

2021-2022 学年上海市浦东新区新竹园中学八年级（下）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 5 小题，共 15.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 在一次函数 $y = (k-2)x - \sqrt{2}$ 中， y 随 x 的增大而增大，则 k 的可能值为（ ）

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数的性质求出 k 的取值范围即可求解.

【详解】解：∵ $y = (k-2)x - \sqrt{2}$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore k-2 > 0,$$

$$\therefore k > 2,$$

故选 D

【点睛】本题考查了一次函数的图象与性质，对于一次函数 $y = kx + b$ (k 为常数， $k \neq 0$)，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小.

2. 方程组 $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x^2+x+y-3=0 \end{cases}$ 的解的情况是（ ）

- A. 有两组相同的实数解 B. 有两组不同的实数解
C. 没有实数解 D. 不能确定

【答案】B

【解析】

【分析】首先运用代入法，将方程组进行变形，然后利用根的判别式即可判定.

【详解】 $\begin{cases} x+y=0 \text{ ①} \\ 2x^2+x+y-3=0 \text{ ②} \end{cases}$

将①代入②，得 $2x^2 - 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 4 \times 2 \times 3 = 24 > 0$$

故方程有两组不同的实数解，

故选：B.

【点睛】此题主要考查二元二次方程组的求解，熟练掌握，即可解题.

3. 某校学生暑假乘汽车到外地参加夏令营活动，目的地距学校 120km，一部分学生乘慢车先行，出发 1h 后，另一部分学生乘快车前往，结果他们同时到达目的地. 已知快车速度是慢车速度的 1.5 倍，如果设慢车的速

度为 $x\text{km/h}$ ，那么可列方程为（ ）

A. $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.5x} = 1$

B. $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.5+x} = 1$

C. $\frac{120}{1.5x} - \frac{120}{x} = 1$

D. $\frac{120}{x+1.5} - \frac{120}{x} = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据时间来列等量关系. 因为他们同时到达目的地, 所以此题等量关系为: 慢车所用时间-快车所用时间=1.

【详解】设慢车的速度为 $x\text{km/h}$, 慢车所用时间为 $\frac{120}{x}$, 快车所用时间为 $\frac{120}{1.5x}$,
可列方程: $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.5x} = 1$.

故选: A.

【点睛】本题考查了列分式方程解应用题, 找到关键描述语, 找到等量关系是解决问题的关键.

4. 等腰梯形的腰长为 10cm , 周长为 44cm , 则它的中位线长为 () cm

A. 34

B. 17

C. 12

D. 24

【答案】C

【解析】

【分析】等腰梯形的周长等于四边之和, 那么据此可求上下底之和, 而梯形中位线等于上下底和的一半, 又可求中位线.

【详解】解: $\because$ 上底 + 下底 + 两腰 = 周长,

$$\therefore (\text{上底} + \text{下底}) + 2 \times 10 = 44,$$

$$\therefore \text{上底} + \text{下底} = 24,$$

$$\therefore \text{中位线} = \frac{1}{2} \times 24 = 12.$$

故选: C.

【点睛】本题利用了梯形的周长公式以及梯形中位线定理. 解题的关键是牢记中位线与两底的数量关系.

5. 已知四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 O 是对角线 AC 与 BD 的交点. 下列四种说法: ①向量 $\overrightarrow{AO}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是相等的向量; ②向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是互为相反的向量; ③向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的向量; ④向量 $\overrightarrow{BO}$ 与向量 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量. 其中正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

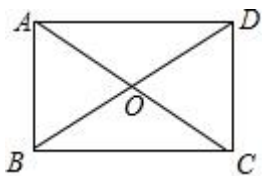
D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】利用矩形的性质，相等向量，平行向量的定义一一判断即可.

【详解】解：如图：



$\therefore$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore AB=CD, AB \parallel CD, OA=OC, OB=OD,$

$\therefore$ ①向量 $\overrightarrow{AO}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是相等的向量，正确.

②向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是互为相反的向量，正确.

③向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的向量；错误.

④向量 $\overrightarrow{BO}$ 与向量 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量. 正确.

故选：C.

【点睛】本题考查平面向量，矩形的性质等知识，长度相等且方向相同的两个向量叫做相等向量，平行向量也叫共线向量，是方向相同或相反的非零向量.

二、填空题（本大题共 12 小题，共 36.0 分）

6. 已知函数 $y = x + a$ 与 $y = -2x + b$ 的交点坐标为 $(-2, 1)$ ，则方程组 $\begin{cases} x - y = -a \\ 2x + y = b \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

【解析】

【分析】根据两个一次函数图象的交点坐标为两个函数解析式组成的方程组的解，即可得出答案.

【详解】解：方程组 $\begin{cases} x - y = -a \\ 2x + y = b \end{cases}$ 可变为： $\begin{cases} y = x + a \\ y = -2x + b \end{cases}$,

$\therefore$ 函数 $y = x + a$ 与 $y = -2x + b$ 的交点坐标为 $(-2, 1)$,

$\therefore$ 方程组的解为： $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$,

故答案为： $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了一次函数与二元一次方程（组），解题的关键是掌握两个一次函数图象的交点坐标与两个函数解析式组成的方程组的解之间的关系.

7. 若分式方程 $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{m}{x-3}$ 无解，则 m 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程，根据分式方程无解得到 $x=3$ ，代入整式方程即可求出 m 的值.

【详解】 解：去分母得： $x - 2x + 6 = m$,

将 $x=3$ 代入得： $-3 + 6 = m$,

则 $m=3$.

故答案为： 3.

【点睛】 本题考查了分式方程无解的情况，熟练的掌握分式方程无解成立的条件是解题的关键.

8. 已知一次函数 $y=kx+4(k \neq 0)$ 的图象与两坐标轴围成的三角形面积为 4，则 $k=$ _____.

【答案】 2 或 -2 或 2

【解析】

【分析】 由函数解析式确定与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{4}{k}, 0)$ ，与 y 轴的交点坐标为 $(0, 4)$ ，然后根据函数图象与坐标轴的面积 4 列出方程求解即可.

【详解】 解： $\because$ 在 $y=kx+4(k \neq 0)$ 中，

当 $x=0$ 时， $y=4$ ；

当 $y=0$ 时， $x=-\frac{4}{k}$ ，

$\therefore y=kx+4$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{4}{k}, 0)$ ，与 y 轴的交点坐标为 $(0, 4)$ ，

由题意可得： $\frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{4}{k} \right| \cdot 4 = 4$ ，

解得： $k=\pm 2$.

故答案为： 2 或 -2.

【点睛】 题目主要考查一次函数解析式的确定及其与坐标轴围成面积的计算方法，理解题意，得出方程是解题关键.

9. 方程 $\sqrt{x+3} = x+1$ 的根是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】首先把方程两边同时平方，去掉根号，然后解一元二次方程，最后检验即可求解.

【详解】解：两边平方得， $x+3=x^2+2x+1$ ，

移项得： $x^2+x-2=0$ ，

即 $(x+2)(x-1)=0$ ，

解得 $x_1=1$ ， $x_2=-2$ ，

经检验， $x=-2$ 是增根，

$\therefore$ 方程的解为 $x=1$.

故答案为：1.

【点睛】此题主要考查了解无理方程的方法，解题的关键是利用平方把方程的根号去掉，化无理方程为有理方程.

10. 如果在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AC}$ 为_____. (用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示)

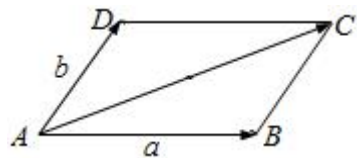
【答案】 $\vec{a}+\vec{b}$

【解析】

【分析】根据平面向量的平行四边形法则即可写出答案.

【详解】如图， $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$.

故答案为： $\vec{a}+\vec{b}$.



【点睛】本题考查了平面向量加法的平行四边形法则、平行四边形的性质.

11. 若一个多边形的内角和等于 720° ，则从这个多边形的一个顶点引出对角线_____条.

【答案】3

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式求出边数，从而求出这个多边形从一个顶点出发引出的对角线的条数.

【详解】设多边形的边数是 n ，则

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ,$$

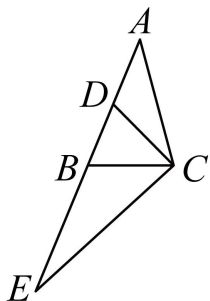
解得 $n=6$,

∴从这个多边形的一个顶点引出对角线是： $6 - 3 = 3$ （条），

故答案为 3.

【点睛】 本题考查多边形的对角线，多边形内角与外角，关键是要先根据多边形的内角和公式求出边数.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = BE$ ， D 是 AB 的中点. 若 $CD = a$ ， 则 CE 等于_____.

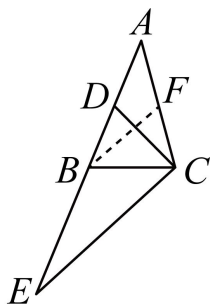


【答案】 $2a$

【解析】

【分析】取 AC 的中点 F ，连接 BF ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACD$ (SAS)，根据全等三角形的性质得 $BF = CD = a$ ，由三角形的中位线定理即可得 $CE = 2BF = 2a$.

【详解】解：取 AC 的中点 F ，连接 BF ，



$$\therefore AF = CF = \frac{1}{2} AC ,$$

∵ D 是 AB 的中点，

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB ,$$

∵ $AB = AC$ ，

$$\therefore AD = AF ,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle A = \angle A , \\ AF = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD (SAS) ,$$

$$\therefore BF = CD = a,$$

$$\therefore AB = BE,$$

$\therefore B$ 是 AE 的中点,

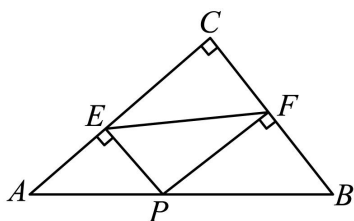
$$\therefore BF = \frac{1}{2}CE,$$

$$\therefore CE = 2BF = 2a,$$

故答案为: $2a$.

【点睛】 本题考查全等三角形的判定和性质, 三角形的中位线定理, 熟练掌握全等三角形的判定和性质以及三角形的中位线定理是解题的关键.

13. 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, P 为 AB 上一动点 (不与 A 、 B 重合), 作 $PE \perp AC$ 于点 E , $PF \perp BC$ 于点 F , 连接 EF , 则 EF 的最小值是_____.

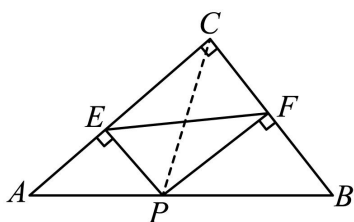


【答案】 2.4

【解析】

【分析】 连接 CP , 由勾股定理求出 AB 的长, 再由矩形的判定与性质求出 $EF = CP$, 然后根据垂线段最短可得 $CP \perp AB$ 时, 线段 EF 的值最小, 再根据面积法求解即可.

【详解】 解: 如图, 连接 CP .



$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AC = 3, \quad BC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because PE \perp AC, \quad PF \perp BC, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CFPE$ 是矩形,

$$\therefore EF = CP,$$

由垂线段最短可得 $CP \perp AB$ 时, 线段 EF 的值最小,

$$\text{此时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot CP,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \cdot CP,$$

解得 $CP = 2.4$.

故答案为: 2.4.

【点睛】本题考查了勾股定理, 矩形的判定与性质, 垂线段最短, 以及面积法求线段的长, 熟练掌握矩形的判定与性质是解答本题的关键.

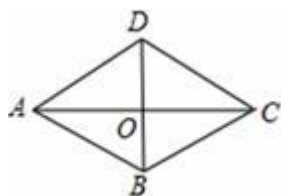
14. 菱形的周长是 20, 一条对角线的长为 6, 则它的面积为_____.

【答案】24

【解析】

【分析】先画出图形, 根据菱形的性质可得 $AD = 5$, $DO = 3$, 根据勾股定理可求得 AO 的长, 从而得到 AC 的长, 再根据菱形的面积公式即可求得结果.

【详解】解: 如图:



由题意得 $AD = 20 \div 4 = 5$, $BD = 6$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$

$\therefore DO = 3$, $AC \perp BD$

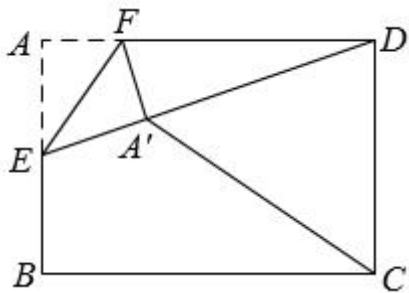
$$\therefore AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = 4$$

$$\therefore AC = 2AO = 8$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24.$$

【点睛】本题考查了菱形的性质, 勾股定理, 解题的关键是掌握对角线互相垂直且平分, 菱形的四条边相等; 同时熟记菱形的面积等于对角线乘积的一半.

15. 如图, 已知在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 AD 边上的一个动点, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在直线翻折, 得到 $\triangle A'EF$, 连接 $A'C$, $A'D$, 则当 $\triangle A'DC$ 是以 $A'D$ 为腰的等腰三角形时, AF 的长是_____.

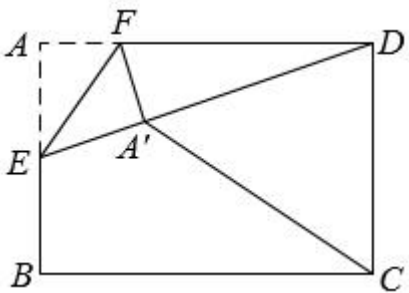


【答案】 1 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 存在三种情况：当 $A'D = DC$ 时，连接 ED ，利用勾股定理可以求得 ED 的长，可判断 E, A', D 三点共线，根据勾股定理即可求解；当 $A'D = A'C$ 时，可以证得四边形 $AEA'F$ 是正方形，即可求解；当 $A'C = DC$ 时，连接 EC, FC ，证明 E, A', C 三点共线，再用勾股定理，即可求解。

【详解】 解：①当 $A'D = DC$ 时，连接 ED ，如图，



$\because$ 点 E 是 AB 的中点， $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ ， 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AE = 1$ ， $AD = BC = 2\sqrt{2}$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，

由勾股定理可得， $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = 3$ ，

$\therefore$ 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在直线翻折，得到 $\triangle A'EF$ ，

$\therefore A'E = AE = 1$ ，

$\therefore A'D = DC = AB = 2$ ，

$\therefore DE = 3 = A'E + A'D$ ，

$\therefore E, A', D$ 三点共线，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FA'E = \angle FA'D = 90^\circ$ ，

设 $AF = x$ ， 则 $A'F = x$ ， $FD = 2\sqrt{2} - x$ ，

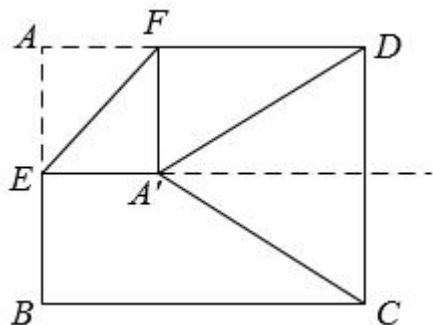
在 $Rt\triangle FA'D$ 中, $A'D^2 + A'F^2 = DF^2$,

$$\therefore 2^2 + x^2 = (2\sqrt{2} - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

②当 $A'D = A'C$ 时, 如图,



$$\therefore A'D = A'C,$$

$\therefore$ 点 A' 在线段 CD 的垂直平分线上,

$\therefore$ 点 A' 在线段 AB 的垂直平分线上,

$\therefore$ 点 E 是 AB 的中点,

$\therefore EA'$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore \angle AEA' = 90^\circ,$$

$\therefore$ 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在直线翻折, 得到 $\triangle A'EF$,

$$\therefore \angle A = \angle EA'F = 90^\circ, AF = FA',$$

$\therefore$ 四边形 $AEA'F$ 是正方形,

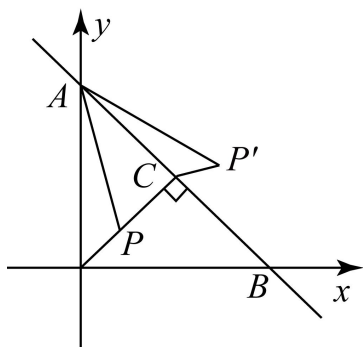
$$\therefore AF = AE = \frac{1}{2}AB = 1;$$

综上所述, AF 的长为 1 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为: 1 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】 本题考查矩形中的翻折问题, 涉及矩形的性质、等腰三角形的性质、正方形的判定和性质、勾股定理, 分类讨论思想的运用是解题的关键.

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x + 4$ 与坐标轴交于 A ， B 两点， $OC \perp AB$ 于点 C ， P 是线段 OC 上的一个动点，连接 AP ，将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 45° ，得到线段 AP' ，连接 CP' ，则线段 CP' 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】由点 P 的运动确定 P' 的运动轨迹是在与 x 轴垂直的一段线段 MN ，当线段 CP' 与 MN 垂直时，线段 CP' 的值最小.

【详解】解：由已知可得 $A(0, 4)B(4, 0)$ ，

$\therefore$ 三角形 OAB 是等腰直角三角形，

$\therefore OC \perp AB$ ，

$\therefore C(2, 2)$ ，

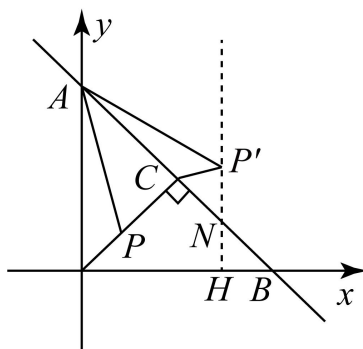
又 $\therefore P$ 是线段 OC 上动点，将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 45° ，

$\therefore P$ 在线段 OC 上运动，所以 P' 的运动轨迹也是线段，

当 P 在 O 点时和 P 在 C 点时分别确定 P' 的起点与终点，

$\therefore P'$ 的运动轨迹是在与 x 轴垂直的一段线段 MN ，

$\therefore$ 当线段 CP' 与 MN 垂直时，线段 CP' 的值最小，



在 $\triangle AOB$ 中， $AO = AN = 4$ ， $AB = 4\sqrt{2}$ ，

$$\therefore NB = 4\sqrt{2} - 4,$$

又 $\because Rt\triangle HBN$ 是等腰直角三角形,

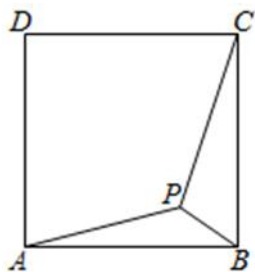
$$\therefore HB = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CP' = OB - BH - 2 = 4 - (4 - 2\sqrt{2}) - 2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

故答案为 $2\sqrt{2} - 2$.

【点睛】此题考查了直角三角形的性质，一次函数图象上点的坐标特点，动点运动轨迹的判断，垂线段最短，熟练掌握一次函数图象的性质是解题的关键.

17. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点，且点 P 到点 A 、 B 、 C 的距离分别为 $2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 4 ，则正方形 $ABCD$ 的面积为_____.

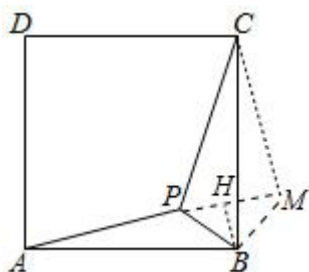


【答案】 $14 + 4\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3} + 14$

【解析】

【分析】将 $\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CBM$ ，连接 PM ，过点 B 作 $BH \perp PM$ 于 H 。由旋转的性质可知 $BP = BM = \sqrt{2}$ ， $\angle PBM = 90^\circ$ ，进而根据等腰直角三角形的性质得到 $PM = \sqrt{2}PB = 2$ ，再根据勾股定理得到 $\angle PMC = 90^\circ$ ，再由直角三角形斜边上的中线得到 $BH = PH = HM = 1$ ，最后根据勾股定理求解即可。

【详解】解：如图，将 $\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CBM$ ，连接 PM ，过点 B 作 $BH \perp PM$ 于 H 。



由旋转的性质可知 $BP = BM = \sqrt{2}$ ， $\angle PBM = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BPM = \angle BMP = 45^\circ,$$

$$\therefore PM = \sqrt{2}PB = 2,$$

$$\because PC = 4, \quad PA = CM = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PC^2 = CM^2 + PM^2,$$

$$\therefore \angle PMC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BPM = \angle BMP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CMB = \angle APB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle BPM = 180^\circ,$$

$$\therefore A, P, M \text{ 共线},$$

$$\because BH \perp PM,$$

$$\therefore PH = HM,$$

$$\therefore BH = PH = HM = 1,$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore AB^2 = AH^2 + BH^2 = (2\sqrt{3} + 1)^2 + 1^2 = 14 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{正方形 } ABCD \text{ 的面积为 } 14 + 4\sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为 } 14 + 4\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质和判定，勾股定理，直角三角形斜边上的中线，正确构造旋转图形是解题的关键.

三、计算题 (本大题共 2 小题, 共 10.0 分)

18. 解方程: $\frac{x^2+3}{x+2} - \frac{4x+8}{x^2+3} = 3.$

【答案】 $x = 5$ 或 $x = -1$

【解析】

【分析】 设 $\frac{x^2+3}{x+2} = a$, 得到 $a - \frac{4}{a} = 3$, 求出 a 的值, 进而再求 x 的值.

【详解】 解: 设 $\frac{x^2+3}{x+2} = a$, 方程变形得: $a - \frac{4}{a} = 3$,

去分母得: $a^2 - 3a - 4 = 0$, 即 $(a-4)(a+1) = 0$,

解得: $a = 4$ 或 $a = -1$,

$$\therefore \frac{x^2+3}{x+2} = 4 \text{ 或 } \frac{x^2+3}{x+2} = -1,$$

整理得: $x^2 - 4x - 5 = 0$ 或 $x^2 + x + 5 = 0$,

对于 $x^2 - 4x - 5 = 0$,

$$(x-5)(x+1) = 0,$$

解得: $x = 5$ 或 $x = -1$;

对于 $x^2 + x + 5 = 0$,

$$\therefore \Delta = 1 - 20 = -19 < 0,$$

$\therefore$ 无解,

经检验 $x = 5$ 或 $x = -1$ 是分式方程的解.

【点睛】 本题考查了换元法解分式方程, 掌握换元法的解题方法是解答本题的关键.

19. 解方程: $\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x} = 2$.

【答案】 $x = 7$

【解析】

【分析】 先把 $\sqrt{8-x}$ 移到方程的右边, 两边平方, 化简后再次平方, 然后解一元二次方程, 最后检验即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{8-x}$

两边平方化简, $x - 5 = 2\sqrt{8-x}$

两边平方化简 $x^2 - 6x - 7 = 0$.

解之得 $x_1 = -1$, $x_2 = 7$

检验: 将 $x = -1$ 代入原方程, 左边 $= -2 \neq$ 右边, 舍去.

所以原方程的解为 $x = 7$.

【点睛】 本题考查了解无理方程, 以及解一元二次方程, 通过平方把无理方程化为有理方程是解答本题的关键.

四、解答题 (本大题共 4 小题, 共 34.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} \frac{7}{2x+y} - \frac{8}{x-2y} = 6 \\ \frac{5}{2x+y} + \frac{4}{x-2y} = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 设 $\frac{1}{2x+y}=a$, $\frac{1}{x-2y}=b$, 解关于 a 、 b 的方程组求出的 a 、 b 值, 再列出关于 x 和 y 的方程组求解即可.

【详解】 解: 设 $\frac{1}{2x+y}=a$, $\frac{1}{x-2y}=b$,

则原方程组化为:
$$\begin{cases} 7a-8b=6 \\ 5a+4b=\frac{11}{2} \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{8} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=8 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

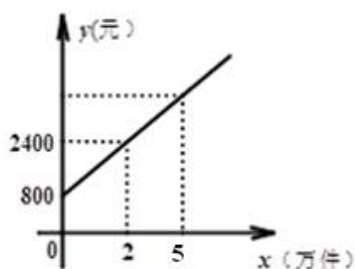
经检验 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 是原方程组的解,

所以原方程组的解是
$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$
.

【点睛】 本题考查换元法解分式方程组, 以及二元一次方程组的解法, 掌握换元法是解答本题的关键.

21. 某公司市场营销部的某营销员的个人月收入与该营销员每月的销售量成一次函数关系, 其图像如图所示. 根据图像提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 求营销员的个人月收入 y 元与该营销员每月的销售量 x 万件($x \geq 0$)之间的函数关系式;
- (2) 若两个月内该营销员的销售量从 2 万件猛增到 5 万件, 月收入两个月大幅度增长, 且连续两个月的月收入的增长率是相同的, 试求这个增长率 ($\sqrt{2} \approx 1.414$, 保留到百分位).



【答案】(1) $y = 800x + 800$; (2) 这个增长率为 41%

【解析】

【分析】(1) 设 $y = kx + b$, 将 $(0, 800)$ 与 $(2, 2400)$ 代入, 利用待定系数法即可求解;

(2) 设这个增长率为 a , 先根据 (1) 中所求的解析式求出 $a=5$ 时对应的 y 值, 再由两个月内该营销员的销售量从 2 万件猛增到 5 万件, 且连续两个月的月收入的增长率是相同的列出方程, 解方程即可.

【详解】(1) 设函数关系式为 $y = kx + b$

将 $(0, 800)$ 、 $(2, 2400)$ 代入得到:

$$\begin{cases} b = 800 \\ 2k + b = 2400 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 800 \\ b = 800 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数关系式为 $y = 800x + 800$

故营销员的个人月收入 y 元与该营销员每月的销售量 x 万件 ($x \geq 0$) 之间的函数关系式为 $y = 800x + 800$;

(2) 当 $x=5$ 时, $y = 800 \times 5 + 800 = 4800$

设这个增长率为 a , 由题意有 $2400(1+a)^2 = 4800$

解得 $a_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41, a_2 = -1 - \sqrt{2}$ (舍)

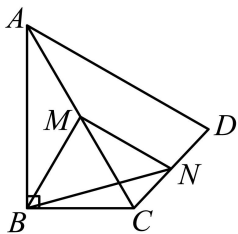
答: 这个增长率为 41%

【点睛】本题考查了一次函数的应用和一元二次方程的应用, 解题的关键是: 利用待定系数法求出一次函数的解析式及找到等量关系准确的列出方程.

22. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = AD$, M , N 分别为 AC , CD 的中点, 连接 BM , MN , BN .

(1) 求证: $BM = MN$;

(2) $\angle BAD = 60^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, $AC = 2$, 求 BN 的长.



【答案】(1) 证明见解析；(2) $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 在 $\triangle CAD$ 中，由中位线定理得到 $MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AD$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 M 是 AC 的中点，故 $BM = \frac{1}{2} AC$ ，即可得到结论；

(2) 由 $\angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，得到 $\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$ ，由 (1) 知， $BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC$ ，得到 $\angle BMC = 60^\circ$ 。由平行线性得到 $\angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$ ，故 $\angle BMN = 90^\circ$ ，得到 $BN^2 = BM^2 + MN^2$ ，再由 $MN = BM = 1$ ，得到 BN 的长。

【详解】(1) 在 $\triangle CAD$ 中， $\because M、N$ 分别是 $AC、CD$ 的中点，

$\therefore MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because M$ 是 AC 的中点，

$\therefore BM = \frac{1}{2} AC$ ，

又 $\because AC = AD$ ，

$\therefore MN = BM$ ；

(2) $\because \angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$ ，

由 (1) 知， $BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC$ ，

$\therefore \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAM = 60^\circ$ 。

$\because MN \parallel AD$ ，

$\therefore \angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BMN = \angle BMC + \angle NMC = 90^\circ$ ，

$\therefore BN^2 = BM^2 + MN^2$ ，

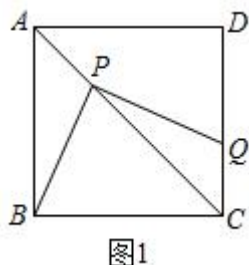
而由 (1) 知， $MN = BM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

$\therefore BN = \sqrt{2}$ 。

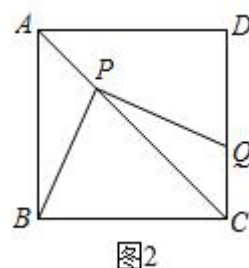
23. 操作：将一把三角尺放在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 上，并使它的直角顶点 P 在对角线 AC 上滑动，直角的一边始终经过点 B ，另一边与射线 DC 相交于点 Q 。

探究：设 A, P 两点间的距离为 x 。

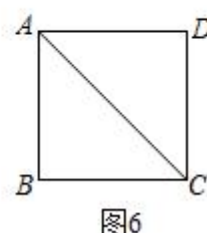
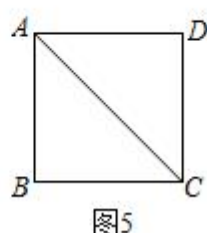
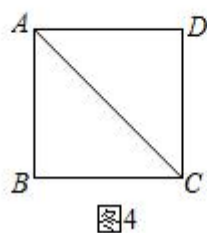
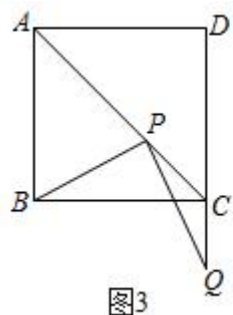
(1) 点 Q 在 CD 边上时，线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系？试证明你观察得到的结论（如图 1）；



(2) 点 Q 在边 CD 上时设四边形 $PBCQ$ 的面积为 y ，求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出自变量的取值范围（如图 2）；



(3) 点 P 在线段 AC 上滑动时， $\triangle PCQ$ 是否可能成为等腰三角形？如果可能，指出所有能使 $\triangle PCQ$ 成为等腰三角形的点 Q 的位置，并直接写出相应的 x 的值；如果不可能，试说明理由（如图 3）。(图 4、图 5、图 6 的形状、大小相同，图 4 供操作、实验用，图 5 和图 6 备用)。



【答案】 (1) $PQ = PB$ ，见解析； (2) $y = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1$ ($0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$)； (3) $\triangle PCQ$ 可能成为等腰三

角形， Q 与点 D 重合时， $x=0$ ； Q 在边 DC 的延长线上时， $x=1$

【解析】

【分析】 (1) 过点 P 作 $MN \parallel BC$ ，分别交 AB 于点 M ，交 CD 于点 N ，则四边形 $AMND$ 和四边形 $BCNM$

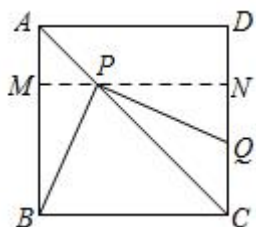
都是矩形, $\triangle AMP$ 和 $\triangle CNP$ 都是等腰三角形, 然后利用等腰三角形的性质和等量代换证明 $\triangle QNP \cong \triangle PMB$, 从而可证 $PQ = PB$;

(2) 设 $AP = x$, 然后分别表示出 BM, CQ, PN 的长度, 然后利用 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BC \cdot BM$ 和 $S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot PN$ 求出各自的面积, 最后利用 $S_{\text{四边形}PBCQ} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCQ}$ 即可求解;

(3) 分三种情况: 点 Q 与点 D 重合; 当点 Q 在边 DC 的延长线上; Q 与点 C 重合, 分别进行讨论即可得出答案.

【详解】(1) $PQ = PB$, 理由如下:

过点 P 作 $MN \parallel BC$, 分别交 AB 于点 M , 交 CD 于点 N , 则四边形 $AMND$ 和四边形 $BCNM$ 都是矩形,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BAC = \angle ACD = 45^\circ$.

$\because MN \parallel BC, AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AMP = \angle ABC = 90^\circ, MN \parallel AD$,

$\therefore \angle PNC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AMP$ 和 $\triangle CNP$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore NP = NC = MB$.

$\because \angle BPQ = 90^\circ$,

$\therefore \angle QPN + \angle BPM = 90^\circ$.

又 $\because \angle PBM + \angle BPM = 90^\circ$,

$\therefore \angle QPN = \angle PBM$.

$\because \angle QNP = \angle PMB = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle QNP \cong \triangle PMB,$$

$$\therefore PQ = PB;$$

(2) 由 (1) 知 $\triangle QNP \cong \triangle PMB$, 则 $NQ = MP$,

$$\therefore AP = x,$$

$$\therefore AM = MP = NQ = DN = \frac{\sqrt{2}}{2}x, BM = PN = CN = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore CQ = CD - DQ = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}x = 1 - \sqrt{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BC \cdot BM = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x,$$

$$S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot PN = \frac{1}{2} \times (1 - \sqrt{2}x) \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}x^2,$$

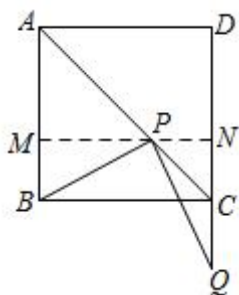
$$\therefore S_{\text{四边形}PBCQ} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1,$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 \quad (0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2});$$

(3) $\triangle PCQ$ 可能成为等腰三角形, 理由如下:

① 当点 P 与点 A 重合, 点 Q 与点 D 重合, 这时 $PQ = QC$, $\triangle PCQ$ 是等腰三角形, 此时 $x = 0$;

② 当点 Q 在边 DC 的延长线上, 且 $CP = CQ$ 时, $\triangle PCQ$ 是等腰三角形, 如图,



$$\text{此时 } QN = PM = \frac{\sqrt{2}}{2}x, CP = \sqrt{2} - x, CN = \frac{\sqrt{2}}{2}CP = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore CQ = QN - CN = \frac{\sqrt{2}}{2}x - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \sqrt{2}x - 1,$$

当 $\sqrt{2} - x = \sqrt{2}x - 1$ 时, 解得 $x = 1$;

③ $BP \perp AC$ ，Q 与点 C 重合， $PQ = CP$ ， $\triangle PCQ$ 不存在；

综上所述，当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时， $\triangle PCQ$ 为等腰三角形.

【点睛】 本题主要考查正方形的性质，全等三角形的判定及性质和等腰三角形的定义，掌握全等三角形的判定及性质并分情况讨论是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能