

2020~2021 学年上海长宁区上海市天山第二中学

八年级下学期期中数学试卷

一、选择题 (共六题: 共 18 分)

1. 以下函数中, 属于一次函数的是 ()

A. $y = -\frac{x}{2}$

B. $y=kx+b$ (k, b 是常数)

C. $y=c$ (c 为常数)

D. $y = \frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数的定义进行判断即可.

【详解】解: A. $y = -\frac{x}{2}$, 是一次函数, 故本选项正确;

B. $y=kx+b$ (k, b 是常数), 当 $k=0$ 时, 没有自变量 x , 不是一次函数, 故本选项错误;

C. $y=c$ (c 为常数), 没有自变量, 不是一次函数, 故本选项错误;

D. $y = \frac{2}{x}$ 自变量为分母, 不是一次函数, 故本选项错误.

故选 A.

【点睛】本题主要考查一次函数的定义, 一般地, 形如 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的函数, 叫做一次函数.

2. 下列方程中, 在实数范围内有解的是 ()

A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

B. $\sqrt{x-1} + 2 = 0$

C. $x^3 + 1 = 0$

D. $x^2 - x + 1 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据分式方程分母不能为零判定 A, 根据二次根式的性质判断 B, 根据立方根求解 C, 根据根的判别式判定 D.

【详解】解: A. 求解方程得 $x=1$, 经检验 $x=1$ 为分式方程的增根, 故原方程无解;

B. $\sqrt{x-1} + 2 = 0$, 得 $\sqrt{x-1} = -2$, 故原方程无解;

C. 求解得 $x = -1$, 故原方程有解;

D. $x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, 故原方程无解.

故选 C.

【点睛】本题主要考查分式方程无解, 二次根式的性质, 一元二次方程根的判别式等, 解此题的关键在于

熟练掌握其知识点.

3. 下列方程组中, 属于二元二次方程组的为 ()

A. $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x=2 \\ xy=4 \end{cases}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元一次方程组的定义对 A 进行判断; 根据整式方程组的定义对 B、C 进行判断; 根据二元二次方程组的定义对 D 进行判断.

【详解】解: A、两个方程都是二元一次方程, 所组成的方程组为二元一次方程组, 所以 A 选项不正确;
B、两个方程都是分式方程, 所组成的方程组为分式方程组, 所以 B 选项不正确;
C、有一个方程是无理方程, 所组成的方程组不是二元二次方程组, 所以 C 选项不正确;
D、有一个方程是二元二次方程, 另一个是一元一次方程, 所组成的方程组为二元二次方程组, 所以 D 选项正确.
故选 D.

【点睛】本题考查二元二次方程组: 有两个二元二次方程或一个二元二次方程, 一个一元一次方程所组成的方程组称为二元二次方程组.

4. 如果函数 $y=kx+1$ 的图象不经过第三象限, 那么 k 的取值范围是 ()

A. $k > 0$ B. $k \geq 0$ C. $k < 0$ D. $k \leq 0$

【答案】D

【解析】

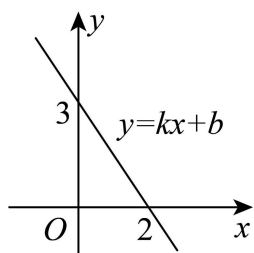
【分析】先判断出函数图象经过第一、二、四象限, 则说明 x 的系数不大于 0, 由此即可确定题目 k 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 函数 $y=kx+1$ 的图象不经过第三象限,
 $\therefore$ 当 $k=0$ 时, $y=1$, 直线经过第一、二象限
当 $k < 0$ 时, 一次函数 $y=kx+1$ 的图象经过第一、二、四象限,
 $\therefore k \leq 0$.
故选: D.

【点睛】本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y=kx+b$

所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限; $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限; $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交; $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

5. 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(2, 0)$ 与 $(0, 3)$, 则关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是()



A. $x < 2$

B. $x > 2$

C. $x < 3$

D. $x > 3$

【答案】A

【解析】

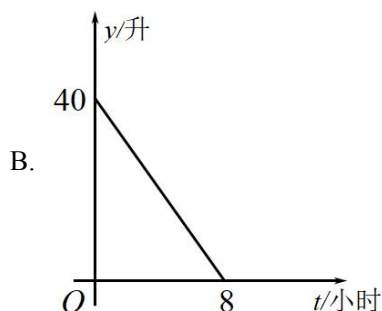
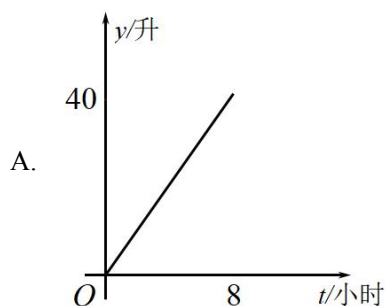
【分析】首先利用图象可找到图象在 x 轴上方时 $x < 2$, 进而得到关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x < 2$.

【详解】解: 由题意可得: 一次函数 $y = kx + b$ 中, $y > 0$ 时, 图象在 x 轴上方, $x < 2$,
则关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x < 2$,

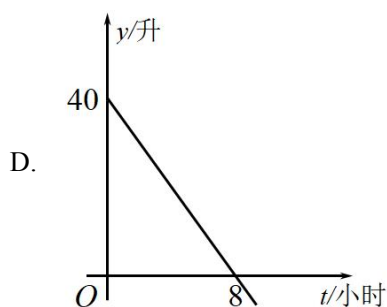
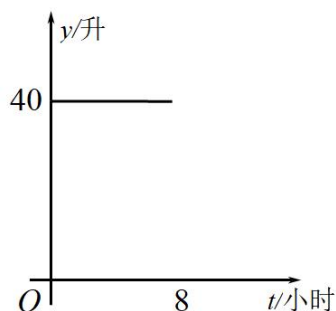
故选 A.

【点睛】此题主要考查了一次函数与一元一次不等式, 关键是掌握数形结合思想. 认真体会一次函数与一元一次不等式之间的内在联系.

6. 汽车开始行驶时, 油箱内有油 40 升, 如果每小时耗油 5 升, 则油箱内余油量 y (升) 与行驶时间 t (时) 的函数关系用图象表示应为下图中的 ()



C.



【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，列出函数关系式，即可求解.

【详解】解：根据题意得： $y = -5t + 40 (0 \leq t \leq 8)$,

$\therefore$ 该图象为一次函数图象的一部分.

故选：B

【点睛】本题主要考查了一函数的图象，根据题意，列出函数关系式是解题的关键.

二、填空题 (共十二题: 共 24 分)

7. 直线 $y = -4x - 2$ 在 y 轴上的截距是_____

【答案】 -2

【解析】

【分析】求在 y 轴上的截距，求与 y 轴的交点坐标即可.

【详解】解：在 $y = -4x - 2$ 中，令 $x = 0$ ，可得 $y = -2$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -4x - 2$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -4x - 2$ 的图象在 y 轴上的截距为 -2 ,

故答案为 -2 .

【点睛】本题主要考查函数与坐标轴的交点，掌握截距与坐标的关系是解题的关键.

8. 已知一次函数 $f(x) = 3x - 1$ 满足 $f(a) = 5$ ，则 $a =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】将 $x = a$ 代入函数解析式进行计算即可.

【详解】解： $\because f(a) = 5$,

$$\therefore f(a) = 3a - 1 = 5,$$

解得 $a = 2$.

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征，直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y = kx + b$.

9. 若将直线 $y = 2x + 3$ 平移，使其经过点 $(1, -1)$ ，则平移后所得的直线表达式为_____.

【答案】 $y = 2x - 3$

【解析】

【分析】根据平移不改变 k 的值可设平移后直线的解析式为 $y = 2x + b$ ，然后将点 $(1, -1)$ 代入即可得出直

线的函数解析式.

【详解】解: 设平移后直线的解析式为 $y = 2x + b$.

把 $(1, -1)$ 代入直线解析式得 $-1 = 2 \times 1 + b$,

解得 $b = -3$.

所以平移后直线的解析式为 $y = 2x - 3$.

故答案为: $y = 2x - 3$.

【点睛】 本题考查一次函数图象与几何变换及待定系数法求函数的解析式, 掌握直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 平移时 k 的值不变是解题的关键.

10. 关于 x 的方程 $ax = -6$ 有解的条件是_____.

【答案】 $a \neq 0$

【解析】

【分析】 根据一元一次方程的解的定义得出即可.

【详解】 解: 关于 x 的方程 $ax = -6$ 有解的条件是 $a \neq 0$,

故答案为 $a \neq 0$.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的解的定义, 能熟记一元一次方程的解的定义的内容是解此题的关键.

11. 二项方程 $\frac{1}{2}x^4 = 8$ 的实数根是_____.

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 先求 x^2 的解, 再求实数根即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}x^4 = 8$.

$$\therefore \frac{1}{2}(x^2)^2 = 8.$$

$$\therefore x^2 = 4 \text{ (负值舍去).}$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = -2.$$

故答案为: $x_1 = 2, x_2 = -2$.

【点睛】 本题考查高次方程的解法, 关键在于降次, 利用开平方即可降次是关键.

12. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = -\frac{7}{2}$ 时, 如果设 $y = \frac{x^2-1}{x}$, 那么原方程可化成关于 y 的整式方程, 这个

整式方程是_____.

【答案】 $2y^2+7y+6=0$

【解析】

【分析】 根据题意，用含 y 的式子表示出方程并整理方程即可

【详解】 解： 设 $y=\frac{x^2-1}{x}$ ， 则 $\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{y}$

所以原方程可变形为： $\frac{3}{y}+y=-\frac{7}{2}$ ，

方程的两边都乘以 $2y$ ， 得

$$6+2y^2=-7y$$

$$\text{即 } 2y^2+7y+6=0$$

故答案为 $2y^2+7y+6=0$

【点睛】 本题考查了换元法．换元法解方程一般四步：设元(未知数)，换元，解元，还元.

13. 请将方程 $(x-3)\sqrt{x-7}=0$ 的解写在后面的横线上：_____

【答案】 $x=7$

【解析】

【分析】 先根据已知方程得出 $x-3=0$ 或 $x-7=0$ ， 求出 x 的值， 再进行检验即可.

【详解】 解： $(x-3)\sqrt{x-7}=0$ ，

$$x-3=0 \text{ 或 } x-7=0,$$

$$x=3 \text{ 或 } x=7,$$

检验： 当 $x=3$ 时， $\sqrt{x-7}$ 无意义， 所以 $x=3$ 不是原方程的解；

$x=7$ 是原方程的解，

故答案为 $x=7$.

【点睛】 本题考查了解无理方程，能把无理方程变成有理方程是解此题的关键，注意解无理方程一定要进行检验.

14. 一种药品经过两次降价，药价从原来每盒 60 元降至到现在 48.6 元，设平均每次降价的百分率为 x ，则列方程为_____.

【答案】 $60(1-x)^2=48.6$

【解析】

【详解】由题意得 $60(1-x)^2 = 48.6$.

【点睛】平均增长率（降低）百分率是 x ，增长（降低）一次，一般形式为 $a(1 \pm x) = b$ ；

增长（降低）两次，一般形式为 $a(1 \pm x)^2 = b$ ；增长（降低） n 次，一般形式为 $a(1 \pm x)^n = b$ ， a 为起始时间的有关数量， b 为终止时间的有关数量.

15. 如果一个正多边形的一个外角是 60° ，那么这个正多边形的边数是_____.

【答案】6

【解析】

【详解】解：根据多边形的外角和等于 360° 和正多边形的每一个外角都相等，得多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$.
故答案为：6.

16. 如果过多边形的一个顶点共有 6 条对角线，那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1260°

【解析】

【分析】从多边形一个顶点可作 6 条对角线，则这个多边形的边数是 9， n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，代入公式就可以求出内角和.

【详解】解： $\because$ 过多边形的一个顶点共有 6 条对角线，
故该多边形边数为 9，

$\therefore (9-2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ$,

$\therefore$ 这个多边形的内角和为 1260° .

故答案为： 1260° .

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式，是需要熟记的内容，比较简单.

17. 等腰三角形的周长是 16(cm)，腰长为 x (cm)，底边长为 y (cm)，那么 y 与 x 之间的函数关系式是_____ (要求写出自变量 x 的取值范围).

【答案】 $y = 16 - 2x$, $4 < x < 8$

【解析】

【分析】根据已知列方程，再根据三角形三边的关系确定定义域即可.

【详解】解： $\because 2x + y = 16$,

$\therefore y = 16 - 2x$, 即 $x < 8$,

$\because$ 两边之和大于第三边,

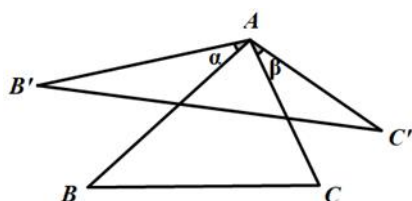
$\therefore x > 4$,

$\therefore 4 < x < 8$,

故答案为 $y=16-2x$, $4 < x < 8$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质及三角形三边关系；根据三角形三边关系求得 x 的取值范围是解答本题的关键.

18. 如图，将 $\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 AB' ，边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 得到 AC' ，联结 $B'C'$ ，当 $\alpha + \beta = 60^\circ$ 时，我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“双旋三角形”，如果等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，那么它所得的“双旋三角形”中 $B'C' =$ _____ (用含 a 的代数式表示) .

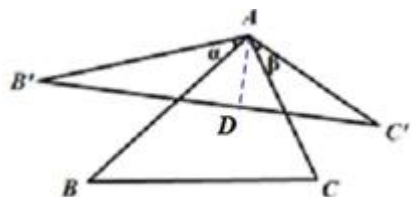


【答案】 $\sqrt{3}a$

【解析】

【分析】 作 $AD \perp B'C'$ 于点 D ，根据题意与旋转和等边三角形的性质可得， $\triangle AB'C'$ 是顶角为 120° 的等腰三角形，再根据等腰三角形的性质可得 $\angle DA B' = 60^\circ$ ， $B'C' = 2 B'D$ ，根据 $\sin \angle DA B' = \frac{B'D}{AB}$ 即可得解.

【详解】 解：作 $AD \perp B'C'$ 于点 D ，



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形， $\alpha + \beta = 60^\circ$ ，

$\therefore AB' = AC'$ ， $\angle B'AC' = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle B' = 30^\circ$ ， $\therefore B'D = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ，

则 $B'C' = \sqrt{3}a$.

故答案为 $\sqrt{3}a$.

【点睛】 本题主要考查等边三角形的性质，旋转的性质，等腰三角形的判定与性质，解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

三、解答题 (共四题：共 24 分)

19. 解方程： $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$.

【答案】 -1.

【解析】

【详解】试题分析：去分母，把分式方程化为整式方程．注意要验根．

试题解析：去分母，得 $x+2-4=x^2-4$ ，移项、整理得 $x^2-x-2=0$ ，经检验： $x_1=2$ 是增根，舍去； $x_2=-1$ 是原方程的根，所以，原方程的根是 $x=-1$ ．

考点：解分式方程．

20. 解方程： $\sqrt{2x^2-1}+x-2=0$ ．

【答案】 $x_1=1$ ， $x_2=-5$

【解析】

【分析】通过移项对原方程变形，然后对方程两边分别平方，再解一元二次方程求出 x 的值，检验后即可得到原方程的解．

【详解】解：方程变形为： $\sqrt{2x^2-1}=2-x$ ，

两边平方得： $2x^2-1=x^2-4x+4$ ，

整理得： $x^2+4x-5=0$ ，

解得： $x_1=1$ ， $x_2=-5$ ，

经检验， $x_1=1$ ， $x_2=-5$ 是原方程的根．

【点睛】本题主要考查了解无理方程，关键是把无理方程转化为一元二次方程求解，注意解无理方程要检验．

21. 解方程组：
$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2-y^2=2(x+y) \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-5 \\ y_2=5 \end{cases}$

【解析】

【分析】方程组利用代入消元法得到 $y^2-6y+5=0$ ，然后解一元二次方程求出 $y_1=1$ ， $y_2=5$ ，然后代入求解即可．

【详解】解：
$$\begin{cases} x+2y=5 \text{ ①} \\ x^2-y^2=2(x+y) \text{ ②} \end{cases}$$

由①，得： $x=5-2y$ ③，

将③代入②，得： $(5-2y)^2 - y^2 = 2(5-2y+y)$ ，

整理得， $y^2 - 6y + 5 = 0$

即 $(y-1)(y-5) = 0$

$\therefore y-1=0$ 或 $y-5=0$

解得 $y_1=1$ ， $y_2=5$

将 $y_1=1$ 代入③得， $x_1=5-2y=3$ ；

将 $y_2=5$ 代入③得， $x_2=5-2y=-5$ ；

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-5 \\ y_2=5 \end{cases}$ 。

【点睛】 本题考查解二元二次方程组，能够熟练掌握代入消元法和解一元二次方程的方法是解决本题的关键。

22. 解方程组：
$$\begin{cases} \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 7 \\ \frac{3}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 设 $\frac{1}{x+y} = a$ ， $\frac{1}{x-y} = b$ ，化为整式方程，可解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}$ ，解此分式方程，即

可求得。

【详解】 解： 设 $\frac{1}{x+y} = a$ ， $\frac{1}{x-y} = b$ ，则原方程可化为 $\begin{cases} 5a+b=7 \\ 3a-b=1 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ ，

得： $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}$ ，即： $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$ ，

经检验: $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ 是原方程组的解;

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了利用换元法解分式方程，利用换元法把分式方程化为整式方程是解决本题的关键，注意检验.

四、解答题 (共四题: 共 34 分)

23. 已知一次函数图像经过点(0, -2)和(-1, -5), 求:

- (1) 求这个函数的解析式;
- (2) 所求得的一次函数的图像与坐标轴围成的三角形面积.

【答案】 (1) 这个一次函数解析式为 $y = 3x - 2$

(2) 一次函数的图像与坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 设这个一次函数解析式为 $y = kx + b$, 把点(0, -2)和(-1, -5)代入函数解析式, 利用待定系数法求解函数解析式即可;

(2) 先求解一次函数与 x, y 轴的交点坐标, 再求解三角形的面积即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 设这个一次函数解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

把点 (0, -2) 和 (-1, -5) 代入一次函数解析式,

$$\text{得} \begin{cases} b = -2 \\ -k + b = -5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

这个一次函数解析式为 $y = 3x - 2$;

【小问 2 详解】

由 $y = 3x - 2$,

令 $y=0$, 得 $3x - 2=0$. 解得: $x = \frac{2}{3}$

令 $x=0$, 得 $y = -2$

可知，一次函数的图像与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$,

与 y 轴交点坐标为 $(0, -2)$

因此，一次函数的图像与坐标轴所围成的三角形的面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解一次函数的解析式，一次函数的图形与坐标轴围成的图形的面积，掌握“待定系数法求解函数解析式”是解本题的关键.

24. 某校青年教师准备捐款 3600 元为敬老院的老年人购买一台电脑，这笔钱大家平均承担. 实际捐款时又多了 2 名教师，因为购买电脑所需的总费用不变，于是每人少捐 90 元. 问共有多少人参加捐款？原计划每人捐款多少元？.

【答案】 共有 10 人参加捐款，原计划每人捐款 450 元.

【解析】

【分析】 设实际共有 x 人参加捐款，那么原来有 $(x-2)$ 人参加捐款，根据：原来捐款的平均数-实际捐款平均数=90，列分式方程求解.

【详解】 解： 设实际共有 x 人参加捐款，那么原来有 $(x-2)$ 人参加捐款，实际每人捐款 $\frac{3600}{x}$ (元)，原计划每人捐款 $\frac{3600}{x-2}$ (元)，

依据题意，得 $\frac{3600}{x-2} - \frac{3600}{x} = 90$,

即 $\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$,

两边同乘以 $x(x-2)$ ，再整理，得 $x^2 - 2x - 80 = 0$,

解得 $x_1 = 10$, $x_2 = -8$,

经检验， $x_1 = 10$, $x_2 = -8$ 都是原方程的根，

但人数不能为负数，所以取 $x = 10$,

当 $x = 10$ 时， $\frac{3600}{x-2} = \frac{3600}{10-2} = 450$ (元)，

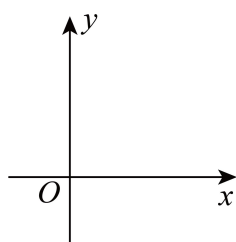
答： 共有 10 人参加捐款，原计划每人捐款 450 元.

【点睛】 本题考查了分式方程的应用. 利用分式方程解应用题时，一般题目中会有两个相等关系，这时要根据题目所要解决的问题，选择其中的一个相等关系作为列方程的依据，而另一个则用来设未知数.

25. 某商店第一次用 600 元购进某种铅笔若干支，第二次又用 600 元购进该种铅笔，但这次每支的进价比第一次贵 1 元，所以购进数量比第一次少了 30 支.

(1) 求第一次每支铅笔的进价及购进的数量；

(2) 若将这两次购进的铅笔按同一单价 x (元 / 支) 全部销售完毕, 并要求获利不低于 420 元, 求获利 y (元) 关于单价 x (元 / 支) 的函数关系式及定义域, 并在直角坐标系内画出它的大致图象.



【答案】(1) 第一次每支铅笔的进价是 4 元, 购进 150 支. (2) $y=270x-1200$ ($x \geq 6$).

【解析】

【分析】(1) 设第一次每支铅笔的进价为 a 元 / 支, 根据第二次购进数量比第一次少了 30 支列方程, 然后解方程即可;

(2) 根据利润=一只的利润 $\times$ 数量, 分别表示出两次的利润, 然后 y =第一次的利润+第二次的利润可得函数关系式.

【详解】(1) 设第一次每支铅笔的进价为 a 元 / 支,

$$\text{则据题意得 } \frac{600}{a} - \frac{600}{a+1} = 30,$$

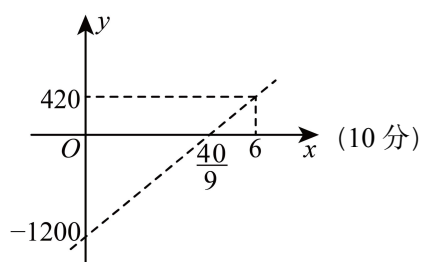
$$\therefore a_1=4, a_2=-5 \text{ (舍)},$$

$$\frac{600}{4} = 150.$$

答: 第一次每支铅笔的进价是 4 元, 购进 150 支.

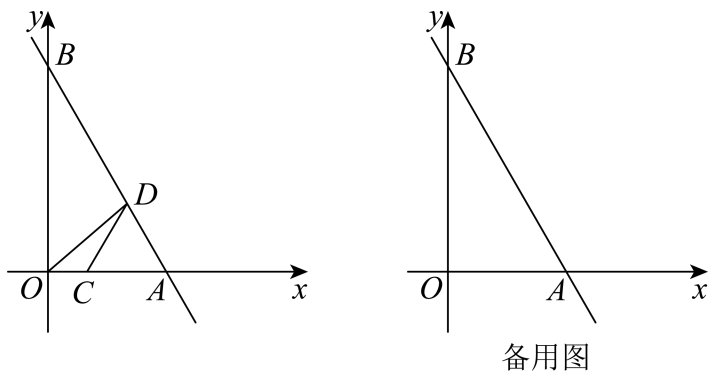
$$(2) \text{ 由题意得: } y = (x-4) 150 + (x-5) 120 = 270x - 1200,$$

即获利 y (元) 关于单价 x (元 / 支) 的函数关系为: $y=270x-1200$ ($x \geq 6$).



考点: 1.分式方程的应用; 2.确定函数关系式及图像.

26. 已知一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ 图象与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点.



(1) 求点 A 、 B 的坐标和 $\angle BAO$ 的度数.

(2) 点 C 、 D 分别是线段 OA 、 AB 上一动点 (不与端点重合), 且 $CD = DA$, 设线段 OC 的长度为 x , $S_{\triangle OCD} = y$, 求出 y 关于 x 的函数关系式及定义域.

(3) 点 C 、 D 分别是射线 OA 、射线 BA 上一动点, 且 $CD = DA$, 当 $\triangle ODB$ 为等腰三角形时, 求点 C 坐标.

【答案】 (1) $A(3,0)$, $B(0,3\sqrt{3})$, $\angle BAO = 60^\circ$

$$(2) y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}x (0 < x < 3)$$

(3) 点 C 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(3\sqrt{3}-3,0)$ 或 $(6,0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据一次函数与坐标轴的交点坐标的计算方法可求出点 A 、 B 的坐标, 然后根据勾股定理求出 AB , 可得 $AB = 2OA$, 由此可求出 $\angle BAO$ 的度数;

(2) 证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形, 求出 $AD = AC = 3-x$, 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E , 利用勾股定理求出 DE , 然后利用三角形面积公式即可求得 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 分情况讨论: ①当 $DB = DO$ 时; ②当 $BO = BD = 3\sqrt{3}$ 时; ③当 $OB = OD = 3\sqrt{3}$ 时, 分别利用勾股定理, 等边三角形的性质求出 OC 的长, 即可得到对应的点 C 坐标.

【小问 1 详解】

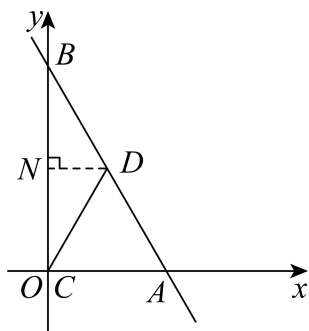
解: 在一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ 中,

当 $x=0$ 时, $y=3\sqrt{3}$; 当 $y=0$ 时, 解得: $x=3$;

$$\therefore A(3,0), B(0,3\sqrt{3}),$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB, AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6, \text{ 即 } AB = 2OA,$$



$$\therefore BN = \frac{1}{2}OB = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle DBN = 30^\circ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BN^2 + DN^2 = BD^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = BD^2,$$

$$\therefore BD = 3,$$

由 (1) 知 $AB = 6$,

$$\therefore DA = 6 - 3 = 3,$$

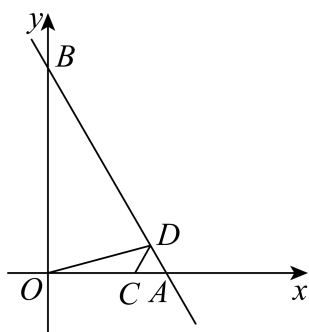
$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = 3,$$

$$\therefore OA = 3,$$

$\therefore$ 此时点 C 与原点重合, 即 $C(0,0)$;

②如图, 当 $BO = BD = 3\sqrt{3}$ 时, 则 $AD = AB - BD = 6 - 3\sqrt{3}$,



$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

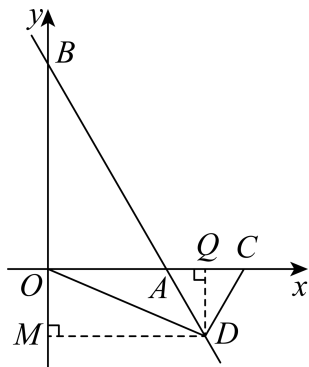
$$\therefore AC = AD = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\therefore OC = OA - AC = 3 - (6 - 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore C(3\sqrt{3}-3, 0);$$

③如图，当 $OB = OD = 3\sqrt{3}$ 时，过点 D 作 $DM \perp y$ 轴于 M ， $DQ \perp x$ 轴于点 Q ，

则 $\angle OBD = \angle ODB = 30^\circ$ ， $DM \parallel x$ 轴，



$$\therefore \angle OAB = \angle MDB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ODM = 30^\circ,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OD = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore MD = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \angle QOM = \angle OMD = \angle DQO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OMDQ$ 是矩形，

$$\therefore OQ = MD = \frac{9}{2},$$

$$\therefore AQ = OQ - OA = \frac{3}{2},$$

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = 2AQ = 3,$$

$$\therefore OC = OA + AC = 6,$$

$$\therefore C(6, 0);$$

综上所述，当 $\triangle ODB$ 为等腰三角形时，点 C 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(3\sqrt{3}-3, 0)$ 或 $(6, 0)$ 。

【点睛】本题考查了一次函数的图象和性质，勾股定理，含 30° 直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质，矩形的判定和性质等知识，作出合适的辅助线，正确分类讨论是解题的关键。

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能