

2023 学年第二学期八年级学业质量调研

数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含四个大题, 共 27 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出解答的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列函数中是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = x^2$

C. $y = 1$

D. $y = x + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】利用一次函数的定义即可解答; 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数是解题的关键.

【详解】解: A、 $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数, 故本选项错误;

B、 $y = x^2$ 是二次函数, 故本选项错误;

C、 $y = 1$ 是常数函数, 故本选项错误;

D、 $y = x + 1$ 是一次函数, 故本选项正确.

故选: D.

2. 一次函数 $y = -2x + 4$ 经过的象限是 ()

A. 第一、二、三象限

B. 第一、三、四象限

C. 第一、二、四象限

D. 第二、三、四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象性质，根据 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，当 $k < 0$ ， $b > 0$ 时，经过第一、二、四象限，据此即可作答。

【详解】解：∵一次函数 $y = -2x + 4$ 的 $-2 < 0, 4 > 0$

∴该函数经过第一、二、四象限，

故选：C

3. 如果一次函数 $y = (m+1)x + 2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > -1$

B. $m < -1$

C. $m > 1$

D. $m < 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的增减性，对于一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时 y 随 x 的增大而增大，当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，据此求解即可。

【详解】解：∵一次函数 $y = (m+1)x + 2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，

∴ $m+1 < 0$ ，

∴ $m < -1$ ，

故选：B.

4. 下列方程没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 4x + 3 = 0$

B. $\sqrt{x+1} = 2$

C. $x^3 + 8 = 0$

D. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的判别式以及分式方程、二次根式有意义， $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，分母为 0，被开方数为负数，即没有实数根，据此逐项分析，即可作答。

【详解】解：A、 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的 $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ ，有实数根，故该选项是不符合题意的；

B、∵ $\sqrt{x+1} = 2$ ，则 $x = 3$ ，故该选项是不符合题意的；

C、∵ $x^3 + 8 = 0$ ，∴ $x^3 = -8$ ， $x = -2$ ，故该选项是不符合题意的；

D、∵ $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 0$ ，∴ $x+1 = 0$ ，此时分母为 0，故原分式方程没有实数根，故该选项是符合题意的；

故选：D

5. 如果一个多边形的边数由 4 增加到 n (n 为整数, 且 $n > 4$), 那么它的外角和的度数 ()

- A. 不变 B. 增加 C. 减少 D. 不能确定

【答案】A

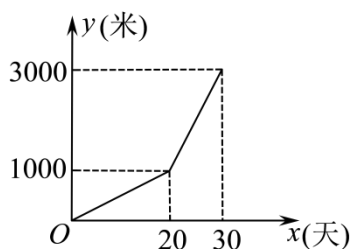
【解析】

【分析】此题考查多边形内角和与外角和, 注意多边形外角和等于 360° . 利用多边形的外角和特征即可解决问题.

【详解】解: 因为多边形外角和为 360° , 所以外角和的度数是不变的.

故选: A.

6. 已知: 如图, 甲、乙两个工程队合作修一条长为 3000 米的公路, 假设甲、乙两个工程队的工作效率是一定的. 甲队单独做了 20 天后, 乙队加入合作完成剩下的全部工程. 完成的工程量 y (米) 与工程时间 x (天) 的关系如图所示. 下列结论中错误的是 ()



- A. 完成该工程一共用了 30 天 B. 乙工程队在该工程中一共工作了 10 天
C. 甲工程队每天修路 50 米 D. 乙工程队每天修路 200 米

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了函数图象获取信息以及一元一次方程的工程问题, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 根据甲队单独做了 20 天, 完成 1000 米, 得出甲工程队每天修路 50 米, 因为甲、乙两个工程队的工作效率是一定的, 则列式 $3000 - 1000 = 10 \times (x + 50)$, 得出乙工程队每天修路 150 米, 结合图象性质, 即可作答.

【详解】解: 从图象可知, 工程时间 $x = 30$, 所对应的是 $y = 3000$

$\therefore$ 完成该工程一共用了 30 天, 故 A 是正确的;

$\therefore 30 - 20 = 10$ (天)

$\therefore$ 乙工程队在该工程中一共工作了 10 天, 故 B 是正确的;

$\therefore$ 甲队单独做了 20 天, 完成 1000 米,

$$\therefore 1000 \div 20 = 50$$

即甲工程队每天修路 50 米；故 C 是正确的；

设乙工程队每天修路 x 米，

$$\text{则 } 3000 - 1000 = 10 \times (x + 50)$$

$$\text{解得 } x = 150$$

$\therefore$ 乙工程队每天修路 150 米，故 D 是错误的

故选：D

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 直线 $y = -4x - 1$ 的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数的截距，根据一次函数的截距即为一次函数与 y 轴交点的纵坐标进行求解即可.

【详解】 解：在 $y = -4x - 1$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，

$\therefore$ 直线 $y = -4x - 1$ 的截距是 -1，

故答案为： -1.

8. 直角坐标系内的点 $(2, 2)$ _____（填“在”或“不在”）一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图像上.

【答案】 在

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图像上点的坐标特点，一次函数图像上的点一定满足其函数解析式，因此求出当 $x = 2$ 时， y 的值即可得到答案.

【详解】 解：在 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 中，当 $x = 2$ 时， $y = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$ ，

$\therefore$ 直角坐标系内的点 $(2, 2)$ 在一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图像上，

故答案为： 在.

9. 把直线 $y = 2x + 3$ 向下平移 2 个单位长度，得到直线的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x + 1$

【解析】

【分析】 根据“平移 k 值不变及上移加，下移减”可得出平移后直线的解析式.

【详解】解：将直线 $y=2x+3$ 向下平移 2 个单位，得到直线 $y=2x+3-2$ ，即 $y=2x+1$ 。

故答案为 $y=2x+1$ 。

【点睛】本题考查了一次函数图象与几何变换，掌握“左加右减，上加下减”的平移规律是解题的关键。

10. 一次函数 $y=-3x+1$ 中，当 $y<4$ 时， x 的取值范围是_____。

【答案】 $x>-1$

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数与一元一次不等式之间的关系，先求出当 $y=-3x+1=4$ 时， $x=-1$ ，再根据 y 随 x 增大而减小，即可得到答案。

【详解】解：在 $y=-3x+1$ 中，当 $y=-3x+1=4$ 时， $x=-1$ ，

$\because -3<0$ ，

$\therefore y$ 随 x 增大而减小，

$\therefore$ 当 $y<4$ 时， x 的取值范围是 $x>-1$ ，

故答案为： $x>-1$ 。

11. 关于 x 的方程 $ax=2(a\neq 0)$ 的解是_____。

【答案】 $x=\frac{2}{a}$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次方程，直接把方程两边同时除以 a 即可得到答案。

【详解】解：解方程 $ax=2(a\neq 0)$ 得 $x=\frac{2}{a}$ ，

故答案为： $x=\frac{2}{a}$ 。

12. 用换元法解方程 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{x}{x+1} - 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x+1} = y$ ，那么原方程可变形为_____。

【答案】 $y^2 - y - 2 = 0$

【解析】

【分析】本题考查用换元法整理分式方程的能力，用换元法解分式方程，可简化计算过程，减少计算量，是一种常用的方法。设 $\frac{x}{x+1} = y$ ，关键是明确方程各分式与 y 的关系，将 y 代入即可。

【详解】解： $\because \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{x}{x+1} - 2 = 0$ ，设 $\frac{x}{x+1} = y$

根据题中所设可得原方程变形为 $y^2 - y - 2 = 0$.

故答案为 $y^2 - y - 2 = 0$.

13. 将方程 $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ 化成两个一次方程是_____和_____.

【答案】 ①. $x + 3y = 0$ ②. $x - y = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查高次方程的知识点，解答本题的关键是熟练运用因式分解，此题比较简单. 首先把方程的前两项构成完全平方式，然后进行因式分解把二次方程化成两个一元一次方程即可.

【详解】 解： $\because x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$,

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 = 0,$$

$$\therefore (x + y)^2 - (2y)^2 = 0,$$

$$\therefore (x + y + 2y)(x + y - 2y) = 0,$$

$$\therefore (x + 3y)(x - y) = 0$$

解得： $x + 3y = 0$, $x - y = 0$,

故答案为： $x + 3y = 0$, $x - y = 0$.

14. 某数 x 与 12 的和的正平方根恰好等于它的相反数，根据题意，可列出方程是_____.

【答案】 $\sqrt{x+12} = -x$

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式表达式，根据某数 x 与 12 的和的正平方根，得 $\sqrt{x+12}$ ；再根据它的相反数，得 $-x$ ，即可作答.

【详解】 解： $\because$ 某数 x 与 12 的和的正平方根恰好等于它的相反数，

$$\therefore \sqrt{x+12} = -x$$

故答案为： $\sqrt{x+12} = -x$

15. 如果一个一次函数满足以下两个条件：(1) 函数值 y 随着 x 的值增大而减小；(2) 图像经过点 $(-2, -4)$. 那么这个一次函数的解析式可以是_____ (写出一个即可).

【答案】 $y = -x - 6$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的性质，对应一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时，函数值 y 随着 x 的值增大而增大，当 $k < 0$ 时，函数值 y 随着 x 的值增大而减小，据此可得一次项系数为负数，再根据图像经过 $(-2, -4)$ 写出符合题意得一次函数解析式即可.

【详解】 解： $\because$ 函数值 y 随着 x 的值增大而减小，

$\therefore$ 一次项系数为负数，

$\because$ 图像经过点 $(-2, -4)$ ，

$\therefore$ 符合题意得一次函数的解析式可以是 $y = -x - 6$ ，

故答案为： $y = -x - 6$ (答案不唯一).

16. 一个多边形从一个顶点出发有七条对角线，那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1440

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和定理，多边形对角线有 7 条，据此求出多边形的边数，再根据多边形的内角和定理即可求解，掌握多边形的内角和定理是解题的关键.

【详解】 解： 设这个多边形是 n 边形，由题意得：

$$n - 3 = 7,$$

$$\therefore n = 10,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和} = (10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ,$$

故答案为： 1440.

17. 解分式方程 $\frac{k}{(x+1)(x-1)} - 1 = \frac{1}{x+1}$ 时，产生增根 $x = -1$ ，那么 k 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据分式方程解的情况求参数，先把原方程去分母得到 $k - (x+1)(x-1) = x-1$ ，再根据题意得到 $x = -1$ 是方程 $k - (x+1)(x-1) = x-1$ 的解，据此把 $x = -1$ 代入方程

$k - (x+1)(x-1) = x-1$ 中求出 k 的值即可得到答案.

【详解】 解： $\frac{k}{(x+1)(x-1)} - 1 = \frac{1}{x+1}$

去分母得: $k - (x+1)(x-1) = x-1$,

$\therefore$ 解分式方程 $\frac{k}{(x+1)(x-1)} - 1 = \frac{1}{x+1}$ 时, 产生增根 $x = -1$,

$\therefore x = -1$ 是方程 $k - (x+1)(x-1) = x-1$ 的解,

$\therefore k = -1 - 1 = -2$,

故答案为: -2 .

18. 一次函数 $y = 4x + b$, 当 $m \leq x \leq n$ 时, 函数值 y 的范围是 $c \leq y \leq d$, 那么代数式 $\frac{d-c}{n-m}$ 的值是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】本题考查了代数式求值, 一次函数的图象与性质, 当 $x = m$ 时, $4m + b = c$, 当 $x = n$ 时, $4n + b = d$, 可得 $d - c = 4(n - m)$ 即可求解, 掌握整体代入思想是解题的关键.

【详解】解: 由题意可知, 当 $x = m$ 时, $4m + b = c$ ①,

当 $x = n$ 时, $4n + b = d$ ②,

② - ① 得: $4n - 4m = d - c$,

$\therefore d - c = 4(n - m)$,

$\therefore \frac{d-c}{n-m} = \frac{4(n-m)}{n-m} = 4$,

故答案为: 4.

三、解答题 (本大题共 9 题, 满分 64 分)

19. 解关于 x 的方程: $3x^2 - b = 0 (b > 0)$.

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{3b}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3b}}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程, 先把常数项移到方程右边, 再把二次项系数化为 1, 最后开平方即可得到答案.

【详解】解: $\because 3x^2 - b = 0 (b > 0)$,

$\therefore 3x^2 = b (b > 0)$,

$$\therefore x^2 = \frac{b}{3} (b > 0),$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{\sqrt{3b}}{3}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3b}}{3};$$

$$20. \text{ 解方程: } \frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{6}{9-x^2}.$$

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，解一元二次方程，先把分式方程去分母化为整式方程，再根据解一元二次方程的方法解方程，最后检验即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: } \frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{6}{9-x^2}$$

$$\text{去分母得: } x(x-3) - (x+3) = -6,$$

$$\text{去括号得: } x^2 - 3x - x - 3 = -6,$$

$$\text{移项得: } x^2 - 3x - x - 3 + 6 = 0,$$

$$\text{合并同类项得: } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 1 \text{ 或 } x = 3,$$

$$\text{检验, 当 } x = 1 \text{ 时, } (x+3)(x-3) \neq 0; \text{ 当 } x = 3 \text{ 时, } (x+3)(x-3) = 0,$$

$\therefore x = 1$ 是原方程的解, $x = 3$ 不是方程的解.

$$21. \text{ 解方程: } \sqrt{x+3} - 1 = x.$$

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程，先把 1 移到方程右边，再把方程两边同时平方，进而解一元二次方程得到 $x = 1$ 或 $x = -2$ ，再由 $x+1 \geq 0$ ，得到 $x \geq -1$ ，则 $x = 1$.

$$\text{【详解】 解: } \because \sqrt{x+3} - 1 = x,$$

$$\therefore \sqrt{x+3} = x+1,$$

$$\therefore x+3 = (x+1)^2,$$

$$\therefore x+3 = x^2 + 2x + 1,$$

$$\therefore x^2 + x - 2 = 0,$$

解得 $x=1$ 或 $x=-2$,

$$\because x+1 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -1,$$

$$\therefore x=1.$$

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-xy-y^2=1 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程, 先由①得到 $x=y+1$ ③, 再把 $x=y+1$ ③代入②得到关于 y 的方程, 解方程求出 y 的值, 进而求出 x 的值即可得到答案.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x-y=1 \text{①} \\ x^2-xy-y^2=1 \text{②} \end{cases}$$

由①得: $x=y+1$ ③,

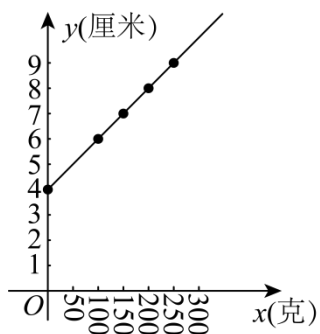
把③代入②得: $(y+1)^2 - y(y+1) - y^2 = 1$, 即 $y^2 - y = 0$, 解得 $y=0$ 或 $y=1$,

当 $y=0$ 时, $x=y+1=1$, 当 $y=1$ 时, $x=y+1=2$,

$\therefore$ 方程组的解为
$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

23. 一个数学兴趣小组准备探究弹簧的全长与所挂砝码重量之间的关系. 他们准备了一根弹簧和直尺, 进行了多次实验, 并将每次实验的结果填入绘制的表格内, 然后再将表格内的每一对数作为点的坐标描在直角坐标平面内 (如下表、图), 最后用光滑的曲线把描出的这些点联结起来, 发现这些点在同一直线上. 由此他们得出弹簧的全长与所挂砝码重量之间是一次函数的关系.

砝码重量 x (克)	0	100	150	200	250
弹簧全长 y (厘米)	4	6	7	8	9



(1) 求这条直线的表达式 (不写定义域);

(2) 如果这根弹簧被所挂砝码刚好完全拉直时的长度是 12 厘米, 求这时所挂砝码是多少克?

【答案】 (1) $y = 0.02x + 4$

(2) 这时所挂砝码是 400 克

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的实际应用:

(1) 设出函数解析式, 利用待定系数法求解即可;

(2) 根据 (1) 所求求出 $y = 12$ 时, x 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 设这条直线的解析式为 $y = kx + b$,

把 $(0, 4), (100, 6)$ 代入 $y = kx + b$ 中得:
$$\begin{cases} 100k + b = 6 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = 0.02 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 这条直线的解析式为 $y = 0.02x + 4$;

【小问 2 详解】

解: 在 $y = 0.02x + 4$ 中, 当 $y = 0.02x + 4 = 12$ 时, $x = 400$,

$\therefore$ 这时所挂砝码是 400 克.

24. 已知多边形的每个内角都是 135° , 求这个多边形的边数?

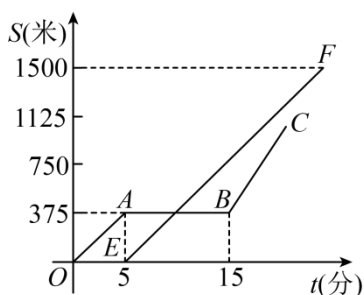
【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的外角和等知识. 先求出每一外角的度数是 45° , 再根据多边形的外角和为 360° 进行计算即可得解.

【详解】解：∵多边形的所有内角都是 135° ，
 ∴多边形每一个外角的度数是 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ，
 ∴多边形的外角和为 360° ，
 ∴多边形的边数为 $360^\circ \div 45^\circ = 8$ ，
 即这个多边形是八边形.

25. 甲、乙两位同学一次晨跑的路程 S (米) 与时间 t (分) 的关系如图所示. 已知他们从同一地点出发, 跑步的路线和总路程 (1500 米) 也相同, 其中甲先出发, 途中由于鞋子问题耽误了一些时间. 图中 $OA \parallel EF$. 根据图形所提供的信息, 回答下列问题:



- (1) 甲在途中耽误了_____分钟;
- (2) 乙跑步的速度是_____米/分;
- (3) 如果甲想与乙同时到达终点, 那么他在解决鞋子问题后速度应提高到_____米/分.

【答案】(1) 10 (2) 75

(3) 112.5

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数和速度的相关知识解答即可.

- (1) 根据函数图像的数据可以得到答案;
- (2) 先求出 OA 的表达式, 再利用 $OA \parallel EF$ 求出 EF 的 k 值, 求出 EF 的表达式, 从而求出 F 点的坐标, 最后利用速度 = 路程 $\div$ 时间求出速度即可;
- (3) 分别求出甲到达终点要用的时间和需要走的路程, 最后用速度 = 路程 $\div$ 时间求出速度即可.

【小问 1 详解】

解: 由图像可知甲是从 $O-A-B-C$, 所以 $A-B$ 是耽误的时间,
 $15 - 5 = 10$ (分钟)

【小问 2 详解】

由图像可知 OA 是正比例函数,

∴设 OA 的表达式是 $y = kx$,

将点 $A(5,375)$ 代入 $y=kx$ 得: $375=5k$, 解得 $k=75$,

$$\therefore y=75x,$$

$$\because OA \parallel EF$$

$$\therefore k_{EF}=k_{OA}=75$$

$$\therefore \text{设 } EF \text{ 的表达式为 } y=75x+b,$$

将点 $(5,0)$ 代入 $y=75x+b$ 得: $0=5 \times 75+b$, 解得 $b=-375$,

$$\therefore y=75x-375,$$

当 $y=1500$ 时, 代入 $y=75x-375$ 解得 $x=25$,

$$\therefore F(25,1500),$$

$$\therefore \text{乙的速度为: } 1500 \div (25-5) = 1500 \div 20 = 75 \text{ (米/分)}$$

【小问3 详解】

$$25-15=10 \text{ (分钟)}$$

$$1500-375=1125 \text{ (米)}$$

$$1125 \div 10 = 112.5 \text{ (米/分)}$$

26. 家原计划生产 1000 套产品. 根据发展需求, 要在原计划基础上增加 20% 总量, 并且比原计划提前 5 天完成. 经预测, 现在平均每天的生产量比原计划增加 20 套. 求原计划每天生产产品多少套?

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的应用, 根据题意列出分式方程和检验是解答本题的关键. 根据题意列出分式方程求解即可.

【详解】 解: 设原计划每天生产 x 套, 则实际每天 $(x+20)$ 套.

$$\text{根据题意, 可列方程 } \frac{1000}{x} - \frac{1000 \times (1+20\%)}{x+20} = 5.$$

$$\text{两边同时乘以 } x(x+20) \text{ 得 } 1000(x+20) - 1200x = 5x(x+20),$$

$$\text{再整理, 得 } x^2 + 60x - 4000 = 0.$$

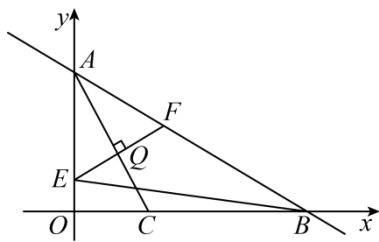
$$\text{解得 } x_1 = -100, x_2 = 40.$$

经检验, $x_1 = -100$, $x_2 = 40$. 都是原方程的解, 由题意得结果不能为负数,

所以取 $x = 40$.

答: 原计划每天生产 40 套.

27. 如图: 已知直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B , AC 是 $\triangle OAB$ 的角平分线, 点 E 是线段 OA 上的一个动点 (不与点 O , A 重合), 过点 E 作 $EF \perp AC$, 交线段 AC 于点 Q , 交线段 AB 于点 F , 设 $AE = x$, $CQ = y$.



- (1) 分别求点 A 和点 B 的坐标;
- (2) 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 连接 BE , 如果 EF 垂直平分 AC , 那么直线 AB 上是否存在点 P , 使得 $\triangle ACP$ 的面积等于 $\triangle OBE$ 的面积 2 倍? 若存在, 求出此时点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $A(0, 2)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$;

(2) $y = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ($0 < x < 2$);

(3) 存在, 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 4)$.

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象与性质, 求一次函数解析式, 勾股定理, 角平分线的性质等知识, 掌握相关知识是解题的关键.

- (1) 利用一次函数与 x 轴、 y 轴的交点坐标即可求解;
- (2) 根据勾股定理求出 AB 的长, 解得 $OC = \frac{1}{2}AC$, 再进一步求出 $AQ = \frac{\sqrt{3}}{2}AE = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 即可求解;
- (3) 连接 CE 、 CF , 先证明四边形 $AECF$ 为菱形, 再通过勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 与 y 轴交于 A , 与 x 轴交于 B ,

$\therefore$ 令 $x=0$, 则 $y=2$,

$$\therefore A(0,2)$$

令 $y=0$, 则 $x=2\sqrt{3}$,

$$\therefore B(2\sqrt{3},0).$$

【小问2详解】

解: $\because A(0,2), B(2\sqrt{3},0)$,

$$\therefore OA=2, OB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=4,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB=90^\circ$, $AO=\frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \angle ABO=30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB=90^\circ-\angle ABO=60^\circ,$$

$\because AC$ 平分 $\angle OAB$,

$$\therefore \angle OAC=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle OAB=30^\circ,$$

$$\therefore OC=\frac{1}{2}AC,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\angle AOC=90^\circ$, $OC^2+OA^2=AC^2$,

$$\therefore \left(\frac{1}{2}AC\right)^2+2^2=AC^2,$$

$$\therefore AC=\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } AC=\frac{-4\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OC=\frac{1}{2}AC=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$\because EF \perp AC$,

$$\therefore \angle AQE=90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEQ$ 中, $\angle AQE=90^\circ$, $\angle EAQ=30^\circ$, $AE=x$

$$\therefore EQ=\frac{1}{2}AE=\frac{x}{2},$$

$$AQ = \sqrt{AE^2 - EQ^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AE = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore y = CQ = AC - AQ = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad (0 < x < 2),$$

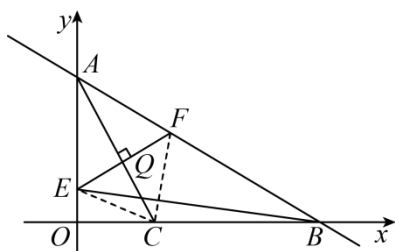
E 在 OA 上运动与 O 重合时 $AE=0$ ，与 A 重合则 $AE=2$ ，

$\therefore E$ 与 O 、 A 不重合,

$$\therefore 0 < x < 2.$$

【小问 3 详解】

解：连接 CE 、 CF ，如图：



: EF 垂直平分 AC ,

$$\therefore AE = CE, \quad AF = CF \angle AQE = \angle AQF = 90^\circ,$$

又 $\because AC$ 平分 $\angle OAB$,

$$\therefore \angle OAC = \angle BAC,$$

又 $\because QA = QA$,

$$\therefore \triangle AEQ \cong \triangle AFQ,$$

$$\therefore AE = AF,$$

$$\therefore AE = AF = CE = CF,$$

∴ 四边形 $AECF$ 为菱形,

$\therefore AE = x$, 则 $CE = x, OE = AO - AE = 2 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle OEC$ 中, $\angle EOC = 90^\circ$, $OE^2 + OC^2 = EC^2$,

$$\therefore (2-x)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x^2,$$

$$\therefore x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OE = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} \times OB \times OE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

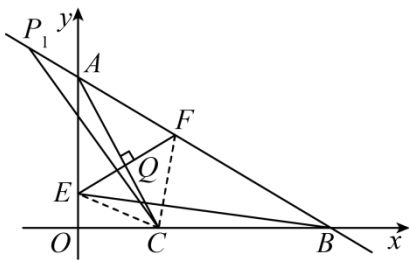
$$\therefore 2S_{\triangle OBE} = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times CB \times OA = \frac{1}{2} \times (OB - OC) \times OA = \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

且 P 在 AB 上

$$\therefore \text{当 } P \text{ 与 } B \text{ 重合时, } S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACB} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2S_{\triangle OBE}$$

如图:



当 P 在 A 上方与 P_1 重合时,

$$S_{\triangle ACP_1} = 2S_{\triangle OBE} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad BC = OB - OC = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$S_{\triangle ACP_1} = S_{\triangle BCP_1} - S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} BC \cdot y_{P_1} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times y_{P_1} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore y_{P_1} = 4,$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 = 4, \quad x_{P_1} = -2\sqrt{3},$$

$$\therefore P(-2\sqrt{3}, 4),$$

综上, P 为 $(2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 4)$.