cases}.$$

$\therefore$ 原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=6 \end{cases}, \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

23. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 此题考查了解二元一次方程组，设 $\frac{1}{x}=a$ ， $\frac{1}{y}=b$ 利用换元法，加减消元法求出解即可.

【详解】 解： 设： $\frac{1}{x}=a$ ， $\frac{1}{y}=b$ ，

方程组变形为
$$\begin{cases} 2a+2b=\frac{1}{2} \text{①} \\ 5a-b=\frac{3}{4} \text{②} \end{cases},$$

①+② $\times 2$ 得： $12a=2$ ，

解得： $a=\frac{1}{6}$ ，

把 $a=\frac{1}{6}$ 代入②得： $b=\frac{1}{12}$ ，

则方程组的解为：
$$\begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{12} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases}.$$

四、(本大题共 4 题，24、25、26 题每题 8 分，27 题 10 分. 满分 34 分)

24. 甲乙两个班分别接到一项植树任务，甲班需植树 100 棵，乙班需植树 90 棵. 已知甲班平均每天比乙班多植树 5 棵，且甲班完成任务所用的天数比乙班少一天. 求甲班平均每天植树多少棵?

【答案】 甲班平均每天植树 20 棵

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的应用，设甲班平均每天植树 x 棵，则乙班平均每天植树 $(x-5)$ 棵，根据甲班需植树 100 棵，乙班需植树 90 棵，已知甲班平均每天比乙班多植树 5 棵，列方程求解即可.

【详解】解：设甲班平均每天植树 x 棵，则乙班平均每天植树 $(x-5)$ 棵，

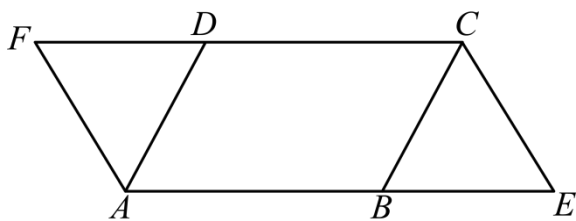
根据题意得： $\frac{100}{x} = \frac{90}{x-5} - 1$ ，

解得： $x = 20$ 或 $x = -25$ (舍去)，

经检验 $x = 20$ 是分式方程的解，且符合题意，

答：甲班平均每天植树 20 棵。

25. 如图，延长 $ABCD$ 的边 AB 到点 E ，使 $BE = BC$ ，延长边 CD 到点 F ，使 $DF = DA$ 。连结 AF 、 CE 。求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形。



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质和判定的应用，注意：平行四边形的对边平行且相等，有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

根据平行四边形性质得出 $AB \parallel CD$ ，且 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，推出 $CF \parallel AE$ ， $AE = CF$ ，根据平行四边形的判定推出即可。

【详解】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$ ，且 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，

∴ $CF \parallel AE$ ，

∵ $BE = BC$ ， $DF = DA$ ，

∴ $BE = DF$ ，

∴ $AE = CF$ ，

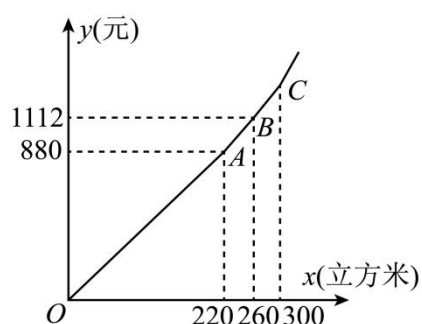
∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形。

26. 2024 年 3 月 22 日是第三十二届“世界水日”，珍惜水资源成为全球共识，某市为鼓励居民节约用水，对居民供水实施三档阶梯式收费，并依据居民的用水量加收每立方 1.8 元的污水处理费，具体收费方法见下表，设某用户的年应交水费为 y 元，年用水量为 x 立方米，折线 $O-A-B-C$ 是 y 关于 x 的函数图像，请结合图表中的信息，解答下列问题。

居民供水阶梯式收费标准

	户年用水量 x (立方米)	供水价格 (元/立方米)	污水处理费 (元/立方米)
第一阶梯	$0 \leq x < 220$	2.2	1.8
第二阶梯	$220 \leq x \leq 300$	— — — —	
第三阶梯	$x > 300$	7	

注：应交水费=供水费用+污水处理费.



- 根据表格中的信息，当小明家的年用水量为 200 立方米时，小明家的年应交水费是多少元？
- 当 $220 \leq x \leq 300$ 时， y 是 x 的一次函数. 请结合函数图像，求出某用户的年应交水费 y 元与年用水量 x 立方米的函数关系式.
- 第二阶梯的供水价格是 _ _ _ _ _ 元. 当小明家的年应交水费为 1360 元时，请你判断他家的年用水量是否超过 300 立方米？ _ _ _ _ _ . (填“是”或“否”)

【答案】 (1) 小明家的年应交水费是 800 元

(2) $y = 5.8x - 396$

(3) 5.1；是

【解析】

【分析】 (1) 利用单价乘以用水量加上污水处理费即可；

(2) 设函数关系式为 $y = kx + b$ ，利用待定系数法求解即可；

(3) 设第二阶梯收费为 a 元，找准等量关系列出方程求解即可，求出第二阶梯最高水费进行比较即可.

【小问 1 详解】

解：由表可知，当小明家的年用水量为 200 立方米时，按照第一阶梯收费，

$$\therefore 2.2 \times 200 + 1.8 \times 200 = 800 \text{ 元},$$

答：小明家的年应交水费是 800 元；

【小问 2 详解】

设 $220 \leq x \leq 300$ 时，水费 y 元与年用水量 x 立方米的函数关系式为 $y = kx + b$ ，

由图可知函数过 $A(220, 880)$ ， $B(260, 1112)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 880 = 220k + b \\ 1112 = 260k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 5.8 \\ b = -396 \end{cases},$$

$\therefore$ 水费 y 元与年用水量 x 立方米的函数关系式为： $y = 5.8x - 396$ ；

【小问 3 详解】

设第二阶梯收费为 a 元，

由图可知，当应交水费为 1112 元时，

$$260 \times 1.8 + 220 \times 2.2 + (260 - 220)a = 1112,$$

解得： $a = 5.1$ ，

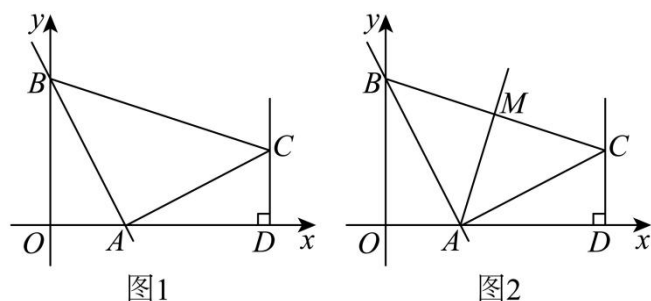
当 $x = 300$ 时， $y = 5.8 \times 300 - 396 = 1344 < 1360$ ，

$\therefore$ 用水量超过 300 立方米，

故答案为： 5.1； 是.

【点睛】 本题考查了有理数四则运算的应用，一次函数的应用，一元一次方程的应用，有函数图象读取信息，读懂图象找到等量关系是解答本题的关键.

27. 如图，已知一次函数 $y = -2x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B ，将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° ，点 B 的对应点记为点 C . 连接 AC 、 BC . 过点 C 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 D . 点 M 是线段 BC 上的一个动点.



(1) 如图 1，求直线 BC 的表达式.

(2) 如图 1，当直线 $AM \perp x$ 轴时，平面内是否存在一点 G ，使得以点 C 、 D 、 M 、 G 为顶点的四边形是平行四边形？若有，请直接写出点 G 的坐标；若没有，请说明理由.

(3) 如图 2, 当射线 AM 与直线 AB 的夹角为 45° 时, 在射线 AM 上取一点 Q , 使 $AQ = AB$, 求点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{3}x + 4$

(2) G 点坐标为 $\left(2, \frac{16}{3}\right)$ 或 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(10, -\frac{4}{3}\right)$

(3) $Q(2 + \sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 先求出 A, B 点坐标, 通过 AAS 证明 $\triangle OAB \cong \triangle DCA$, 得到 $OA = DC = 2$, $AD = BO = 4$, 即可求出 C, D 两点坐标, 用待定系数法即可求解;

(2) $AM \perp x$ 轴于 A 点, 则 $AM \parallel CD$, 先求出 M 点坐标, 分别在①当 CD 是平行四边形的边时, ②当 CD 是平行四边形的对角线时, 进行求解即可;

(3) 先得出 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 然后求出 M 点坐标, 利用待定系数法求出 AM 解析式, 设 Q 点坐标为 (Q_x, Q_y) , 过 Q 点作 $QT \perp x$ 轴于 T 点, 利用勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解: 一次函数 $y = -2x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点,

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 4, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } x = 2,$$

$$\therefore A(2, 0), B(0, 4),$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\because \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle OBA,$$

$$\because CD \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle CDA = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle DCA (\text{AAS}),$$

$$\therefore OA = DC = 2, AD = BO = 4,$$

$$\therefore D(6, 0), C(6, 2),$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b=4 \\ 6k+b=2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{3} \\ b=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为: $y = -\frac{1}{3}x + 4$;

【小问 2 详解】

存在, 如图,

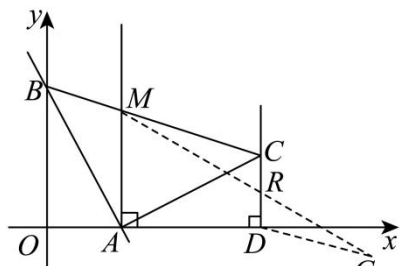


图1

$AM \perp x$ 轴于 A 点, 则 $AM \parallel CD$,

$\therefore$ 点 M 在 BC 上, 且点 M 的横坐标是 2, 直线 BC 表达式为 $y = -\frac{1}{3}x + 4$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, $y = -\frac{1}{3} \times 2 + 4 = \frac{10}{3}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$,

①当 CD 是平行四边形的边时, $MG = CD = 2$, $\frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$, $\frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 当 G 在 M 上方时, G 点坐标为 $\left(2, \frac{16}{3}\right)$, 当 G 在 M 下方时, G 点坐标为 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$;

②当 CD 是平行四边形的对角线时, 如图 1, 取 CO 点 R 连接 MR 并延长至点 G , 使 $MR = GR$, 连接 DG , 则 $DG \parallel MC$ 且 $DG = MC$,

设 G 点坐标为 (x', y') , 点 $M\left(2, \frac{10}{3}\right)$, 点 $C(6, 2)$, 点 $D(6, 0)$,

$\therefore 6 - 2 = x' - 6$, $2 - \frac{10}{3} = y' - 0$,

解得: $x' = 10$, $y' = -\frac{4}{3}$,

$\therefore G$ 点坐标为 $\left(10, -\frac{4}{3}\right)$,

综上所述 G 点坐标为 $\left(2, \frac{16}{3}\right)$ 或 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(10, -\frac{4}{3}\right)$;

【小问3详解】

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\because$ 点 M 在线段 BC 上,

$$\therefore \angle BAM = 45^\circ,$$

$\therefore AM \perp BC$, M 为 BC 中点,

$$\because B(0,4), C(6,2),$$

$$\therefore M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right), \text{ 即 } M(3,3),$$

设射线 AM 的表达式为 $y = k'x + b' (y \geq 0)$, 过点 A 、点 M ,

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2k' + b' \\ 3 = k' + b' \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k' = 3 \\ b' = -6 \end{cases},$$

$$\therefore y = 3x - 6, \quad AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

设 Q 点坐标为 (Q_x, Q_y) ,

如图2, 过 Q 点作 $QT \perp x$ 轴于 T 点,

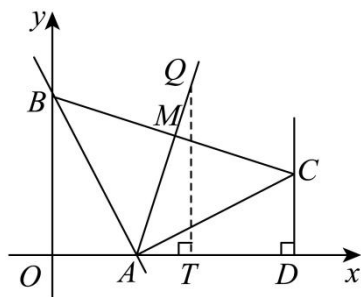


图2

$$Q_T = Q_y,$$

$$AT = Qx - OA = Qx - 2,$$

$$AQ = \sqrt{QT^2 + AT^2} = \sqrt{Q_y^2 + (Qx - 2)^2} = \sqrt{(3Qx - 6)^2 + (Qx - 2)^2},$$

$$\because AB = AQ,$$

$$\therefore 2\sqrt{5} = \sqrt{(3Qx - 6)^2 + (Qx - 2)^2}, \text{ 整理得 } (Qx - 2)^2 = 2,$$

$$\text{解得: } Q_x = 2 + \sqrt{2} \text{ 或 } 2 - \sqrt{2},$$

$\because Q$ 点横坐标值大于 A 点横坐标值,

$$\therefore Q_x = 2 + \sqrt{2}, \quad Q_y = 3Q_x - 6 = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore Q \text{ 点坐标为 } (2 + \sqrt{2}, 3\sqrt{2}).$$

【点睛】 本题考查了一次函数的几何应用，一次函数与坐标轴的交点，全等三角形的判定与性质，平行四边形的性质，勾股定理，求一次函数解析式，等腰直角三角形的判定与性质，中点坐标的求解，旋转性质，准确作出辅助线，分情况讨论是解答本题的关键.