

2021-2022 学年上海外国语大学附属双语学校八年级（下）期中数学试卷

考试注意事项:

- 1、考生须诚信考试，遵守考场规则和考试纪律，并自觉服从监考教师和其他考试工作人员管理；
- 2、监考教师发卷后，在试卷指定的地方填写本人准考证号、姓名等信息；考试中途考生不准以任何理由离开考场；
- 3、考生答卷用笔必须使用同一规格同一颜色的笔作答(作图可使用铅笔)，不准用规定以外的笔答卷，不准在答卷上作任何标记。考生书写在答题卡规定区域外的答案无效。
- 4、考试开始信号发出后，考生方可开始作答。

一、选择题（本大题共 6 小题）

1. 下列方程中，二项方程是（ ）

A. $x^2 + 2x + 1 = 0$

B. $x^5 + x^2 = 0$

C. $x^2 = 1$

D. $\frac{1}{x} + x = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】如果一元 n (n 是正整数) 次方程的一边只含有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是 0，这样的方程就叫做二项方程，根据定义判断即可。

【详解】解：A. $x^2 + 2x + 1 = 0$ 有三项，不符合二项方程定义，故选项不合题意；

B. $x^5 + x^2 = 0$ 不是二项方程，故选项不符合题意；

C. $x^2 = 1$ 可变为 $x^2 - 1 = 0$ ，符合二项方程定义，故选项符合题意；

D. $\frac{1}{x} + x = 1$ 是分式方程，故选项不符合题意。

故选：C。

【点睛】本题考查二项方程的定义，掌握二项方程的定义是求解本题的关键。

2. 下列方程中，有实数解的是（ ）

A. $\sqrt{x+2} + 1 = 0$

B. $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

C. $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1$

D. $\sqrt{x^2-3} = 2$

【答案】D

【解析】

【分析】移项后得出 $\sqrt{x+2} = -1$ ，根据算术平方根的非负性即可判断选项 A；方程两边都乘 $x^2 - 1$ 得出 $x = 1$ ，再进行检验即可判断选项 B；根据二次根式有意义的条件得出 $x-1 \geq 0$ 且 $1-x \geq 0$ ，求出 x ，再进行检验即可判断选项 C；方程两边平方得出 $x^2 - 3 = 4$ ，求出方程的解，再进行检验即可判断选项 D.

【详解】解：A： $\because \sqrt{x+2} + 1 = 0$ ，

$$\therefore \sqrt{x+2} = -1,$$

$\because$ 不论 x 为何值， $\sqrt{x+2} \geq 0$ ，不能为负数，

$\therefore$ 此方程无实数根，故本选项不符合题意；

$$\text{B: } \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1},$$

方程两边都乘 $x^2 - 1$ ，得 $x = 1$ ，

检验：当 $x = 1$ 时， $x^2 - 1$ 是增根，

即原分式方程无实数根，故本选项不符合题意；

$$\text{C: } \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1,$$

要使 $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ 有意义，必须 $x-1 \geq 0$ 且 $1-x \geq 0$ ，

解得： $x = 1$ ，

经检验 $x = 1$ 不是原方程的解，

即原方程无实数根，故本选项不符合题意；

$$\text{D: } \sqrt{x^2-3} = 2,$$

方程两边平方，得 $x^2 - 3 = 4$ ，

解得： $x = \pm\sqrt{7}$ ，

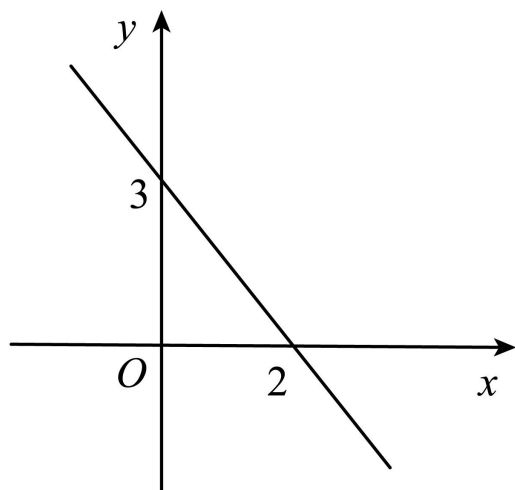
经检验 $x = \pm\sqrt{7}$ 都是原方程的解，

即原方程的解是 $x_1 = \sqrt{7}$ ， $x_2 = -\sqrt{7}$ ，故本选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了解无理方程，解分式方程和二次根式有意义的条件等知识点，能把解无理方程转化成有理方程和能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键.

3. 一次函数 $y = kx + b$ 的图像如图所示，当 $kx + b > 3$ 时， x 的取值范围是 ()



A. $x > 0$

B. $x < 0$

C. $x < 2$

D. $x > 2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据函数与不等式的关系，将 $kx + b > 3$ 转化为 $y > 3$ ，再通过图像判断其所对应的 x 的取值范围，得出答案即可.

【详解】 解： $\because kx + b > 3$ 且 $y = kx + b$,

$\therefore y > 3$,

$\therefore$ 当 $y > 3$ 时，由图像判断可得满足要求的图像是：函数与 y 轴交点上方的图像，

$\therefore x < 0$ ，故 B 正确.

故选： B.

【点睛】 本题主要考查了一次函数和一元一次不等式的关系，正确判断关系合理运用图像是解题的关键.

4. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，这个多边形是()

A. 四边形

B. 五边形

C. 六边形

D. 八边形

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题可以利用多边形的外角和和内角和定理求解.

【详解】 解： 设所求多边形边数为 n ，由题意得

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 2$$

解得 $n = 6$.

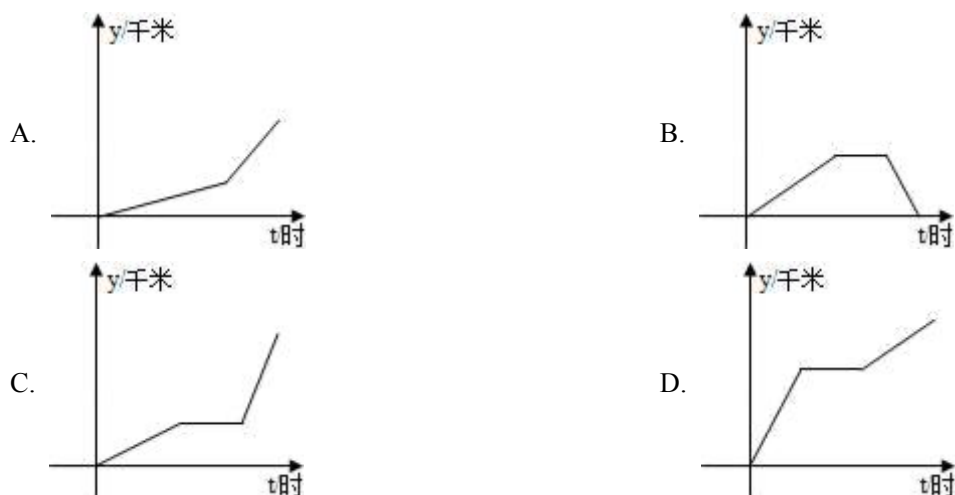
则这个多边形是六边形.

故选 C.

【点睛】 本题考查多边形的内角和与外角和、方程的思想. 关键是记住内角和的公式与外角和的特征： 任

何多边形的外角和都等于 360° ， n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 。

5. 如图，李老师骑自行车上班，最初以某一速度匀速行进，路途由于自行车发生故障，停下修车耽误了几分钟，为了按时到校，李老师加快了速度，仍保持匀速行进，结果准时到校。在课堂上，李老师请学生画出他行进的路程 y （千米）与行进时间 t （小时）的函数图象的示意图，同学们画出的图象如图所示，你认为正确的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】本题可用排除法。依题意，自行车以匀速前进后又停车修车，故可排除 A 项。然后自行车又加快速度保持匀速前进，故可排除 B、D。

【详解】解：由已知得最初以某一速度匀速行进，这一段路程是时间的正比例函数；
中途由于自行车故障，停下修车耽误了几分钟，这一段时间变大，路程不变，因而选项 A 一定错误。
第三阶段李老师加快了速度，仍保持匀速行进，结果准时到校，这一段，路程随时间的增大而增大，因而选项 B 一定错误，
这一段时间中，速度要大于开始时的速度，即单位时间内路程变化大，直线的倾斜角要大。
故选：C。

【点睛】本题考查动点问题的函数图象问题，首先看清横轴和纵轴表示的量，然后根据实际情况：时间 t 和运动的路程 s 之间的关系采用排除法求解即可。

6. 下列说法：(1) 多边形边数增加 1 条时，它的内角和增加 180° ；(2) 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 交于点 O ， $OA = OC$ ， $OB = OD$ ，那么这个四边形是平行四边形；(3) 三角形的外角和小于其它多边形的外角和；(4) n 边形共有 $(n-3)$ 条对角线；(5) 四边形的四个内角至少有一个角不小于直角。其中正确说法的个数是（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据多边形，三角形的外角，平行四边形的判定以及多边形的内角和公式逐一判断即可.

【详解】解：(1) 当多边形边数增加 1 条时，它的内角和增加 180° ，说法正确.

(2) 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC , BD 交于点 O ，且 $OA=OC$, $OB=OD$ ，那么这个四边形是平行四边形，原说法正确.

(3) 三角形的外角和等于其它多边形的外角和，原说法错误.

(4) n 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线，原说法错误.

(5) 四边形的四个内角至少有一个角不小于直角，说法正确;

故选：C.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定，多边形的内角与外角以及三角形的外角性质，熟记相关知识是解答本题的关键.

二、填空题 (本大题共 14 小题)

7. 一次函数 $y = 2(x-1) + 3$ 的图象在 y 轴上的截距是_____.

【答案】1

【解析】

【分析】代入 $x = 0$ 求出 y 值，此题得解.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = 2 \times (0-1) + 3 = 1$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2(x-1) + 3$ 的图象在 y 轴上的截距是 1.

故答案为：1.

【点睛】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，牢记代入 $x = 0$ 求出的 y 值即可求出该函数图象在 y 轴上的截距，是解题的关键.

8. 方程 $\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{3-x} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先求出使得二次根式有意义的 x 的取值范围，再根据 $a \cdot b = 0$ 时， a, b 至少一个为 0 即可得到答案.

【详解】解： $2-x \geq 0$ ，且 $3-x \geq 0$ 得到 $x \leq 2$ ，

$\therefore \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{3-x} = 0$ ，

$$\therefore 2-x=0 \text{ 或者 } 3-x=0,$$

$$\text{又} \because x \leq 2,$$

$$\therefore 2-x=0,$$

$\therefore x=2$ 是原方程的解, 所以原方程的解为 $x=2$;

故答案为: $x=2$.

【点睛】 本题考查二次根式有意义的条件, 能把无理方程转化成有理方程是解题的关键.

9. 若点 $A(7, y_1)$ 、点 $B(5, y_2)$ 是直线 $y = \frac{1}{3}x - b$ (b 为常数) 上的点, 则 y_1, y_2 大小关系是_____.

【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 先根据一次函数的解析式判断出一次函数的增减性, 再根据 $7 > 5$ 即可得出结论.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{3}x - b$ (b 为常数) 中, $k = \frac{1}{3} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$$\because 7 > 5,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故答案为: $y_1 > y_2$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 明确一次函数表达式中 k 的意义是解题的关键.

10. 十边形共有_____条对角线.

【答案】 35

【解析】

【分析】 从 n 边形的一个顶点出发可以引 $(n-3)$ 条对角线, 即可求出十边形的对角线数量.

【详解】 从 10 边形的一个顶点出发可以引 7 条对角线,

$$\therefore \text{十边形的对角线数量为 } 7 \times 10 \div 2 = 35.$$

故答案为: 35.

【点睛】 本题考查了多边形的对角线, 熟记有关公式是解题的关键, 需要注意一条对角线会计算两次需要除以 2.

11. 把方程 $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ 化为两个二元一次方程是_____.

【答案】 $x + y + 3 = 0$ 和 $x + y - 3 = 0$

【解析】

【分析】先把方程 $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ 变形得 $(x+y)^2 - 3^2 = 0$ ，再把左边分解得到 $(x+y+3)(x+y-3) = 0$ ，
则原方程可转化为 $x+y+3=0$ 或 $x+y-3=0$ 。

【详解】解： $\because x^2 + 2xy + y^2 = 9$ ，

$$\therefore (x+y)^2 - 3^2 = 0,$$

$$\therefore (x+y+3)(x+y-3) = 0,$$

$$\therefore x+y+3=0 \text{ 或 } x+y-3=0.$$

故答案为： $x+y+3=0$ 和 $x+y-3=0$ 。

【点睛】本题考查了解一元二次方程--因式分解法：通常利用换元法或因式分解法把高次方程化为一元二次方程求解。

12. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，则原方程可化为关于 y 的整式方程是 _____。

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$ ；

【解析】

【分析】如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$ ，原方程变为： $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$ ，方程两边乘最简公分母 y ，可以把分式方程转化为整式方程。

【详解】解：设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，

$$\text{原方程变为 } y - \frac{3}{y} - 2 = 0,$$

$$\text{方程两边都乘 } y \text{ 得 } y^2 - 2y - 3 = 0.$$

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$ 。

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$ 。

【点睛】本题考查用换元法使分式方程简便。换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程。应注意换元后的字母系数。

13. 某工人要完成1000个零件，起初机器出现故障，每分钟比原计划少加工4个零件，加工320个零件后，换了一台新机器，每分钟比原计划多加工8个零件。已知用新机器加工零件的时间比前面用旧机器加工零件

的时间少6分钟，设原计划每分钟加工 x 个零件，则可列方程为：_____.

【答案】 $\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8}$

【解析】

【分析】根据题意可知：用新机器加工零件的时间比前面用旧机器加工零件的时间少6分钟，即可列出相应的分式方程.

【详解】解：由题意可得：

$$\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8},$$

故答案为： $\frac{320}{x-4} - 6 = \frac{1000-320}{x+8}$.

【点睛】本题考查由实际问题抽象出分式方程，解答本题的关键是明确题意，找出等量关系，列出相应的方程.

14. 如果关于 x 的方程 $(m^2 - 1)x = 1$ 无实数解，那么 m 满足的条件是_____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】令未知数的系数为0，即可得出结论.

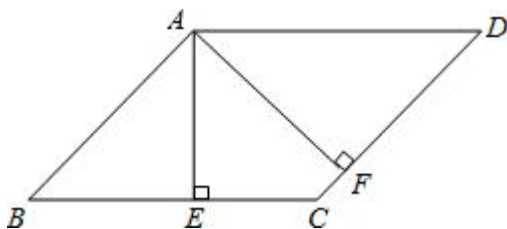
【解答】解：当 $m^2 - 1 = 0$ 时，方程无实数解，

$$\therefore m = \pm 1.$$

故答案为： ± 1 .

【点评】本题主要考查了一元一次方程的解，正确找出方程无实数解的式子是解题的关键.

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F ， $\angle EAF = 45^\circ$ ，且 $AE + AF = 2$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的周长为_____.



【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】要求平行四边形的周长就要先求出 AB 、 AD 的长，利用平行四边形的性质和勾股定理即可求出结果.

【详解】解： $\because \angle EAF = 45^\circ$,

$$\therefore \angle C = 360^\circ - \angle AEC - \angle AFC - \angle EAF = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle D = 180^\circ - \angle C = 45^\circ,$$

$$\text{则 } AE = BE, \quad AF = DF,$$

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } AF = 2 - x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, 根据勾股定理可得, } AB = \sqrt{2}x,$$

$$\text{同理可得: } AD = \sqrt{2}(2 - x),$$

$$\text{则平行四边形 } ABCD \text{ 的周长是 } 2(AB + AD) = 2[\sqrt{2}x + \sqrt{2}(2 - x)] = 4\sqrt{2},$$

$$\text{故答案为: } 4\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，解题关键是利用平行四边形的性质结合等腰直角三角形的性质、勾股定理来解决有关的计算和证明.

16. 在平行四边形中一边长为8cm，它的一条对角线的长12cm，那么它的另一条对角线 m 的长度的取值范围_____.

$$\text{【答案】 } 4 < m < 28$$

【解析】

【分析】根据平行四边形性质推出 $OA = OC = \frac{1}{2}AC = 6$ ， $OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}m$ ，在 $\triangle AOD$ 中，由三角形三边关系定理得出 $8 - 6 < \frac{1}{2}m < 8 + 6$ ，求出即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

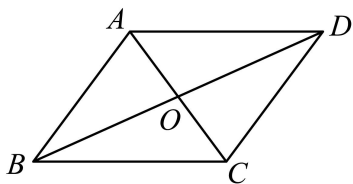
$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 6, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}m,$$

$$\text{在 } \triangle AOD \text{ 中, } AD = 8, \text{ 由三角形三边关系定理得: } 8 - 6 < \frac{1}{2}m < 8 + 6,$$

$$\text{即 } 2 < \frac{1}{2}m < 14,$$

$$\therefore 4 < m < 28.$$

$$\text{故答案为: } 4 < m < 28.$$



【点睛】本题考查了平行四边形的性质和三角形三边关系定理，关键是把已知数和未知数设法放在一个三角形中，题目比较好，难度适中.

17. 已知直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与坐标轴围成的三角形面积是 6, 且经过 $(2, 0)$, 则这条直线的表达式是 _____.

【答案】 $y = -3x + 6$ 或 $y = 3x - 6$

【解析】

【分析】 先根据面积求出三角形在 y 轴上边的长度, 再分正半轴和负半轴两种情况讨论求解.

【详解】 解: 根据题意, 设与 y 轴交点坐标为 $(0, b)$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \times 2 \times |b| = 6,$$

$$\text{解得 } |b| = 6,$$

$$\therefore b = \pm 6,$$

① 当 $b = 6$ 时, 与 y 轴交点为 $(0, 6)$

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -3 \\ b = 6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = -3x + 6;$$

② 当 $b = -6$ 时, 与 y 轴的交点为 $(0, -6)$

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = -6 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = 3 \\ b = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = 3x - 6.$$

$$\therefore \text{这个一次函数的解析式是 } y = -3x + 6 \text{ 或 } y = 3x - 6.$$

故答案为: $y = -3x + 6$ 或 $y = 3x - 6$.

【点睛】 本题考查的是待定系数法求一次函数的解析式, 先根据三角形面积求出与 y 轴的交点, 再利用待定系数法求函数解析式, 本题需要注意有两种情况.

18. 若方程 $\frac{x+k}{x^2-1} + \frac{x}{1+x} = 2$ 有增根 $x = -1$, 则 $k =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 先将分式方程去分母, 再把 $x = -1$ 代入整式方程中, 进行计算即可解答.

$$\text{【详解】 } \frac{x+k}{x^2-1} + \frac{x}{1+x} = 2,$$

去分母, 得 $x + k + x(x - 1) = 2(x^2 - 1)$,

整理得 $x^2 - 2 - k = 0$.

∵ 方程有增根 $x = -1$,

∴ 把 $x = -1$ 代入 $x^2 - 2 - k = 0$ 中,

$$1 - 2 - k = 0,$$

$$\therefore k = -1,$$

故答案为: -1 .

【点睛】 本题考查了分式方程的增根, 把 x 的值代入整式方程中进行计算是解题的关键.

19. 如果 $ab < 0$, $ac < 0$, 则直线 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 不经过_____象限.

【答案】 第二

【解析】

【分析】由 $ab < 0$, $ac < 0$ 得到 $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{c}{b} > 0$, 然后根据一次函数图象与系数的关系易得直线 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 经过第一、三、四象限.

【详解】解: ∵ $ab < 0$, $ac < 0$,

$$\therefore bc > 0,$$

$$\therefore \frac{a}{b} < 0, \frac{c}{b} > 0,$$

$$\therefore -\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0,$$

∴ 直线 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 经过第一、三、四象限.

故答案为: 第二.

【点睛】 本题考查了一次函数图象与系数的关系: 一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, $k \neq 0$) 是一条直线, 当 $k > 0$, 图象经过第一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$, 图象经过第二、四象限, y 随 x 的增大而减小; 图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, b)$.

20. 在正方形 $ABCD$ 中, 边长为 8, 点 P 是对角线 AC 上一点, $CP = 2\sqrt{2}$, E 是射线 AB 上一点, 联结 PE , 射线 $PF \perp PE$ 交直线 AD 于 F , 当 $AC = CE$ 时, $AF =$ _____.

【答案】 4

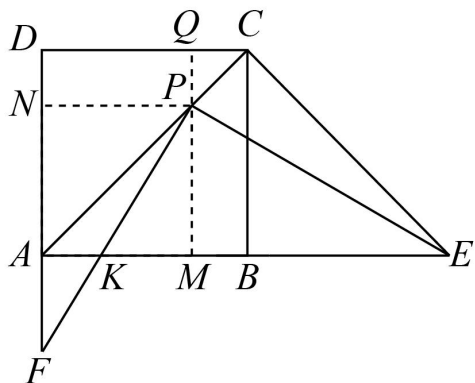
【解析】

【分析】过点 P 作 $PM \perp BA$ 于 M , 过点 P 作 $PN \perp DA$ 于 N , 设 PF 交 AB 于 K , 证明四边形 $AMPN$ 是

正方形，由 $CP = 2\sqrt{2}$ ，可得 $AM = PM = \frac{AP}{\sqrt{2}} = 6 = PN = AN$ ，即得 $EM = AB + BE - AM = 10$ ，又

$PE \perp PF$ ，可得 $\triangle NPF \cong \triangle MPE$ (ASA)，得 $NF = EM = 10$ ，再由 $AF = DN + NF - AD$ 可得 $AF = 4$ 。

【详解】解：过点 P 作 $PM \perp BA$ 于 M ，交 CD 于点 Q ，过点 P 作 $PN \perp DA$ 于 N ，设 PF 交 AB 于 K ，如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，边长为 8，

$\therefore \angle CAB = 45^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AC = 8\sqrt{2}$ ，

$\therefore AM = PM$ ， $PQ = PC$

$\because \angle NAM = \angle PMA = \angle PNA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AMPN$ 是正方形，

$\therefore$ 四边形 $DNPQ$ 是矩形，

$\therefore DN = QP = \frac{CP}{\sqrt{2}} = 2$ ，

$\because AC = CE$ ，

$\therefore AB = BE = 8$ ，

$\because CP = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore AP = AC - CP = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore AM = PM = \frac{AP}{\sqrt{2}} = 6 = PN = AN$ ，

$\therefore EM = AB + BE - AM = 8 + 8 - 6 = 10$ ，

$\because PE \perp PF$ ，

$$\therefore \angle EPM + \angle KPM = \angle NPF + \angle KPM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EPM = \angle NPF$$

在 $\triangle NPF$ 与 $\triangle MPE$ 中

$$\begin{cases} \angle PME = \angle PNF = 90^\circ \\ NP = MP \\ \angle EPM = \angle NPF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle NPF \cong \triangle MPE \quad (\text{ASA})$$

$$\therefore NF = EM = 10$$

$$\therefore DN = PQ = 2$$

$$\therefore AF = DN + NF - AD = 2 + 10 - 8 = 4$$

$$\therefore AF = 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查正方形性质及判定, 全等三角形的性质与判定, 等腰直角三角形的性质, 勾股定理, 解题的关键是作辅助线, 构造全等三角形.

三、计算题 (本大题共 2 小题)

21. 解方程: $\frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} = 1.$

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 观察可得最简公分母是 $(x+2)(x-2)$, 方程两边乘以最简公分母, 可以把分式方程化为整式方程, 再求解.

【详解】 解: 方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$, 得: $3+2(x-2)=x^2-4,$

整理, 得 $x^2-2x-3=0,$

$$\therefore (x+1)(x-3)=0,$$

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 3.$$

经检验: $x = -1, x = 3$ 都是原方程的根.

所以原方程的根是 $x_1 = -1, x_2 = 3.$

【点睛】 本题考查解分式方程. 解题的关键在于利用解分式方程的基本思想“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. 注意解分式方程一定要注意要验根.

22. 解方程: $2\sqrt{x-1} + x = 1$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 利用换元法或者变形方程, 利用两边平方变无理方程为整式方程, 求解整式方程.

【详解】 解: 移项, 得 $x - 1 + 2\sqrt{x-1} = 0$.

设 $\sqrt{x-1} = y$, 则原方程可变形为: $y^2 + 2y = 0$.

$\therefore y(y+2) = 0$.

$\therefore y_1 = 0, y_2 = -2$.

当 $y = 0$ 时, 即 $\sqrt{x-1} = 0$,

$\therefore x = 1$.

当 $y = -2$ 时, 即 $\sqrt{x-1} = -2$,

此时方程无解.

经检验, $x = 1$ 是原方程的解.

所以原方程的解为: $x = 1$.

【点睛】 本题主要考查了解无理方程, 掌握换元法和无理方程的一般解法是解决本题的关键.

四、解答题 (本大题共 8 小题)

23. 解方程组:
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 由第一个方程可得 $y = \frac{4-x}{2}$, 然后再代入到第二个方程中, 进行计算求出一元二次方程的解, 从而求出 y 的值, 即可解答.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \text{ ①} \\ x^2 - 2xy = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由 ① 得:

$2y = 4 - x$,

$$y = \frac{4-x}{2} \text{ ③},$$

把③代入②得:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{4-x}{2} = 0,$$

$$x^2 - x(4-x) = 0,$$

$$x^2 - 4x + x^2 = 0,$$

$$2x^2 - 4x = 0,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x-2) = 0,$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 2,$$

把 $x = 0$ 代入③得: $y = 2$,

把 $x = 2$ 代入③得: $y = 1$,

∴ 原方程组的解为: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了解二元二次方程组, 把二元二次方程转化为一元二次方程是解题的关键.

$$24. \text{ 解方程组: } \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{4}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

【解析】

【分析】 设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$, 可解得 $\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$, 即得 $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases}$, 可解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$, 再检验, 即可得

答案.

【详解】解：设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$, 则原方程组变形为：

$$\begin{cases} m+n=3 \\ 4m-n=2 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases},$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y}=1 \\ \frac{1}{x-y}=2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

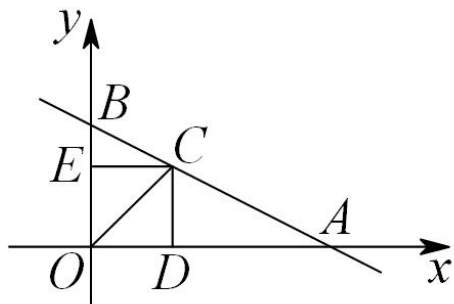
解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases},$

经检验, $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 是原方程组的解,

$\therefore$ 原方程组的解为: $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}.$

【点睛】本题考查解分式方程, 解题的关键是用换元法把方程组变形.

25. 如图, 在平面直角坐标系中(O 为坐标原点), 已知直线 $y=kx+b$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(4,0)$ 、点 $B(0,2)$.



(1) 求直线 AB 的表达式;

(2) 设点 C 为线段 AB 上一点, 过点 C 分别作 $CD \perp x$ 轴、 $CE \perp y$ 轴, 垂足分别为 D 、 E , 当 OC 平分 $\angle AOB$ 时, 求点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

(2) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求得直线 AB 的表达式;

(2) 根据角平分线的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(4, 0)$ 、点 $B(0, 2)$.

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x + 2$;

【小问 2 详解】

设点 C 的坐标为 $\left(a, -\frac{1}{2}a + 2\right)$.

$\because CD \perp x$ 轴、 $CE \perp y$ 轴, OC 平分 $\angle AOB$,

$\therefore CD = CE$,

$$\therefore a = -\frac{1}{2}a + 2.$$

$$\text{解得} a = \frac{4}{3},$$

$$-\frac{1}{2}a + 2 = \frac{4}{3},$$

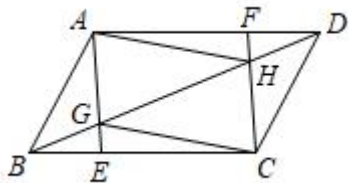
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

【点睛】本题是一次函数综合题, 考查了用待定系数法求一次函数解析式、角平分线的性质, 熟练掌握待

定系数法以及角平分线的性质定理是解决本题的关键.

26. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$, $CF \perp AD$, 垂足分别为 E 、 F , AE 、 CF 分别与 BD 相交于点 G 、 H , 连接 AH 、 CG .

求证: 四边形 $AGCH$ 是平行四边形.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】法 1: 由平行四边形对边平行, 且 CF 与 AD 垂直, 得到 CF 与 BC 垂直, 根据 AE 与 BC 垂直, 得到 AE 与 CF 平行, 得到一对内错角相等, 利用等角的补角相等得到 $\angle AGB = \angle DHC$, 根据 AB 与 CD 平行, 得到一对内错角相等, 再由 $AB = CD$, 利用 AAS 得到三角形 ABG 与三角形 CDH 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $AG = CH$, 利用一组对边平行且相等的四边形为平行四边形即可得证;

法 2: 连接 AC , 与 BD 交于点 O , 利用平行四边形的对角线互相平分得到 $OA = OC$, $OB = OD$, 再由 AB 与 CD 平行, 得到一对内错角相等, 根据 CF 与 AD 垂直, AE 与 BC 垂直, 得一对直角相等, 利用 ASA 得到三角形 ABG 与三角形 CDH 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $BG = DH$, 根据等式的性质得到 $OG = OH$, 利用对角线互相平分的四边形为平行四边形即可得证.

【详解】证明: 在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$$\therefore CF \perp AD,$$

$$\therefore CF \perp BC,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore AE \parallel CF, \text{ 即 } AG \parallel CH,$$

$$\therefore \angle AGH = \angle CHG,$$

$$\therefore \angle AGB = 180^\circ - \angle AGH, \quad \angle DHC = 180^\circ - \angle CHG,$$

$$\therefore \angle AGB = \angle DHC,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle CDH,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDH$ 中,

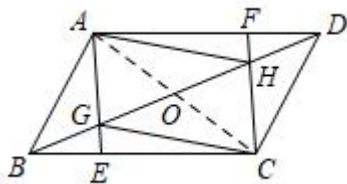
$$\begin{cases} \angle ABG = \angle CDH \\ \angle AGB = \angle DHC, \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CDH,$$

$$\therefore AG = CH,$$

$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是平行四边形;

法 2: 连接 AC , 与 BD 相交于点 O ,



在 $\square ABCD$ 中, $AO = CO$, $BO = DO$, $\angle ABE = \angle CDF$, $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ABG = \angle CDH,$$

$$\because CF \perp AD, AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DCH,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDH$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAG = \angle DCH \\ AB = CD \\ \angle ABG = \angle CDH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CDH,$$

$$\therefore BG = DH,$$

$$\therefore BO - BG = DO - DH,$$

$$\therefore OG = OH,$$

$\therefore$ 四边形 $AGCH$ 是平行四边形.

【点睛】 此题考查了平行四边形的判定与性质和全等三角形的判定和性质, 熟练掌握平式子变形的判定与性质是解本题的关键.

27. 学校组织八年级部分学生乘坐甲、乙两辆大客车到洋山深水港参观, 已知连接临港新城和深水港的东海大桥全长 30 千米, 假设两车都匀速行驶, 甲车比乙车早 6 分钟上桥, 但由于乙车每小时比甲车多行 10 千米, 所以甲、乙两车同时下桥, 求甲车的速度.

【答案】 甲车的速度为 50km/h

【解析】

【分析】设甲车的速度的速度为 $x\text{km/h}$ ，则乙车的速度为 $(x+10)\text{km/h}$ ，根据甲的时间=乙的时间 $+\frac{1}{10}$ ，列方程即可解决.

【详解】解：设甲车的速度的速度为 $x\text{km/h}$ ，则乙车的速度为 $(x+10)\text{km/h}$.

由题意： $\frac{30}{x} = \frac{30}{x+10} + \frac{1}{10}$ ，整理得， $x^2 + 10x - 3000 = 0$ ，

解得 $x = 50$ 或 -60 ，

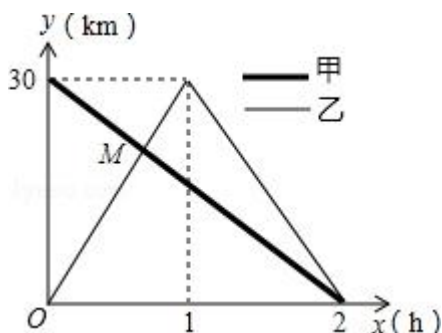
经检验： $x = 50$ 或 -60 都是分式方程的解，

但是 $x = -60$ 不符合实际意义，所以 $x = 50$ ，

答：甲车的速度为 50km/h .

【点睛】本题主要考查分式方程的应用，找等量关系是解应用题的关键，注意解分式方程时必须检验，列方程时注意时间单位是小时，属于常考题型.

28. 在一条笔直的公路上有 A、B 两地，甲骑自行车从 A 地到 B 地；乙骑自行车从 B 地到 A 地，到达 A 地后立即按原路返回，如图是甲、乙两人离 B 地的距离 y (km) 与行驶时 x (h) 之间的函数图象，根据图象解答以下问题：



- (1) 写出 A、B 两地直接的距离；
- (2) 求出点 M 的坐标，并解释该点坐标所表示的实际意义；
- (3) 若两人之间保持的距离不超过 3km 时，能够用无线对讲机保持联系，请直接写出甲、乙两人能够用无线对讲机保持联系时 x 的取值范围.

【答案】(1) 30 千米；(2) 点 M 的坐标为 $(\frac{2}{3}, 20)$ ，表示 $\frac{2}{3}$ 小时后两车相遇，此时距离 B 地 20 千米；(3)

当 $\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{11}{15}$ 或 $\frac{9}{5} \leq x \leq 2$ 时，甲、乙两人能够用无线对讲机保持联系.

【解析】

【分析】(1) $x=0$ 时甲的 y 值即为 A、B 两地的距离；

(2) 根据图象求出甲、乙两人的速度，再利用相遇问题求出相遇时间，然后求出乙的路程即可得到点 M 的

坐标以及实际意义；

(3) 分相遇前和相遇后两种情况求出 x 的值，再求出最后两人都到达 B 地前两人相距 3 千米的时间，然后写出两个取值范围即可.

【详解】解：(1) $\because x=0$ 时，甲距离 B 地 30 千米，

$\therefore$ A、B 两地的距离为 30 千米.

(2) 由图可知，甲的速度： $30 \div 2 = 15$ 千米/时，乙的速度： $30 \div 1 = 30$ 千米/时，

$$30 \div (15 + 30) = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \times 30 = 20 \text{ 千米}.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(\frac{2}{3}, 20)$ ，表示 $\frac{2}{3}$ 小时后两车相遇，此时距离 B 地 20 千米.

(3) 设 x 小时时，甲、乙两人相距 3km，

①若是相遇前，则 $15x + 30x = 30 - 3$ ，解得 $x = \frac{3}{5}$.

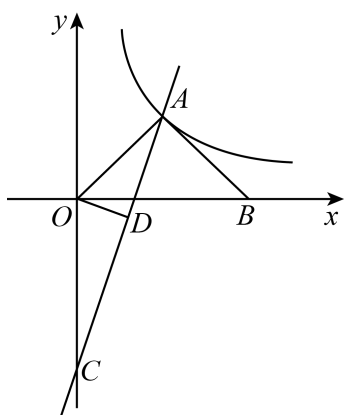
②若是相遇后，则 $15x + 30x = 30 + 3$ ，解得 $x = \frac{11}{15}$.

③若是到达 B 地前，则 $15x - 30(x - 1) = 3$ ，解得 $x = \frac{9}{5}$.

$\therefore$ 当 $\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{11}{15}$ 或 $\frac{9}{5} \leq x \leq 2$ 时，甲、乙两人能够用无线对讲机保持联系.

29. 如图， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，斜边 OB 在 x 轴上，一次函数 $y = 3x - 4$ 的图像经过点 A，交 y 轴于

点 C，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像也经过点 A.



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 过 O 点作 $OD \perp AC$ 于 D 点，求 $CD^2 - AD^2$ 的值；

(3) 若点 P 是 x 轴上的动点，点 Q 在反比例函数的图像上使得 $\triangle PAQ$ 为等腰直角三角形？直接写出所有符合条件的点 Q 的坐标.

$\therefore$ 四边形 $AMON$ 是正方形,

$$\therefore AM = AN,$$

$$\therefore \text{设 } A(a, a),$$

$\because$ 点 A 在直线 $y = 3x - 4$ 上,

$$\therefore a = 3a - 4,$$

解得 $a = 2$,

$$\therefore A(2, 2),$$

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像经过点 A ,

$$\therefore 2 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 4,$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{4}{x}$;

$$(2) \because A(2, 2)$$

$$\therefore AO^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

把 $x = 0$ 代入 $y = 3x - 4$, 解得 $y = -4$,

$$\therefore C(0, -4),$$

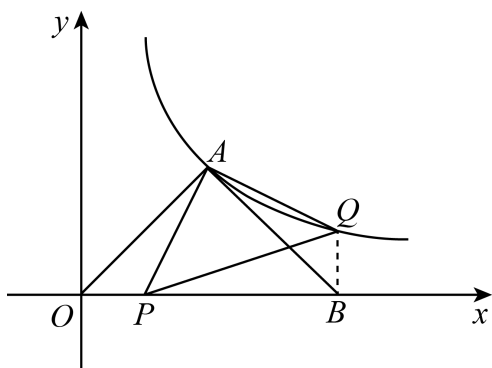
$$\therefore OC = 4,$$

在 $Rt\triangle COD$ 中, $CD^2 = OC^2 - OD^2$ ①,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $AD^2 = OA^2 - OD^2$ ②,

$$\text{①}-\text{②}, \text{得 } CD^2 - AD^2 = OC^2 - OA^2 = 16 - 8 = 8,$$

(3) ①若 $\angle PAQ = 90^\circ$, $AP = AQ$, 如图, 连接 BQ ,



在 $\triangle AOP$ 与 $\triangle ABQ$ 中,

$\because AO = AB, \angle OAP = \angle BAQ = 90^\circ - \angle PAB, AP = AQ$,

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle ABQ$,

$\therefore \angle ABQ = \angle AOP = 45^\circ$,

又 $\angle ABO = 45^\circ$,

$\therefore \angle OBQ = 90^\circ$,

即 $QB \perp OB$,

$\because A(2,2)$,

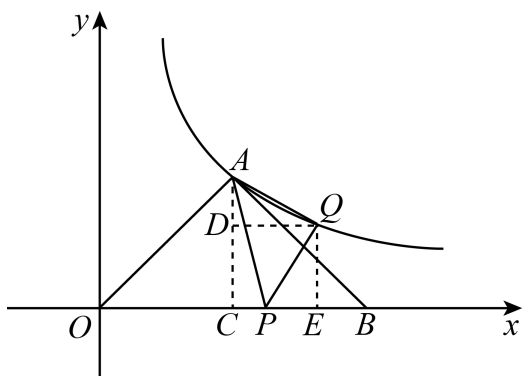
$\therefore B(4,0)$,

把 $x=4$ 代入 $y=\frac{4}{x}$, 得 $y=1$,

$\therefore Q_1(4,1)$,

②若 $\angle AQP = 90^\circ, AQ = PQ$, 如图, 过点A作 $AC \perp x$ 轴于C, 过Q分别作 $QD \perp AC, QE \perp x$ 轴, 垂足

分别为D,E,



在 $Rt\triangle ADQ$ 与 $Rt\triangle PEQ$,

$\because AQ = PQ, \angle AQD = \angle PQE = 90^\circ - \angle DQP$,

$\therefore Rt\triangle ADQ \cong Rt\triangle PEQ$,

$\therefore AD = PE, DQ = EQ$,

设 $Q(m, \frac{4}{m})$, 则 $OE = m, CE = DQ = EQ = \frac{4}{m}$,

由 $OC + CE = OE$,

可得 $2 + \frac{4}{m} = m$,

解得 $m = 1 \pm \sqrt{5}$,

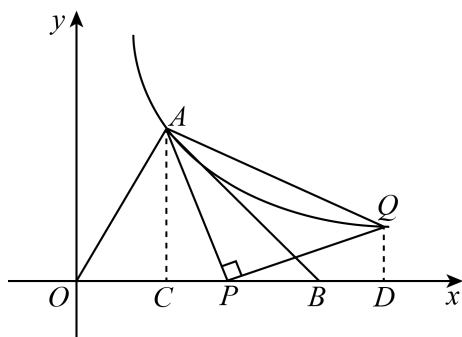
经检验, m 是原方程的解,

$\because m > 0$,

$\therefore m = 1 + \sqrt{5}$,

$\therefore Q_2(\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 1)$,

③若 $\angle APQ = 90^\circ, PA = PQ$, 如图, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C, 过 Q 作 $QD \perp x$ 轴于 D,



在 $Rt\triangle ACP$ 与 $Rt\triangle PDQ$ 中,

$\because PA = PQ, \angle APC = \angle PQD = 90^\circ - \angle DPQ$,

$\therefore Rt\triangle ACP \cong Rt\triangle PDQ$,

$\therefore AC = PD, CP = DQ$,

设 $Q(n, \frac{4}{n})$, 则 $OD = n, CP = DQ = \frac{4}{n}, PD = AC = 2$,

由 $OC + CP + PD = OD$,

$$\text{可得 } 2 + \frac{4}{n} + 2 = n,$$

$$\text{解得 } n = 2 \pm 2\sqrt{2},$$

经检验, m 是原方程的解,

$$\because n > 0,$$

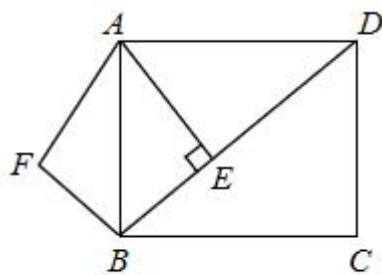
$$\therefore n = 2 + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore Q_3(2\sqrt{2} + 2, 2\sqrt{2} - 2),$$

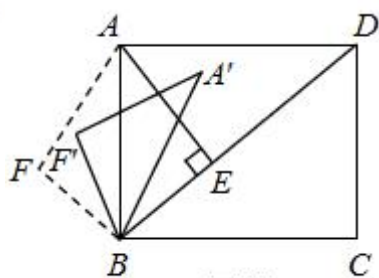
综上所述, 存在 Q 点符合题意, 其坐标为 $Q_1(4, 1)$, $Q_2(\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 1)$, $Q_3(2\sqrt{2} + 2, 2\sqrt{2} - 2)$.

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数综合, 等腰直角三角形的性质, 勾股定理, 三角形全等的性质与判定, 解可化为一元二次方程的分式方程, 掌握以上知识是解题的关键.

30. 已知: 如图①, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $AD = \frac{20}{3}$, $AE \perp BD$, 垂足是 E . 点 F 是点 E 关于 AB 的对称点, 连接 AF 、 BF .



图①



图②

- (1) 求 AE 和 BE 的长;
- (2) 若将 $\triangle ABF$ 沿着射线 BD 方向平移, 设平移的距离为 m (平移距离指点 B 沿 BD 方向所经过的线段长度), 当点 F 分别平移到线段 AB 、 AD 上时, 直接写出相应的 m 的值.
- (3) 如图②, 将 $\triangle ABF$ 绕点 B 顺时针旋转一个角 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), 记旋转中的 $\triangle ABF$ 为 $\triangle A'B'F'$, 在旋转过程中, 设 $A'B'$ 所在的直线与直线 AD 交于点 P , 与直线 BD 交于点 Q , 是否存在这样的 P 、 Q 两点, 使 $\triangle DPQ$ 为等腰三角形? 若存在, 求出此时 DQ 的长; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 3 (2) 3 或 $\frac{16}{3}$

(3) 存在, $3\sqrt{10} - \frac{25}{3}$, $\frac{125}{24}$, $\frac{25}{3} - \sqrt{10}$, $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用矩形性质、勾股定理及三角形面积公式求解;

(2) 依题意画出图形, 如答图 2 所示. 利用平移性质, 确定图形中的等腰三角形, 分别求出 m 的值;

(3) 在旋转过程中, 等腰 DPQ 有 4 种情形, 如答图 3 所示, 对于各种情形分别进行计算.

【小问 1 详解】

解: 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AB = 5$, $AD = \frac{20}{3}$,

由勾股定理得: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{25}{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AE = \frac{1}{2} AB \cdot AD$,

$\therefore AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{5 \times \frac{20}{3}}{\frac{25}{3}} = 4$.

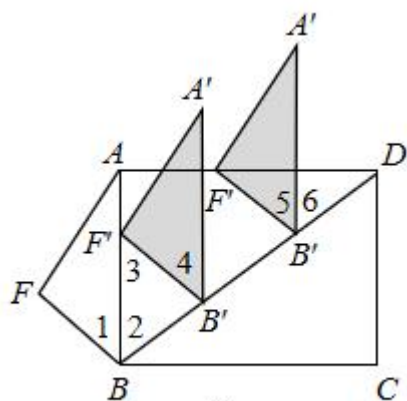
在 $Rt\triangle ABE$ 中, $AB = 5$, $AE = 4$, 由勾股定理得: $BE = 3$.

【小问 2 详解】

设平移中的三角形为 $\triangle A'B'F'$, 如答图 2 所示:

由对称点性质可知, $\angle 1 = \angle 2$.

由平移性质可知, $AB \parallel A'B'$, $\angle 4 = \angle 1$, $BF = B'F' = 3$.



答图 2

① 当点 F' 落在 AB 上时,

$\therefore AB \parallel A'B'$,

$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle 3 = \angle 2$,

$\therefore BB' = B'F' = 3$, 即 $m = 3$;

② 当点 F 落在 AD 上时,

$$\because AB \parallel A'B',$$

$$\therefore \angle 6 = \angle 2,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2, \quad \angle 5 = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6,$$

又易知 $A'B' \perp AD$,

$\therefore \triangle B'F'D$ 为等腰三角形,

$$\therefore B'D = B'F' = 3,$$

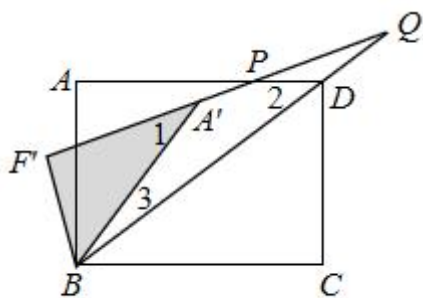
$$\therefore BB' = BD - B'D = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}, \quad \text{即 } m = \frac{16}{3}.$$

【小问3详解】

存在. 理由如下:

在旋转过程中, 等腰 DPQ 依次有以下4种情形:

① 如答图3-1所示, 点 Q 落在 BD 延长线上, 且 $PD = DQ$, 易知 $\angle 2 = 2\angle Q$,



答图3-1

$$\because \angle 1 = \angle 3 + \angle Q, \quad \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle Q,$$

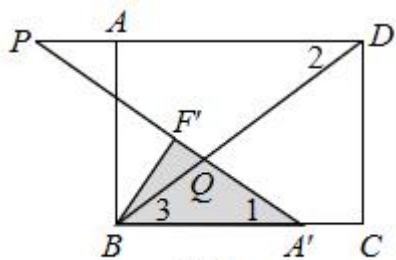
$$\therefore A'Q = A'B = 5,$$

$$\therefore F'Q = F'A' + A'Q = 4 + 5 = 9.$$

在 $Rt\triangle BF'Q$ 中, 由勾股定理得: $BQ = \sqrt{F'Q^2 + F'B^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}.$

$$\therefore DQ = BQ - BD = 3\sqrt{10} - \frac{25}{3};$$

② 如答图3-2所示, 点 Q 落在 BD 上, 且 $PQ = DQ$, 易知 $\angle 2 = \angle P$,



答图3-2

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle P,$$

$\therefore BA' \parallel PD$, 则此时点 A' 落在 BC 边上.

$$\because \angle 3 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1,$$

$$\therefore BQ = A'Q,$$

$$\therefore F'Q = F'A' - A'Q = 4 - BQ.$$

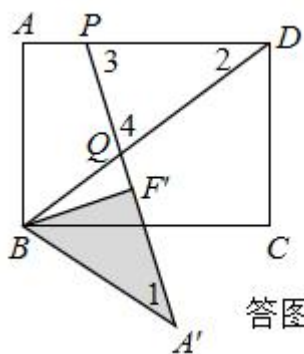
在 $Rt\triangle BQF'$ 中, 由勾股定理得: $BF'^2 + F'Q^2 = BQ^2$,

$$\text{即: } 3^2 + (4 - BQ)^2 = BQ^2,$$

$$\text{解得: } BQ = \frac{25}{8},$$

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - \frac{25}{8} = \frac{125}{24};$$

③ 如答图3-3所示, 点 Q 落在 BD 上, 且 $PD = DQ$, 易知 $\angle 3 = \angle 4$.



答图3-3

$$\because \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ, \quad \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 2.$$

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1.$$

$$\therefore \angle A'QB = \angle 4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1,$$

$$\therefore \angle A'BQ = 180^\circ - \angle A'QB - \angle 1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1,$$

$$\therefore \angle A'QB = \angle A'BQ,$$

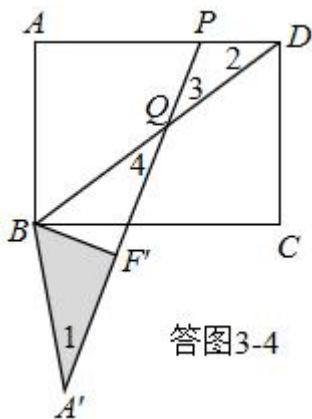
$$\therefore A'Q = A'B = 5,$$

$$\therefore F'Q = A'Q - A'F' = 5 - 4 = 1.$$

在 $Rt\triangle BF'Q$ 中, 由勾股定理得: $BQ = \sqrt{F'Q^2 + F'B^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - \sqrt{10};$$

④ 如答图3-4所示, 点 Q 落在 BD 上, 且 $PQ=PD$, 易知 $\angle 2=\angle 3$.



$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \quad \angle 3 = \angle 4, \quad \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4,$$

$$\therefore BQ = BA' = 5,$$

$$\therefore DQ = BD - BQ = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}.$$

综上所述, 存在4组符合条件的点 P 、点 Q , 使 DPQ 为等腰三角形;

DQ 的长度分别为 $3\sqrt{10}-\frac{25}{3}$ 、 $\frac{125}{24}$ 、 $\frac{25}{3}-\sqrt{10}$ 或 $\frac{10}{3}$

【点睛】本题是几何变换压轴题，涉及旋转与平移变换、矩形、勾股定理、等腰三角形等知识点，第（3）问难度很大，解题关键是画出各种旋转图形，依题意进行分类讨论；在计算过程中，注意识别旋转过程中的不变量，注意利用等腰三角形的性质简化计算.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能