

2023 学年第二学期八年级数学学科期中考试

完卷时间：100 分钟 总分：100 分

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 26 题；
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
4. 第 24 题只需要写本学期新学的理由，其余题目不需要写理由

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 以下函数中，属于一次函数的是（ ）

A. $y = -\frac{x}{2}$

B. $y=kx+b$ (k 、 b 是常数)

C. $y=c$ (c 为常数)

D. $y = \frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的定义进行判断即可.

【详解】解：A. $y = -\frac{x}{2}$ ，是一次函数，故本选项正确；

B. $y=kx+b$ (k 、 b 是常数)，当 $k=0$ 时，没有自变量 x ，不是一次函数，故本选项错误；

C. $y=c$ (c 为常数)，没有自变量，不是一次函数，故本选项错误；

D. $y = \frac{2}{x}$ 自变量为分母，不是一次函数，故本选项错误.

故选 A.

【点睛】本题主要考查一次函数的定义，一般地，形如 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数， $k \neq 0$) 的函数，叫做一次函数.

2. 在下列关于 x 的方程中，不是二项方程的是()

A. $81x^4 - 16 = 0$

B. $x^3 - 1 = 0$

C. $x^2 = 8$

D. $x^3 - x = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二项方程的定义逐个判断得结论.

【详解】解：把各方程移项，使等号右边为 0，满足二项方程的是 A、B、C，

由于方程 D 移项后左边是三项，故选项 D 不是二项方程.

故选：D.

【点睛】本题考查了二项方程的定义，二项方程的左边只有两项，其中一项含未知数 x ，这项的次数就是方程的次数；另一项是常数项；方程的右边是0.

3. 用换元法解方程 $\frac{x-1}{x^2}-\frac{x^2}{x-1}=3$ 时，如果设 $\frac{x-1}{x^2}=y$ ，那么原方程可化为关于 y 的方程是（ ）

- A. $y^2+3y-1=0$ B. $y^2-3y-1=0$ C. $y^2-3y+1=0$ D. $y^2+3y+1=0$

【答案】B

【解析】

【分析】设 $\frac{x-1}{x^2}=y$ ，则原方程可化为 $y-\frac{1}{y}=3$ ，去分母即可.

【详解】解： $\frac{x-1}{x^2}-\frac{x^2}{x-1}=3$ ，

设 $\frac{x-1}{x^2}=y$ ，

则原方程可化为 $y-\frac{1}{y}=3$ ，

则 $y^2-3y-1=0$ ，故B正确.

故选：B.

【点睛】本题考查了用换元法解分式方程，解此题的关键是能正确换元.

4. 下列方程中，有实数根的方程是（ ）

A. $\frac{1}{x^2+1}+1=0$

B. $\sqrt{x+1}+2=0$

C. $\frac{2}{2-x}=\frac{x}{2-x}$

D. $\sqrt{x+2}=-x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查解分式方程和无理方程，分别解分式方程和无理方程逐一进行判断即可.

【详解】解：A、 $\because \frac{1}{x^2+1}+1=0$ ，

$$\therefore \frac{1}{x^2+1}=-1,$$

$$\because x^2+1 \geq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x^2+1} > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{x^2+1} = -1 \text{ 无解; 不符合题意;}$$

$$\text{B、} \because \sqrt{x+1} + 2 = 0,$$

$$\therefore \sqrt{x+1} = -2,$$

$$\because \sqrt{x+1} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x+1} = -2 \text{ 无解; 不符合题意;}$$

$$\text{C、} \because \frac{2}{2-x} = \frac{x}{2-x},$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } 2 - x = 0,$$

$$\therefore x = 2 \text{ 是原方程的增根, 舍掉,}$$

$$\therefore \text{原方程无解; 不符合题意;}$$

$$\text{D、} \because \sqrt{x+2} = -x,$$

$$\therefore x + 2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, x_2 = 2,$$

$$\because \sqrt{x+2} = -x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 0,$$

$$\therefore x = -1,$$

$$\text{故方程 } \sqrt{x+2} = -x \text{ 有实数根, 符合题意;}$$

故选 D.

5. 下列命题错误的是 ().

- A. 四条边相等的四边形是菱形
- B. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形
- C. 一组对角相等且一组对边相等的四边形是平行四边形
- D. 一组对角相等且一组对边平行的四边形是平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形、菱形的判定方法逐项判断即可.

【详解】解：A 选项：四条边相等的四边形是菱形，本选项说法正确，不符合题意；

B 选项：四边形的两组对角分别相等，可以推出同旁内角互补，进而推出两组对边分别平行，说明两组对角分别相等的四边形是平行四边形，本选项说法正确，不符合题意；

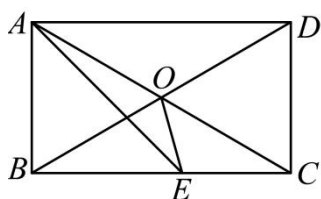
C 选项：一组对角相等且一组对边相等的四边形不一定是平行四边形，有可能是等腰梯形，所以本选项说法错误，符合题意；

D 选项：一组对角相等且一组对边平行的四边形是平行四边形，由已知对边平行，可以推出一组同旁内角互补，通过等量代换，得到另一组对边形成的同旁内角互补，从而另一组对边平行，故本选项说法正确，不符合题意.

故选：C.

【点睛】本点考查平行四边形、菱形的判定方法. 平行四边形判定：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；两组对边分别平行的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形. 菱形判定：四条边相等的四边形是菱形；一组邻边相等的平行四边形是菱形；对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

6. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E ，如果 $\angle CAE = 15^\circ$ ，那么 $\angle BOE$ 的度数为（ ）



A. 55°

B. 65°

C. 75°

D. 67.5°

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的性质得到 $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = BD$ ， $AB = CD$ ，可以计算出 $BO = BE$ ，再证明 $\triangle AOB \cong \triangle COB$ (SAS)，可求出 $\angle OBE$ 的度数，然后即可计算出 $\angle BOE$ 的度数.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ, \quad AC = BD, \quad AB = CD,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BE,$$

$$\because \angle CAE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAE - \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2CD,$$

$$\therefore BD = 2AB,$$

$$\therefore BO = BE,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BEO,$$

$$\because OA = OC, OB = OD, \angle AOD = \angle COB,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle BEO = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

故选: C.

【点睛】本题考查矩形的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 直线 $y = \frac{x-2}{2}$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】令 $x = 0$, 求得 y 的值, 即可判断.

【详解】解: 令 $x = 0$,

$$y = \frac{0-2}{2} = -1,$$

直线 $y = \frac{x-2}{2}$ 在 y 轴上的截距是 -1

【点睛】本题考查直线截距的求法, 考查运算求解能力, 属于基础题.

8. 已知一次函数 $y = (k+1)x - 3$ 的函数值 y 随着自变量 x 的值的增大而增大, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > -1$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质, 根据 y 随着自变量 x 的值的增大而增大, 得到 $k+1 > 0$, 求解即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = (k+1)x - 3$ 的函数值 y 随着自变量 x 的值的增大而增大,

$$\therefore k+1 > 0,$$

$$\therefore k > -1;$$

故答案为: $k > -1$.

9. 一次函数 $y = 2x + b$ 的图象沿 y 轴向上平移 3 个单位后得到一次函数 $y = 2x + 1$ 的图象, 则 b 值为 _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的平移变换和函数解析式之间的关系, 在平面直角坐标系中, 图形的平移与图形上某点的平移相同. 平移中点的变化规律是: 横坐标左移加, 右移减; 纵坐标上移加, 下移减. 根据平移法则上加下减可得出平移后的解析式, 对应得 $b + 3 = 1$, 解得即可.

【详解】 解: 由题意得:

平移后的解析式为: $y = 2x + b + 3 = 2x + 1$;

$\therefore b + 3 = 1$;

$\therefore b = -2$;

故答案为: -2 .

10. 方程组 $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases}$ _____ 二元二次方程组 (填“是”或“不是”).

【答案】 是

【解析】

【分析】 本题考查二元二次方程的定义, 根据两个整式方程, 共含有 2 个未知数, 含未知数的项的最高次数为 2, 组成的方程组叫做二元二次方程组, 进行判断即可.

【详解】 解: 方程组 $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases}$ 是二元二次方程组;

故答案为: 是.

11. 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 根据平方根的定义, 很容易求解, 或者把方程左边因式分解, 通过降次的方法也可以求解.

【详解】 $\because x^4 - 16 = 0$,

$\therefore (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$,

$\therefore x = \pm 2$,

$\therefore$ 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是 $x = \pm 2$,

故答案为 ± 2 .

【点睛】该题为高次方程，因此解决该题的关键，是需要把方程左边因式分解，从而达到降次的目的，把高次方程转化为低次方程，从而求解.

12. 方程 $\sqrt{2x+8}-x=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=4$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程，将无理方程转化为整式方程，求解后进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{2x+8}-x=0$,

$$\therefore \sqrt{2x+8}=x,$$

$$\therefore 2x+8=x^2,$$

解得: $x_1=4, x_2=-2$,

经检验: $x=4$ 为原方程的解, $x=-2$ 是原方程的增根, 舍去;

故答案为: $x=4$.

13. 若一个多边形的内角和等于 720° , 则从这个多边形的一个顶点引出对角线_____条.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据多边形的内角和公式求出边数, 从而求出这个多边形从一个顶点出发引出的对角线的条数.

【详解】 设多边形的边数是 n , 则

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ,$$

解得 $n=6$,

$\therefore$ 从这个多边形的一个顶点引出对角线是: $6-3=3$ (条),

故答案为 3.

【点睛】 本题考查多边形的对角线, 多边形内角与外角, 关键是要先根据多边形的内角和公式求出边数.

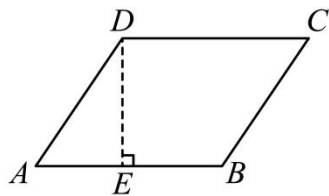
14. 已知一个菱形的周长为 24, 一个锐角为 60° , 则这个菱形的面积为_____.

【答案】 $18\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质, 根据菱形的性质求出菱形的边长, 根据含 30° 度角的直角三角形的性质求出菱形的高, 利用面积公式进行计算即可.

【详解】 解: 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle A = 60^\circ$, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 则: $\angle ADE = 30^\circ$,



∵ 菱形的周长为 24,

$$\therefore AB = AD = \frac{1}{4} \times 24 = 6,$$

∵ $\angle ADE = 30^\circ$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AD = 3,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 3\sqrt{3},$$

∴ 菱形的面积为 $6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$;

故答案为: $18\sqrt{3}$.

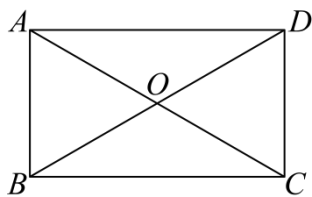
15. 矩形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O , $\angle AOD = 120^\circ$, $AC + AB = 12$, 则 $BD =$ _____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质, 等边三角形的判定和性质, 根据 $\angle AOD = 120^\circ$, 得到 $\angle AOB = 60^\circ$, 进而得到 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 进而得到 $AC = 2AB$, 结合 $AC + AB = 12$, 求出 AC 的长, 根据 $BD = AC$ 即可得出结果.

【详解】 解: ∵ 矩形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O , $\angle AOD = 120^\circ$,



$$\therefore AC = BD, OA = OC = OB = OD, \angle AOB = 60^\circ,$$

∴ $\triangle AOB$ 为等边三角形,

$$\therefore OA = OB = AB,$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

$$\therefore AC + AB = 12,$$

$$\therefore 3AB = 12,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore BD = AC = 2AB = 8;$$

故答案为：8.

16. 已知某汽车油箱中的剩余油量 y (升) 与该汽车行驶里程数 x (千米) 是一次函数关系. 当汽车加满油后, 行驶 100 千米, 油箱中还剩油 138 升; 行驶 150 千米, 油箱中还剩油 132 升. 那么, 当这辆汽车行驶 350 千米时, 油箱中还剩油_____升.

【答案】 108

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的实际应用, 设出函数关系式, 待定系数法求出函数解析式, 再令 $x = 350$, 求出函数值即可.

【详解】 解: 设某汽车油箱中的剩余油量 y (升) 与该汽车行驶里程数 x (千米) 的函数关系式为

$$y = kx + b (k \neq 0),$$

$$\text{由题意, 得: } \begin{cases} 100k + b = 138 \\ 150k + b = 132 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -0.12 \\ b = 150 \end{cases},$$

$$\therefore y = -0.12x + 150,$$

$$\therefore \text{当 } x = 350 \text{ 时, } y = -0.12 \times 350 + 150 = 108,$$

$\therefore$ 当这辆汽车行驶 350 千米时, 油箱中还剩油 108 升;

故答案为: 108.

17. 已知: 线段 AB, BC.

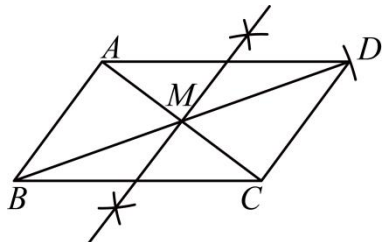
求作: 平行四边形 ABCD.

以下是甲同学的作业.

①联结 AC, 作线段 AC 的垂直平分线, 交 AC 于点 M;

②联结 BM 并延长, 在延长线上取一点 D, 使 MD=MB, 联结 AD, CD. 四边形 ABCD 即为所求平行四边形.

如图, 甲同学的作图依据是: _____.



【答案】 对角线互相平分的四边形是平行四边形

【解析】

【分析】 根据对角线互相平分的四边形是平行四边形解决问题即可.

【详解】由作图可知， $AM=MC$ ， $BM=MD$ ，

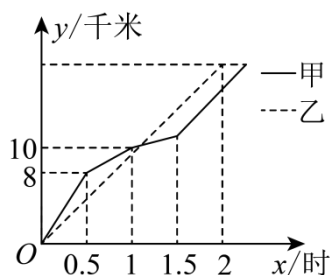
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形)，

故答案为：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图，平行四边形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

18. 在无锡全民健身越野赛中，甲、乙两选手的行程 y (千米)随时间(时)变化的图像(全程)如图所示. 下列四种说法：①起跑后 1 小时内，甲在乙的前面；②第 1 小时两人都跑了 10 千米；

③ 甲比乙先到达终点；④ 两人都跑了 20 千米. 正确的有_____. (填写序号)



【答案】①②④

【解析】

【分析】本题考查利用函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，理解问题的过程，就能够通过图象得到函数问题的相应解决.

根据 $0 \leq x \leq 1$ 时的函数图象判断出①正确；根据 $x=1$ 时的 y 值判断出②正确；根据图象直接判断出③错误；

由图可知，乙是匀速跑的，当 $x=1$ 时， $y=10$ 千米，所以乙跑的速度为 10 千米/时，即可求得乙跑的路程为 20 千米，现由图象可知，甲乙两人跑的路程相等，即可判断出④正确.

【详解】解：①由图可知， $0 \leq x \leq 1$ 时，甲的函数图象在乙的上边，所以，起跑后 1 小时内，甲在乙的前面，故①正确；

② $x=1$ 时，甲、乙都是 $y=10$ 千米，第 1 小时两人都跑了 10 千米，故②正确；

③由图可知， $x=2$ 时，乙到达终点，甲没有到达终点，所以，乙比甲先到达终点，故③错误；

④由图象可知，乙是匀速跑的，当 $x=1$ 时， $y=10$ 千米，所以乙跑的速度为 10 千米/时，则乙跑的路程为 $2 \times 10 = 20$ (千米)，由图象可知，甲乙两人跑的路程相等，所以两人都跑了 20 千米，故④正确；

综上所述，正确的说法是①②④.

故答案为：①②④.

三、解答题 (本大题共 8 题，满分 58 分)

19. 解方程： $\frac{1}{x-4} + \frac{8}{16-x^2} = 1$.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程，去分母，将方程转化为整式方程，求解后检验即可.

【详解】 解：去分母，得： $x + 4 - 8 = x^2 - 16$,

整理得： $x^2 - x - 12 = 0$,

$$\therefore (x-4)(x+3) = 0,$$

解得： $x_1 = 4, x_2 = -3$,

当 $x = 4$ 时， $x - 4 = 0$,

$\therefore x = 4$ 是原方程的增根，舍去；

当 $x = -3$ 时， $x^2 - 16 = -7 \neq 0$,

$\therefore x = -3$ 是原方程的解.

20. 解方程组：
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先将第二个方程变形为 $x - y = 1$ 或 $x - y = -1$ ，再和第一个方程组合得到两个二元一次方程组，再分别解这两个二元一次方程组即可.

【详解】 解：
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \text{ ①} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得 $(x - y)^2 = 1$,

$\therefore x - y = 1$ 或 $x - y = -1$,

与方程①组成新的方程组得：
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

解这两个新方程组，得原方程组的解为：

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查的是二元二次方程组的解法，通过因式分解，将原方程组转化为两个二元一次方程组，从而求解.

21. 解关于 y 的方程: $by^2 - 1 = y^2 + 2$.

【答案】当 $b > 1$ 时, 原方程的解为 $y = \pm \frac{\sqrt{3b-3}}{b-1}$; 当 $b \leq 1$ 时, 原方程无实数解.

【解析】

【分析】把 b 看做常数根据解方程的步骤: 先移项, 再合并同类项, 系数化为 1, 即可得出答案.

【详解】解: 移项得: $by^2 - y^2 = 2 + 1$,

合并同类项得: $(b-1)y^2 = 3$,

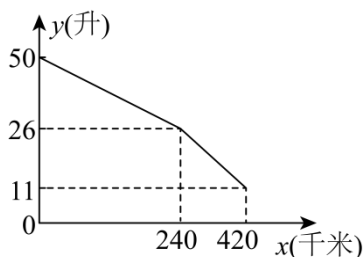
当 $b = 1$ 时, 原方程无解;

当 $b > 1$ 时, 原方程的解为 $y = \pm \frac{\sqrt{3b-3}}{b-1}$;

当 $b < 1$ 时, 原方程无实数解.

【点睛】此题主要考查一元二次方程的求解, 解题的关键是根据题意分类讨论.

22. 如图是某辆汽车加满油后, 油箱剩油量 y (升) 关于已行驶路程 x (千米) 的函数图像 (由两条线段构成).



(1) 根据图像, 当油箱剩油量为 26 升时, 汽车已行驶的路程为 _____ 千米; 当 $0 \leq x \leq 240$ 时, 消耗一升油汽车能行驶的路程为 _____ 千米.

(2) 当 $240 \leq x \leq 420$ 时, 求 y 关于 x 的函数表达式, 并计算当汽车已行驶 300 千米时油箱的剩油量.

【答案】(1) 240; 10

(2) $y = -\frac{1}{12}x + 46$, 21 升

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的实际应用, 熟练掌握待定系数法求关系式是解题的关键.

(1) 根据图象可得汽车已行驶的路程, 根据 50 升时行程为 0 千米和 26 升时程为 240 千米可得汽车的耗油量.

(2) 利用待定系数法得到函数关系式, 再把 $x = 300$ 代入可剩余量.

【小问 1 详解】

由图象可得, 当油箱剩油量为 26 升时汽车已行驶的路程为 240 千米,

$$\therefore 240 \div (50 - 26) = 10 \text{ (千米/升)},$$

$\therefore$ 消耗一升油汽车能行驶的路程为 10 千米.

【小问 2 详解】

设 $y = kx + b$, 把 $(240, 26)$ 和 $(420, 11)$ 代入可得,

$$\begin{cases} 240k + b = 26 \\ 420k + b = 11 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{12}, \\ b = 46 \end{cases},$$

$$\therefore \text{函数表达式为 } y = -\frac{1}{12}x + 46,$$

$$\text{当 } x = 300 \text{ 时, } y = -\frac{1}{12} \times 300 + 46 = 21.$$

答: y 关于 x 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{12}x + 46$, 当汽车已行驶 300 千米时油箱的剩油量是 21 升.

23. 某口罩厂计划在一定时间内生产 240 万个口罩, 后因为防控需要, 不但需要增产 50%, 而且要提前 4 天完成任务. 经测算, 每天需要多生产 8 万个口罩. 问原计划每天生产多少万个口罩?

【答案】原计划每天生产 10 万个口罩

【解析】

【分析】本题考查分式方程的实际应用, 设原计划每天生产 x 万个口罩, 根据题意, 列出分式方程进行求解即可, 找准等量关系, 正确的列出方程, 是解题的关键.

【详解】解: 设原计划每天生产 x 万个口罩, 则现在每天生产 $(x + 8)$ 万个口罩, 由题意, 得:

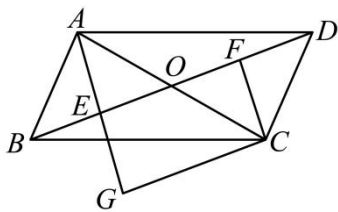
$$\frac{240}{x} = \frac{240 \times (1 + 50\%)}{x + 8} + 4,$$

解得: $x = 10$ 或 $x = -48$ (舍去);

经检验: $x = 10$ 是原方程的解;

答: 原计划每天生产 10 万个口罩.

24. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 、 F 分别为 OB 、 OD 的中点, 延长 AE 至点 G , 使 $EG = AE$, 连接 GC 、 CF .



(1) 求证: $AE \parallel CF$;

(2) 当 $AC = 2AB$ 时, 求证: 四边形 $EGCF$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质可知 $OB = OD$, 根据中点可求 $EO = FO$, 根据 SAS 可证 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$, 根据全等三角形的性质可得 $\angle AEO = \angle CFO$, 由平行线的判定定理可求解;

(2) 先证明四边形 $EGCF$ 是平行四边形, 再证 $AE \perp OB$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OB = OD, OA = OC,$$

$\because$ 点 E 、 F 分别为 OB 、 OD 的中点,

$$\therefore EO = \frac{1}{2} OB, FO = \frac{1}{2} OD,$$

$$\therefore EO = FO,$$

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} AO = CO \\ \angle AOE = \angle COF \\ EO = FO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AEO = \angle CFO,$$

$$\therefore AE \parallel CF;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because EA = EG, OA = OC$,

$\therefore EO$ 是 $\triangle AGC$ 的中位线,

$$\therefore EO \parallel GC,$$

$$\because AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是平行四边形,

$$\because AC = 2AB, AC = 2AO,$$

$$\therefore AB = AO,$$

$\therefore E$ 是 OB 的中点,

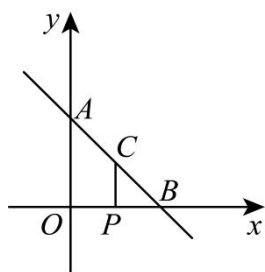
$$\therefore AE \perp OB,$$

$$\therefore \angle OEG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是矩形.

【点评】 本题考查了矩形的判定, 平行四边形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 三角形的中位线定理, 正确的识别图形是解题的关键.

25. 已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像经过 $A(0, 2)$ 、 $B(2, 0)$, 点 C 是线段 AB 的中点, $CP \parallel OA$ 交 x 轴于点 P , 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' , 把线段 CC' 以点 C 为旋转中心, 顺时针旋转 45° , 点 C' 的对应点为点 D .



(1) 求一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的解析式.

(2) 求点 D 的坐标.

(3) 若点 C 、 C' 、 D 、 M 为顶点的四边形是平行四边形, 且 CC' 是平行四边形的一条边, 直接写出点 M 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x + 2$

(2) $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

(3) $(1 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$ 或 $(1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与图形结合的综合问题, 解题的关键是通过题干作出所对应图形求解.

(1) 待定系数法求解.

(2) 作出旋转后的图象, 通过勾股定理求解.

(3) 讨论 D 所在位置分别求解.

【小问 1 详解】

由一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过 $A(0, 2)$ 、 $B(2, 0)$,

$$\begin{cases} b=2 \\ 2k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为: $y = -x + 2$.

【小问 2 详解】

$\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$\therefore CP \parallel y$ 轴, $CP \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(1,0)$, 点 C 横坐标为 1, 把 $x=1$ 代入 $y = -x + 2$ 得 $y = 1$,

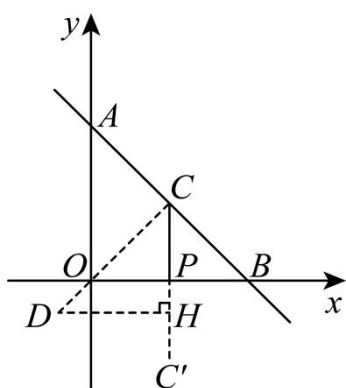
$\therefore$ 点 C 坐标为 $(1,1)$,

$\because$ 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' ,

$\therefore C'$ 坐标为 $(1,-1)$, $CC' = 2$,

CC' 以点 C 为旋转中心, 顺时针旋转 45° , 得 $\angle DCC' = 45^\circ$, $CD = CC' = 2$,

作 $DH \perp CC'$ 于点 H , $DH = CH$,



$$\therefore DH^2 + CH^2 = CD^2,$$

$$\therefore DH = CH = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

【小问 3 详解】

$\because CC'$ 是平行四边形的一条边,

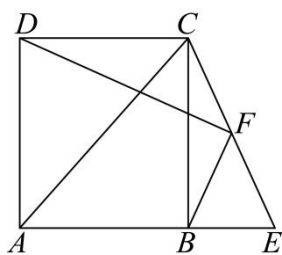
$\therefore CC' \parallel DM$ 且 $CC' = DM = 2$,

$\because CC' \parallel y$ 轴,

$\therefore DM \parallel y$ 轴,

$\therefore M$ 点的坐标为 $(1-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$ 或 $(1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$.

26. 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, 点 E 在 AB 的延长线上, 且 $AE=AC$, 连接 CE , 取 CE 的中点 F , 连接 BF 、 DF .



(1) 求证: $DF \perp BF$;

(2) 设 $AC=x$, $DF=y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 当 $DF=2BF$ 时, 求 BC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2} (x > 4)$

(3) $\frac{16}{3}$

【解析】

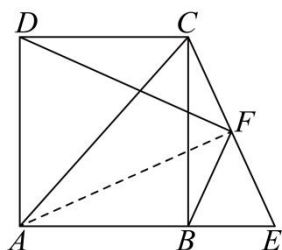
【分析】(1) 连接 AF , 证明 $\triangle AFB \cong \triangle DFC$, 进而推出 $\angle DFB = \angle AFC$, 即可得证;

(2) 连接 BD , 利用矩形的性质, 和勾股定理进行求解即可;

(3) 根据 $DF=2BF$, 推出 $DF=CE$, 利用 (2) 中的结论, 列出无理方程, 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 连接 AF ,



$\because AC=AE$, F 为 CE 的中点,

$\therefore AF \perp CE$,

$\therefore \angle AFC = 90^\circ$,

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore AB=CD$, $\angle DCB = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBE = 90^\circ$,

$\because F$ 为 CE 的中点,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}CE = CF,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle BCF = \angle ABC + \angle CBF, \text{ 即: } \angle DCF = \angle ABF,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DFC,$$

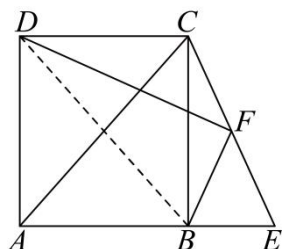
$$\therefore \angle AFB = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle AFB + \angle DFA = \angle DFC + \angle DFA = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore DF \perp BF;$$

【小问 2 详解】

连接 BD , 则 $BD = AC = AE = x$,



$$\because AB = 4,$$

$$\therefore BE = AE - AB = x - 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 16},$$

$$\text{在 Rt}\triangle EBC \text{ 中, } CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{x^2 - 16 + (x - 4)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x},$$

$$\text{由 (1) 知: } BF = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{2x^2 - 8x}}{2}, \quad \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2},$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2},$$

$$\because BE = x - 4 > 0,$$

$$\therefore x > 4;$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2} (x > 4)$$

【小问 3 详解】

当 $DF = 2BF$ 时,

$$\therefore CE = 2BF,$$

$$\therefore DF = CE,$$

$$\text{由 (2) 知: } DF = \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2}, \quad CE = \sqrt{2x^2 - 8x}, \quad BC = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2x^2 + 8x}}{2} = \sqrt{2x^2 - 8x},$$

$$\text{解得: } x = \frac{20}{3} \text{ 或 } x = 0 \text{ (不合题意, 舍去);}$$

$$\text{经检验 } x = \frac{20}{3} \text{ 是原方程的解,}$$

$$\therefore BC = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 16} = \frac{16}{3}.$$

【点睛】 本题考查矩形的性质，斜边上的中线，全等三角形的判定和性质，勾股定理，利用函数关系式表示变量之间的关系，解无理方程等知识点，综合性强，难度较大，计算量大，属于压轴题，掌握相关知识点，正确的计算，是解题的关键.