

2023 学年第二学期八年级数学学科期中练习

(考试时间 90 分钟, 满分 150 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 一次函数 $y = -\frac{3}{2}x + 1$ 的图像一定不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的性质得 $k = -1 < 0$, 图像经过第二、四象限, 当 $b = 2 > 0$, 图像与 y 轴的交点在 x 的上方, 可以得到一次函数 $y = -x + 2$ 的图像经过第一、二、四象限.

【详解】 $\because k = -\frac{3}{2} < 0$, 图像经过第二、四象限,

$b = 1 > 0$, 图像与 y 轴的交点在 x 的上方, 图像经过第一象限,

$\therefore$ 一次函数 $y = -\frac{3}{2}x + 1$ 的图像经过第一、二、四象限,

即一次函数 $y = -\frac{3}{2}x + 1$ 的图像一定不经过第三象限.

故选: C.

【点睛】本题考查了一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的性质: 当 $k > 0$, 图像经过第一、三象限, y 随 x 增大而增大; 当 $k < 0$, 图像经过第二、四象限, y 随 x 增大而减小; 当 $b > 0$, 图像与 y 轴的交点在 x 的上方; 当 $b = 0$, 图像经过原点; 当 $b < 0$, 图像与 y 轴的交点在 x 的下方.

2. 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $\sqrt{x-2} + 3 = 0$ B. $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ C. $2x^4 + 3 = 0$ D. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的非负性可对 A 、 C 作出判断, 根据分式方程的求解可对 B 作出判断, 计算一元二次方程判别式的值可对 D 作出判断.

【详解】解: 由于 $\sqrt{x-2} \geq 0, 2x^4 \geq 0$, 故 A 和 C 都没有实数根, 不符合题意;

B 、方程两边同乘 $x-2$ 可得: $x=2$,

把 $x=2$ 代入原方程, 原方程无意义, 故原方程无实数根, 不符合题意;

D、计算原方程的判别式为：

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0,$$

故原方程有实数根，符合题意，

故选 D.

【点睛】 本题考查方程有无实数根的判断，熟练掌握二次根式和实数的偶次方的非负性、分式方程的求解与检验、一元二次方程判别式的求法及应用是解题关键 .

3. 对于二项方程 $ax^n + b = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)，当 n 为偶数时，已知方程有两个实数根，那么 ab 一定 ()

- A. $ab < 0$ B. $ab > 0$ C. $ab \geq 0$ D. $ab \leq 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据 n 为偶数时，方程有两个实数根，得出 $-\frac{b}{a} > 0$ 即可.

【详解】 $ax^n + b = 0$,

可得: $x^n = -\frac{b}{a}$,

因为当 n 为偶数时，已知方程有两个实数根，

所以 $-\frac{b}{a} > 0$,

所以 $ab < 0$,

故选: A.

【点睛】 此题考查高次方程的问题，关键是根据 n 为偶数时，方程有两个实数根得出 ab 的范围.

4. 在一个凸多边形中，它的内角中最多有 n 个锐角，则 n 为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的内角和外角和，根据任意凸多边形的外角和是 360° ，内角与其相邻的外角是邻补角的关系，可知它的外角中，最多有 3 个钝角，则内角中，最多有 3 个锐角，即可求解.

【详解】 解: $\because$ 任意凸多边形的外角和是 360° ,

$\therefore$ 外角中最多有 3 个钝角，则内角中，最多有 3 个锐角.

故选: B.

5. 点 A 、 B 、 C 、 D 在一个平面内，若从① $AB \parallel CD$ ；② $AB = CD$ ；③ $BC \parallel AD$ ；④ $BC = AD$. 这四个条件中选两个，但不能推导出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的选项是 ()

A. ①②

B. ①④

C. ②④

D. ①③

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定方法逐一分析即可.

【详解】解: 两组对边分别平行的四边形是平行四边形, 可选①③; 故 D 不符合题意;

两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 可选②④; 故 C 不符合题意;

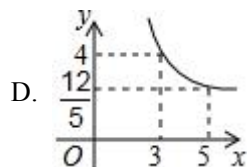
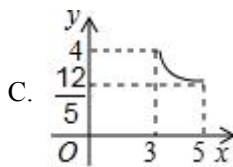
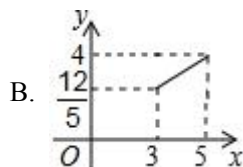
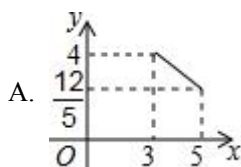
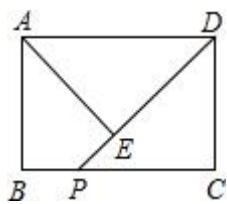
一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 可选①②或③④; 故 A 不符合题意;

一组对边平行另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形. 故 B 符合题意;

故选 B.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定, 熟练掌握判定定理是解题的关键. 平行四边形共有五种判定方法, 记忆时要注意技巧; 这五种方法中, 一种与对角线有关, 一种与对角有关, 其他三种与边有关.

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, 点 P 在 BC 边上运动, 连接 DP , 过点 A 作 $AE \perp DP$, 垂足为 E , 设 $DP=x$, $AE=y$, 则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图象是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】首先连接 AP , 根据矩形的性质可得 $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形 } ABCD}$, 再代入相应数值可得 y 与 x 之间函数关系式, 即可判断最终结果.

【详解】解: 如图, 连接 AP , $\because AE \perp DP$,

$$\therefore S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} DP \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot AB,$$

 $\because AB=3$, $BC=4$,

$$\therefore S_{\triangle APD} = 6,$$

又 $\because DP=x$, $AE=y$,

$$\therefore \frac{1}{2}xy = 6, \quad xy = 12,$$

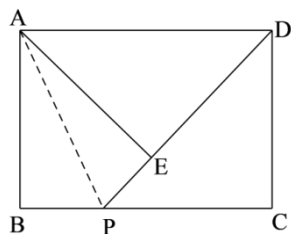
$$\therefore y = \frac{12}{x},$$

$$\because AB \leq DP \leq BD,$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 5,$$

根据解析式和自变量取值范围可知 C 符合题意.

故选: C.



【点睛】此题主要考查了矩形的性质，涉及反比例函数的表达式，利用 $\triangle APD$ 面积的不同表示方法求得 y 与 x 的函数关系是解决本题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 直线 $y = x - 4$ 的截距是__.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数截距的概念，熟悉截距的概念是解题的关键. 直线 $y = kx + b$ 与 y 轴相交于点 $(0, b)$ ， b 叫做直线 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距，简称截距. 根据定义求解即可.

【详解】 解: $\because y = x - 4$ 与 y 轴的交点为 $(0, -4)$,

$\therefore$ 直线 $y = x - 4$ 的截距是 -4 .

故答案为: -4 .

8. 方程 $x^2 = 4$ 的解是_____.

【答案】 $x = \pm 2$

【解析】

【分析】 直接运用开平方法解答即可.

【详解】 解: $\because x^2 = 4$

$$\therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

故答案为 $x = \pm 2$.

【点睛】 本题主要考查了运用开平方法求解一元二次方程，牢记运用开平方法求的平方根而不是算术平方

根是解答本题的关键，也是解答本题的易错点.

9. 方程 $\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0$ 的解是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 先把分式方程化为整式方程，即可求解，

本题考查的是解分式方程，解题的关键是：解得未知数的值时一定要验根.

【详解】 解：原方程可化为： $\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 0$,

去分母得， $x^2 - 1 = 0$ ，解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ ，

当 $x = 1$ 时， $x - 1 = 0$ ，故 $x = 1$ 是原分式方程的增根，

当 $x = -1$ 时， $x - 1 = -2$ ，故 $x = -1$ 是原分式方程的根.

故答案为：-1.

10. 方程 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，能把解无理方程转化成解有理方程是解此题的关键，注意解无理方程一定要进行检验. 根据 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ 得出 $x - 4 = 0$ 或 $x - 1 = 0$ ，求出 x 的值，再进行检验即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x-1} = 0$ ，

$\therefore x - 4 = 0$ 或 $x - 1 = 0$ ，

解得： $x = 4$ 或 $x = 1$ ，

经检验 $x = 4$ 是原方程的解， $x = 1$ 不是原方程的解，

所以原方程的解是 $x = 4$ ，

故答案为： $x = 4$.

11. 用换元法解方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 3 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 1 \end{cases}$ ，若设 $\frac{1}{x+y} = u$ ， $\frac{1}{x-y} = v$ ，则原方程组可化为方程组_____.

【答案】 $\begin{cases} u + 5v = 3 \\ 4v - 3u = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解方程组，熟练掌握换元法是解题关键. 将 $\frac{1}{x+y}=u$ ， $\frac{1}{x-y}=v$ 代入原方程组即可.

【详解】 将 $\frac{1}{x+y}=u$ ， $\frac{1}{x-y}=v$ 代入原方程组
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 3 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 1 \end{cases},$$

得:
$$\begin{cases} u+5v=3 \\ 4v-3u=1 \end{cases}.$$

故答案为:
$$\begin{cases} u+5v=3 \\ 4v-3u=1 \end{cases}.$$

12. 已知 $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$ 是方程 $a^2x+by+3=0$ 的两个解, 则 $a^2+b=$ __.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了方程的解的定义, 理解方程解的定义是解题的关键. 将 $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$ 代入方程

$a^2x+by+3=0$, 求出 a, b 的值即可求解.

【详解】 将 $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$ 代入方程 $a^2x+by+3=0$ 得,

$$\begin{cases} 3b+3=0 \\ a^2+7b+3=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=-1 \\ a^2=4 \end{cases},$$

$$\therefore a^2+b=4-1=3.$$

故答案为: 3.

13. 已知一次函数 $y=(2k-1)x+k$ 的函数值 y 随 x 的值增大而增大, 那么 k 的取值范围是__.

【答案】 $k > \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握其性质是解题的关键. 对于一次函数 $y=kx+b$, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 解不等式即可.

【详解】 $\because y = (2k-1)x + k$ 的函数值 y 随 x 的值增大而增大,

$$\therefore 2k-1 > 0$$

$$\text{解得 } k > \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } k > \frac{1}{2}.$$

14. 将直线 $y = 3x + 2$ 沿 y 轴向下平移_____个单位, 那么平移后直线就经过点 $(0, -1)$.

【答案】3

【解析】

【分析】设平移后的直线解析式为 $y = 3x + b$, 根据直线的平移后直线就经过点 $(0, -1)$, 求得 b 的值进而即可求解.

【详解】解: 设平移后的直线解析式为 $y = 3x + b$,

$\because$ 平移后直线就经过点 $(0, -1)$

$$\therefore b = -1$$

$\therefore$ 平移后的直线解析式为 $y = 3x - 1$

$\therefore$ 直线 $y = 3x + 2$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位可得 $y = 3x + 2 - 3$,

即 $y = 3x - 1$,

故答案为: 3

【点睛】此题主要考查了一次函数图象的几何变换, 关键是掌握直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴平移后, 函数解析式的 k 值不变, b 值上移加、下移减.

15. 学校用 360 元钱到商场去购买消毒液, 经过还价, 每瓶便宜 1 元, 结果比用原价多买了 18 瓶, 求原价每瓶多少元? 若设原价每瓶 x 元, 则可列出方程为_____.

$$\text{【答案】 } \frac{360}{x-1} - \frac{360}{x} = 18$$

【解析】

【分析】由原价及还价后每瓶便宜 1 元, 可得出还价后每瓶 $(x-1)$ 元, 利用数量=总价 $\div$ 单价, 结合结果比用原价多买了 18 瓶, 即可得出关于 x 的分式方程, 此题得解.

【详解】 $\because$ 经过还价, 每瓶便宜 1 元, 且原价为每瓶 x 元,

$\therefore$ 还价后每瓶 $(x-1)$ 元.

$$\text{依题意得: } \frac{360}{x-1} - \frac{360}{x} = 18.$$

故答案为: $\frac{360}{x-1} - \frac{360}{x} = 18$.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 找准等量关系, 正确列出分式方程是解题的关键.

16. 若直线 $y = mx - 2$ 经过点 $(4, 2)$, 则该直线与两坐标轴围成的三角形的面积为__.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数; 先将点 $(4, 2)$ 代入解析式, 求出 m 的值, 再分别求出直线与两坐标轴的交点, 即可求出三角形的面积.

【详解】 将点 $(4, 2)$ 代入 $y = mx - 2$, 得 $4m - 2 = 2$, 解得: $m = 1$

$$\therefore y = x - 2$$

当 $x = 0$ 时, $y = -2$

当 $y = 0$ 时, $x = 2$

$$\therefore \text{该直线与两坐标轴围成的三角形的面积为 } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

故答案为: 2.

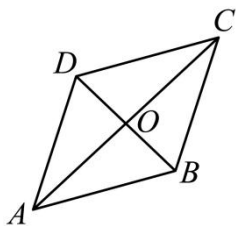
17. 菱形的边长为 10, 一条对角线为 16, 它的面积是_____.

【答案】 96

【解析】

【分析】 本题主要菱形的性质和面积公式, 勾股定理. 根据菱形的性质得到以及勾股定理求出另一条对角线的长, 然后根据菱形的面积公式计算求值.

【详解】 解: 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 边 $AB = 10$, 对角线 $AC = 16$, 对角线交于点 O ,



$$\therefore OA = \frac{1}{2} AC = 8, \quad BD = 2OB, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 6,$$

$$\therefore BD = 2OB = 12,$$

$$\therefore \text{它的面积是 } \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96.$$

故答案为: 96

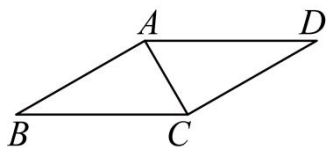
18. 如果把对角线与一边垂直的平行四边形成为“联想平行四边形”，现有一个“联想平行四边形”的一组邻边长为 4 和 $2\sqrt{3}$ ，那么它的最小内角为 _____度.

【答案】 30

【解析】

【分析】 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB=2\sqrt{3}$ ， $BC=4$ 时， $\angle B$ 最小，根据含 30° 角的直角三角形的性质即可求解.

【详解】 如图所示：



在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB=2\sqrt{3}$ ， $BC=4$ 时， $\angle B$ 最小，

由勾股定理得： $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ，

故答案为： 30.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质、“联想平行四边形”、勾股定理、含 30° 角的直角三角形的性质；熟练掌握“联想平行四边形”的性质，根据含 30° 角的直角三角形的性质求出 $\angle B=30^\circ$ ，是解题的关键.

三、简答题：（本大题共 5 题，第 19-22 题 10 分，第 23 题 12 分，满分 52 分）

19. 解方程： $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x} = 1$.

【答案】 原方程的解为： $x_1 = 4$ ， $x_2 = -3$

【解析】

【分析】 方程两边同乘 $x(x-3)$ ，得到一个一元二次方程，利用因式分解法即可求解.

【详解】 方程两边同乘 $x(x-3)$ ，得 $2x - 4(x-3) = x(x-3)$ ，

整理，得 $x^2 - x - 12 = 0$ ，即 $(x-4)(x+3) = 0$ ，

解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = -3$ ，

经检验，当 $x = 4$ 或 $x = -3$ 时， $x(x-3) \neq 0$ ，

$\therefore$ ，原方程的解为： $x_1 = 4$ ， $x_2 = -3$.

【点睛】 本题主要考查了解可化为一元二次方程的分式方程，熟练掌握一元二次方程的因式分解法是解答本题的关键. 解分式方程时，注意对所得的根进行检验.

20. 解方程: $\sqrt{x+1} + 2x = 1$.

【答案】 $x=0$

【解析】

【分析】 移项后两边平方，然后解关于 x 的一元二次方程，再检验即可.

【详解】 解： 移项，得 $\sqrt{x+1} = 1 - 2x$,

两边平方，得 $x+1 = 1 - 4x + 4x^2$,

解得: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$,

经检验 $x=0$ 是原方程的解, $x = \frac{5}{4}$ 不是原方程的解,

所以原方程的解是 $x=0$.

【点睛】 本题考查了解无理方程，各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想——转化，把未知转化为已知.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{3} \\ y_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 先把两个方程分别因式分解，再分类讨论即可.

【详解】 原方程组可以化为:
$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \cdots \textcircled{1} \\ (x+2y)^2 = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由方程①得: $x+y=0$ 或 $x-y=0$

当 $x+y=0$ 时, $x=-y$, 代入方程②得: $(-y+2y)^2 = 1$

解得 $y = \pm 1$

此时方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

当 $x - y = 0$ 时, $x = y$, 代入方程②得: $(y + 2y)^2 = 1$

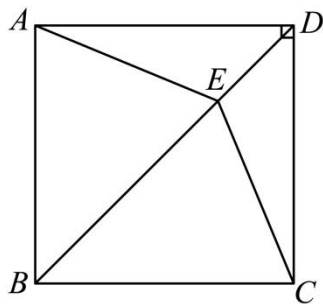
解得 $y = \pm \frac{1}{3}$

此时方程组的解为 $\begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{3} \\ y_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

综上所述方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{3} \\ y_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

【点睛】 本题考查二元二次方程组的解法, 解题的关键是先利用因式分解处理方程组, 转换成我们熟悉的一次方程, 需要注意分类讨论不重不漏.

22. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = CD$, E 是对角线 BD 上一点, 且 $EA = EC$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ (SSS), 可得 $\angle ADE = \angle CDE$, 进而可得 $\angle ADB = \angle CDB = 45^\circ$, 根据 $AD \parallel BC$, 可得 $\angle ADB = \angle DBC = 45^\circ$, 即有 $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$, $CD = CB$, 则有 $AD = CB$, 即可证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 结合 $\angle ADC = 90^\circ$, 可得四边形 $ABCD$ 是矩形, 问题随之得证.

【详解】 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} DA = DC \\ DE = DE, \\ AE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$ (SSS),

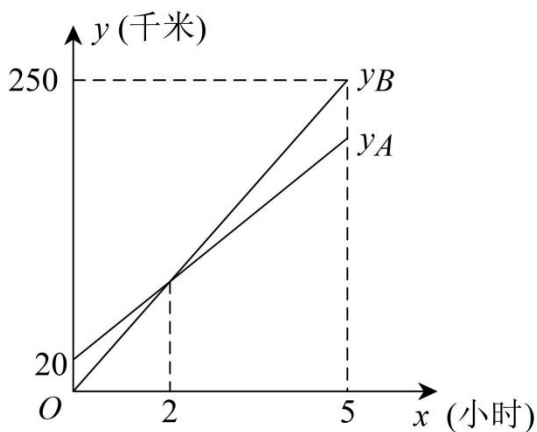
$\therefore \angle ADE = \angle CDE$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADB = \angle CDB = 45^\circ$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADB = \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$,
 $\therefore CD = CB$,
 $\therefore AD = CD$,
 $\therefore AD = CB$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\because \angle ADC = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\because AD = DC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的性质，平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质以及正方形的判定等知识，证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，是解答本题的关键.

23. A 团队接到抗疫任务，乘坐巴士从甲地出发赶往乙地执行任务，甲乙两地距离为 340 千米. 他们出发后不久， B 专家也接到命令须赶往当地进行支援，他乘坐轿车前往. 设 A 团队走的路程为 y_A (千米)， B 专家走的路程为 y_B (千米)，他们前进的时间 (从 B 出发开始计时) 为 x (小时)， y_A 、 y_B 与 x 之间的部分函数图像如图所示.



- (1) 在 B 专家出发时， A 团队已经行进了 ____ 千米； B 专家的速度是每小时 ____ 千米.
- (2) 当 $0 \leq x \leq 5$ 时，求 y_A 关于 x 的函数解析式；
- (3) 如果 5 个小时后， B 专家保持之前的速度继续前进， A 团队提高速度去追赶 B ，提速后的速度是每小时 70 千米，请问 A 团队能否在 B 专家到达乙地之前追上他？如果能够追上，求出此时他们离乙地的距离；

如果不能, 请说明理由.

【答案】(1) 20, 50;

(2) $y = 40x + 20$;

(3) A 团队能在 B 专家到达乙地之前追上他, 此时他们离乙地的距离是 15 千米.

【解析】

【分析】(1) 根据图像可知: B 专家出发时, A 团队已经行进了 20 千米, 然后再求出 B 专家的速度即可;

(2) 由图像可知, B 专家出发后 2 小时追上 A 团队, 此时离甲地 $2 \times 50 = 100$ (千米), 然后再运用待定系数法求得一次函数的解析式即可;

(3) 先根据题意求出 A 团队的速度, 进而求得 A 团队走的路程为 y_A , B 专家走的路程为 y_B , 再求得 A 团队追上 B 专家所需的时间, 然后求出追上时 B 专家走的路程, 最后用总路程减去即可.

【小问 1 详解】

解: (1) 由图像可知: B 专家出发时, A 团队已经行进了 20 千米,

B 专家的速度是 $250 \div 5 = 50$ (千米/小时),

故答案为: 20, 50.

【小问 2 详解】

解: 由图像可知, B 专家出发后 2 小时追上 A 团队, 此时离甲地 $2 \times 50 = 100$ (千米),

设当 $0 \leq x \leq 5$ 时, y_A 关于 x 的函数解析式是 $y = kx + 20$, 将 $(2, 100)$ 代入得:

$$2k + 20 = 100,$$

解得 $k = 40$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, y_A 关于 x 的函数解析式是 $y = 40x + 20$.

【小问 3 详解】

解: 由题意得, A 团队的速度是 $(100 - 20) \div 2 = 40$ (千米/小时),

当 $x = 5$ 时, $y_A = 40 \times 5 + 20 = 220$, $y_B = 250$,

所以 A 团队追上 B 专家所需的时间为 $30 \div (70 - 50) = 1.5$ (小时),

当 $x = 1.5 + 5 = 6.5$ 时, $y_B = 50 \times 6.5 = 325$,

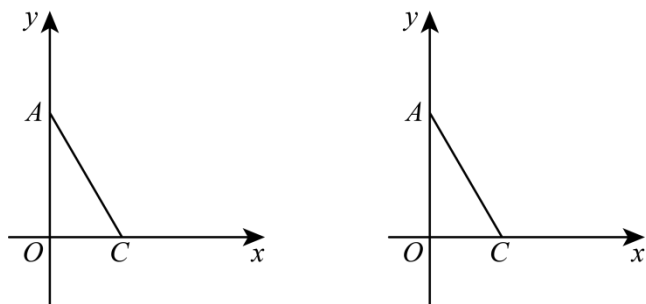
$$340 - 325 = 15 \text{ (千米)},$$

答: A 团队能在 B 专家到达乙地之前追上他, 此时他们离乙地的距离是 15 千米.

【点睛】本题主要考查了一次函数的应用、一次函数的图像等知识点, 正确从一次函数图像获取信息成为解答本题的关键.

四、解答题: (本题 12 分)

24. 如图，已知点 $A(0,6)$ ，点 $C(3,0)$ ，将线段 AC 绕点 C 顺时针旋转 90° ，点 A 落在点 B 处，点 D 是 x 轴上一动点.



- (1) 求直线 BC 的解析式；
- (2) 连结 B 、 D ，若 $BD \parallel AC$ ，求点 D 的坐标；
- (3) 连结 A 、 D 交线段 BC 于点 Q ，且 $\angle OAC = \angle CAQ$ ，求 $\triangle BCD$ 的面积.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(2) $(\frac{21}{2}, 0)$

(3) $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图象及性质，熟练掌握一次函数的图象及性质，三角形全等的判定及性质，角平分线的性质，勾股定理是解题的关键.

(1) 过 B 点作 $BM \perp x$ 轴交于 M ，证明 $\triangle ACO \cong \triangle CBM$ (AAS)，求出 $B(9,3)$ ，再由待定系数法求函数的解析式即可；

(2) 求出直线 AC 的解析式，由 $BD \parallel AC$ ，可设直线 BD 的解析式为 $y = -x + m$ ，将点 $B(9,3)$ 代入求解即可；

(3) 作 O 点关于直线 AC 的对称点 E ，连接 AE 与 x 轴交于 D ，与线段 BC 交于 Q ，设 $CD = y$ ， $ED = x$ ，由勾股定理得， $36 + (3+y)^2 = (6+x)^2$ ①， $y^2 = 9 + x^2$ ②，联立①②可得 $x = 4$ ， $y = 5$ ，即可求 $D(8,0)$ ，再求三角形的面积即可.

【小问 1 详解】

如图 1，过 B 点作 $BM \perp x$ 轴交于 M ，

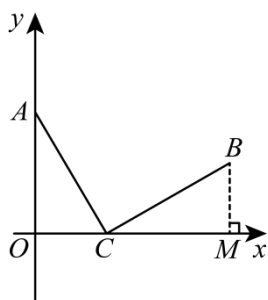


图1

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCM = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACO + \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCM = \angle OAC,$$

$$\because AC = BC, \quad \angle AOC = \angle CMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle CBM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BM = OC, \quad CM = AO,$$

$$\because A(0, 6), \quad C(3, 0),$$

$$\therefore BM = 3, \quad CM = 6,$$

$$\therefore B(9, 3),$$

设直线 CB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 9k + b = 3 \\ 3k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

设直线 AC 的解析式为 $y = k'x + b'$,

$$\therefore \begin{cases} b' = 6 \\ 3k' + b' = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k' = -2 \\ b' = 6 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x + 6,$$

$$\because BD \parallel AC,$$

设直线 BD 的解析式为 $y = -2x + m$,

$$\because B(9,3),$$

$$\therefore -18 + m = 3,$$

解得 $m = 21$,

$$\therefore y = -2x + 21,$$

当 $y = 0$ 时, 则有 $-2x + 21 = 0$,

$$\text{解得: } x = \frac{21}{2},$$

$$\therefore D\left(\frac{21}{2}, 0\right);$$

【小问 3 详解】

如图 2, 作 O 点关于直线 AC 的对称点 E , 连接 AE 与 x 轴交于 D , 与线段 BC 交于 Q ,

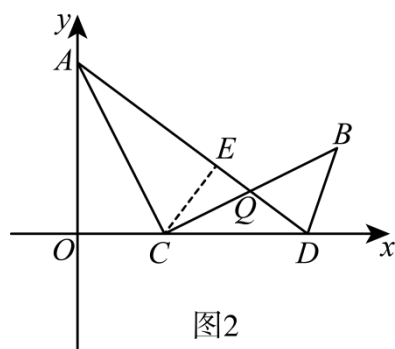


图2

由对称性可知, $\angle OAC = \angle CAE$,

$$\because A(0,6), C(3,0),$$

$$\therefore OA = AE = 6, OC = CE = 3,$$

设 $CD = y$, $ED = x$,

$$\therefore 36 + (3 + y)^2 = (6 + x)^2 \text{ ①, } y^2 = 9 + x^2 \text{ ②,}$$

联立①②可得 $x = 4$, $y = 5$ (不合题意的值已舍去),

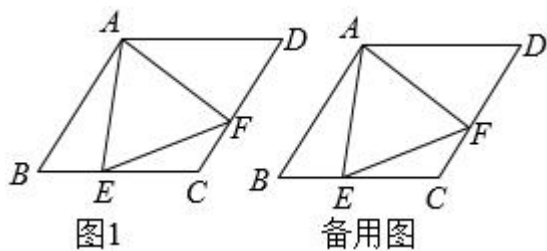
$$\therefore CD = 5,$$

$$\therefore D(8,0),$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}.$$

五、综合应用题: (本题 14 分)

25. 已知: 如图菱形 $ABCD$, 点 E, F 分别为边 BC, CD 上的动点 (不与端点重合), 且 $\angle EAF = \angle B = 60^\circ$.



- (1) 求证: $AE=AF$;
- (2) 如果 $AB=8$, 设 $BE=x$, $AE=y$, 求 y 与 x 的函数关系式和定义域;
- (3) 在 (2) 的基础上, 当 x 取何值时, $S_{\triangle AEF}$ 与 $S_{\triangle CEF}$ 面积比值为 7.

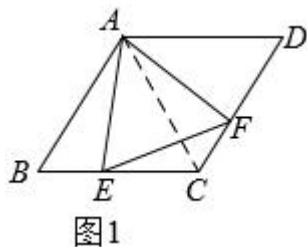
【答案】(1) 见解析 (2) $y=\sqrt{x^2-8x+64}$ ($0 < x < 8$)

(3) 当 $x=4\pm 2\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle AEF}$ 与 $S_{\triangle CEF}$ 面积比值为 7

【解析】

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, 连接 AC ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=BC=CD=AD$, $\angle B=\angle D=60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AC$, $\angle B=\angle ACD=60^\circ=\angle BAC$,

$\therefore \angle EAF=\angle BAC=60^\circ$,

$\therefore \angle BAE=\angle CAF$,

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE=\angle CAF \\ AB=AC \\ \angle B=\angle ACF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (ASA),

$\therefore AE=AF$;

【小问 2 详解】

解：如图 2，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，

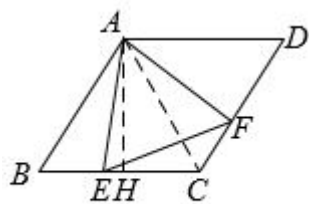


图2

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $AH \perp BC$ ， $AB=8=BC$ ，

$\therefore BH=CH=4$ ， $\angle BAH=30^\circ$ ，

$\therefore AH=4\sqrt{3}$ ，

$\because AE^2 = AH^2 + EH^2$ ，

$\therefore y^2 = 48 + (4-x)^2$ ，

$\therefore y = \sqrt{x^2 - 8x + 64}$ ($0 < x < 8$)；

【小问 3 详解】

解：由 (1) 可知： $\triangle ABE \cong \triangle CAF$ ，

$\therefore BE=CF=x$ ， $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CAF}$ ，

$\because S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACF} - S_{\triangle ACF} - S_{\triangle AFE}$ ，

$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times AE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (64 - x^2 + 8x - 64) = \frac{\sqrt{3}}{4} (8x - x^2)$ ，

$\because S_{\triangle AEF}$ 与 $S_{\triangle CEF}$ 面积比值为 7，

$\therefore S_{\triangle AEF} = 7S_{\triangle CEF}$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2 - 8x + 64) = 7 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (8x - x^2)$ ，

$\therefore x = 4 \pm 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 当 $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$ 时， $S_{\triangle AEF}$ 与 $S_{\triangle CEF}$ 面积比值为 7.

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质与判定，勾股定理，函数关系式，解一元二次方程，掌握以上知识是解题的关键.