

上海市进才中学北校 2023-2024 学年八年级下学期期中数学试题

(考试时间 100 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x} + 1$

B. $y = \sqrt{x} + 1$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = 2x$

【答案】D

【解析】

【分析】一般地, 形如: $y = kx + b (k \neq 0)$, k, b 为常数, 则 y 是 x 的一次函数, 由一次函数的定义可得答案.

【详解】解: A、 $y = \frac{1}{x} + 1$ 是反比例函数, 故本选项错误;

B、 $y = \sqrt{x} + 1$ 不是一次函数, 故本选项错误;

C、 $y = x^2 + 1$ 是二次函数, 故本选项错误;

D、 $y = 2x$ 是正比例函数, 是一次函数, 故本选项正确.

故选: D.

【点睛】本题考查的是一次函数的定义, 即一般地, 形如 $y = kx + b (k \neq 0)$, k, b 为常数, 则 y 是 x 的一次函数, 掌握定义是解题关键.

2. 下列关于 x 的方程中, 一定有实数根的是 ()

A. $x^2 + 1 = 0$

B. $\sqrt{x} = -x$

C. $\sqrt{x^2} + 3 = 0$

D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了无理方程, 一元二次方程, 分式方程, 分别解方程, 即可求解.

【详解】解: A. $x^2 + 1 = 0$, $\therefore x^2 = -1$, $\because x^2 \geq 0$

$\therefore$ 原方程无实数解;

B. $\sqrt{x} = -x \because x \geq 0, -x \geq 0$, 则 $x = 0$,

C. $\sqrt{x^2} + 3 = 0$, 移项得, $\sqrt{x^2} = -3$, $\because \sqrt{x^2} \geq 0$,

$\therefore$ 原方程无实数根,

D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, 去分母得 $x=1$, 检验: $x-1=0$, $x=1$ 是原方程的增根, 原方程无解;

故选: B.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 + y = \sqrt{2}$ 是二元二次方程

B. $x^2 - x = 0$ 是二项方程

C. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $\frac{x^2 - x}{x} = \sqrt{2}$ 是无理方程

【答案】 A

【解析】

【分析】 利用无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义分别进行判断即可得到答案.

【详解】 解: A、含有两个未知数, 且未知数的最高次数是 2, 故是二元二次方程, 故正确;

B、 $x^2 - x = 0$ 是二次方程, 故错误;

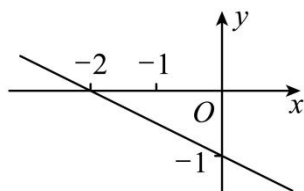
C、分母里不含未知数, 不是分式方程, 故错误;

D、被开方数不含未知数, 不是无理方程, 故错误,

故选: A.

【点睛】 本题考查了无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义, 解题的关键是熟悉这些方程的定义.

4. 如图, 当 x 取何值时, 函数的图象在第三象限 ()



A. $x < -2$

B. $x > -1$

C. $-2 < x < -1$

D. $-2 < x < 0$

【答案】 D

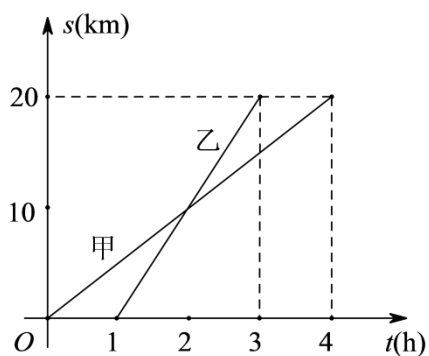
【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的性质, 根据一次函数图象得出答案即可.

【详解】 解: 根据函数图象可知: $-2 < x < 0$ 时, 函数的图象在第三象限.

故选: D.

5. 甲、乙二人沿相同的路线由 A 到 B 匀速行进, A, B 两地间的路程为 20km. 他们行进的路程 $s(\text{km})$ 与甲出发后的时间 $t(\text{h})$ 之间的函数图象如图所示. 根据图中信息, 下列说法中, 不正确的是 ()



- A. 甲的速度是 5 km/h；
 B. 乙的速度是 10 km/h
 C. 乙比甲晚出发 1h
 D. 从 A 到 B，甲比乙多用了 1h

【答案】 D

【解析】

【分析】 由图可得，该图象是路程与时间的关系，乙比甲晚出发一小时且乙的速度比甲的速度快.

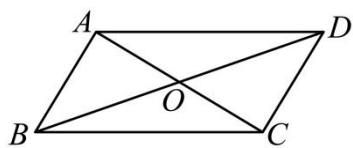
【详解】 解：从图象可知甲乙两人都行驶了 20 千米，用时分别为 4 小时和 2 小时，从而得到甲、乙的速度分别为 5km/h 和 10km/h，故 A、B 正确，D 错误；

从图象可知乙比甲晚出发 1 小时，故 C 正确；

故选：D.

【点睛】此题主要考查了函数的图象，重点考查学生的读图获取信息的能力，要注意分析其中的“关键点”，还要善于分析各图象的变化趋势.

6. 如图，形如 $ABCD$ 的纸片的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，将这张纸片对折后点 B 与点 D 重合，点 A 落在点 E 处，已知 $\angle AOB = 50^\circ$ ，那么 $\angle CEO$ 的度数为 ()



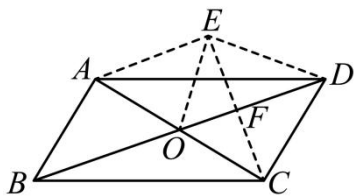
- A. 25° B. 50° C. 40° D. 130°

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了翻折变换的性质以及平行四边形的性质，解决问题的关键是掌握：翻折前后对应边相等、对应角相等，解题时注意：平行四边形的对角线互相平分. 先画出图形，由折叠的性质得出 $\angle AOB = \angle EOD = 50^\circ$ ， $OE = OA$ ，求出 $\angle COE = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得出 $\angle CEO = \angle OCE = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$.

【详解】 解：如图所示：



由折叠的性质可得： $\angle AOB = \angle EOD = 50^\circ$ ， $OE = OA$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore OE = OC,$$

$$\because \angle COF = \angle AOB = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle COF = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle COE = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ,$$

$$\because OE = OC,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle OCE = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 直线 $y = 3x - 2$ 的截距是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，令 $x = 0$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because y = 3x - 2$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -2$

$\therefore$ 直线 $y = 3x - 2$ 的截距是直线 $y = 3x - 2$ 的截距是 -2 ，

故答案为： -2 .

8. 将直线 $y = -x + 2$ 向下平移 5 个单位后，所得直线的表达式为_____.

【答案】 $y = -x - 3$

【解析】

【分析】 根据一次函数平移的特点即可求解.

【详解】 将直线 $y = -x + 2$ 向下平移 5 个单位后，所得直线的表达式为 $y = -x + 2 - 5 = -x - 3$

故答案为： $y = -x - 3$.

【点睛】 此题主要考查一次函数的图像，解题的关键是熟知一次函数平移的特点.

9. 方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，先求 x 的范围，再解此方程得 $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，舍去不符合题意的解即可.

【详解】 解：由题意得 $x-1 \geq 0$,

解得 $x \geq 1$,

原方程可化为： $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$,

解得 $x=-2$ (不合题意，舍去) 或 $x=1$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，原方程成立.

故方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的根是 $x=1$.

故答案为： $x=1$.

10. 用换元法解方程组 $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{6}{1-y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases}$ 时，可设 $\frac{1}{x} = m, \frac{1}{y-1} = n$ ，那么原方程组可化为关于 m 、 n 的整式方

程组为_____.

【答案】 $\begin{cases} 5m+6n=1 \\ m+n=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解方程组，将 $\frac{1}{x} = m, \frac{1}{y-1} = n$ 代入原方程组即可得.

【详解】 解：将 $\frac{1}{x} = m, \frac{1}{y-1} = n$ 代入方程组 $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{6}{1-y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases}$

得： $\begin{cases} 5m+6n=1 \\ m+n=1 \end{cases}$,

故答案为： $\begin{cases} 5m+6n=1 \\ m+n=1 \end{cases}$.

11. 如果一次函数 $y = -x + b$ 的图像不经过第一象限, 那么 b 的取值范围是_____.

【答案】 $b \leq 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的图像的性质, 根据一次函数图像的性质列出关于 b 的不等式组求解即可.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = -x + b$ 的图像不经过第一象限,

$\therefore b \leq 0$,

故答案为: $b \leq 0$.

12. 若点 $A(7, y_1)$ 、点 $B(5, y_2)$ 是直线 $y = \frac{1}{3}x - b$ (b 为常数) 上的点, 则 y_1, y_2 大小关系是_____.

【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 先根据一次函数的解析式判断出一次函数的增减性, 再根据 $7 > 5$ 即可得出结论.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{3}x - b$ (b 为常数) 中, $k = \frac{1}{3} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\because 7 > 5$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: $y_1 > y_2$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 明确一次函数表达式中 k 的意义是解题的关键.

13. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{k}{(x+1)(1-x)}$ 有增根 $x = -1$, 则 k 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 此题考查了根据分式方程的根的情况求参数, 去分母解分式方程得 $x - 1 = x^2 - 1 + k$, 根据分式方程有增根 $x = -1$, 得到 $k = -2$, 计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{k}{(x+1)(1-x)}$

$\therefore \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{k}{(x+1)(x-1)}$

去分母得: $x - 1 = x^2 - 1 + k$

$\therefore$ 分式方程有增根 $x = -1$,

$$\therefore -1 - 1 = 1 - 1 + k,$$

解得: $k = -2$,

故答案为: -2 .

14. 若一个多边形的内角和与外角和之比是 $5:2$, 则这个多边形的边数是_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 设这个多边形的边数是 n , 则内角和为 $180^\circ \times (n - 2)$, 然后根据外角和是 360 度, 即可求得边数.

【详解】 解: 设这个多边形的边数是 n , 则

$$\therefore \frac{180^\circ \times (n - 2)}{360^\circ} = \frac{5}{2}$$

解得 $n = 7$;

故答案为: 7.

【点睛】 本题考查了多边形的计算, 理解多边形的外角和是 360 度, 外角和不随边数的变化而变化是关键.

15. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle A : \angle D = 3 : 2$, 则 $\angle C =$ _____度.

【答案】 108

【解析】

【分析】 根据平行四边形邻角互补的性质可求解.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ.$$

$$\because \angle A : \angle D = 3 : 2,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = 180^\circ \times \frac{3}{5} = 108^\circ.$$

故答案为: 108.

【点睛】 主要考查了平行四边形的基本性质, 并利用性质解题. 平行四边形基本性质: ①平行四边形两组对边分别平行; ②平行四边形的两组对边分别相等; ③平行四边形的两组对角分别相等; ④平行四边形的对角线互相平分.

16. 在已知 $ABCD$ 的周长为 30cm , 它的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 且 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长大 5cm , 则 $AB =$ _____ cm , $BC =$ _____ cm .

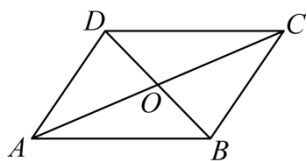
【答案】 ①. 10 ②. 5

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 由“平行四边形 $ABCD$ 的周长为 30cm ” 可得 $AB + BC = 15$, 由

“ $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长大 5cm ” 可得 $AB - BC = 5\text{cm}$ ，解之即可。

【详解】解：如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC, OA = OC,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 30cm ，

$$\therefore AB + BC = 15(\text{cm}),$$

$\because \triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长大 5cm ，

$$\therefore (AB + OA + OB) - (BC + OB + OC) = AB - BC = 5(\text{cm}),$$

解得 $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 5\text{cm}$ 。

故答案为：10，5。

17. $\square ABCD$ 的周长是 32cm ， $\angle ABC$ 的平分线交 AD 所在直线于点 E ，且 $AE:ED = 3:2$ ，则 AB 的长为_____。

【答案】 6cm 或 12cm 。

【解析】

【分析】证 $\triangle ABE$ 是等腰三角形，分“点 E 在线段 AD 上”和“点 E 在 AD 的延长线上”两种情况，分别求得答案即可。

【详解】解：分两种情况：

①点 E 在线段 AD 上，如图 1，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD, AD = BC,$$

$$\therefore AB + AD = \frac{1}{2} \times 32 = 16(\text{cm}), \angle AEB = \angle CBE,$$

$\because \angle ABC$ 的平分线交 AD 所在的直线于点 E ，

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore AE:ED = 3:2,$$

$$\therefore AB:AD = 3:5,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 32cm 。

$\therefore AB$ 的长为: $16 \times \frac{3}{8} = 6$ (cm).

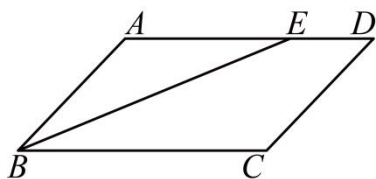


图1

②点 E 在 AD 的延长线上, 如图 2,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AD = BC$,

$\therefore AB + AD = \frac{1}{2} \times 32 = 16$ (cm), $\angle AEB = \angle CBE$,

$\therefore \angle ABC$ 的平分线交 AD 所在的直线于点 E ,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$,

$\therefore AB = AE$,

$\therefore AE : ED = 3 : 2$,

$\therefore AB : AD = 3 : 1$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 32 cm.

$\therefore AB$ 的长为: $16 \times \frac{3}{4} = 12$ (cm);

故答案为: 6 cm 或 12 cm.

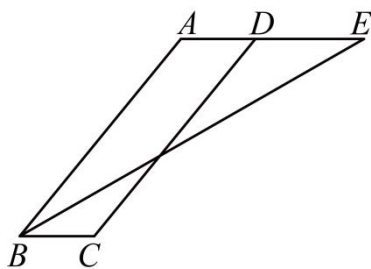
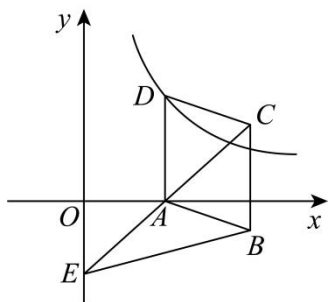


图2

【点睛】 本题考查了平行四边形与角平分线线的综合应用, 熟知以上知识点及应用是解题的关键.

18. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在 x 轴上, 点 D 在 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 上, 且 $AD \perp x$ 轴, CA 的延长

线交 y 轴于点 E . 若 $S_{\triangle ABE} = 5$, 则 $k =$ _____.

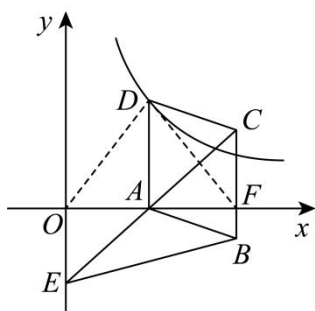


【答案】 10

【解析】

【分析】 设 BC 与 x 轴交于点 F ，连接 DF 、 OD ，由平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，根据三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ODF} = S_{\triangle BCE}$ ， $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ABC}$ ，由 $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle ODF} - S_{\triangle ADF}$ ， $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle ABC}$ ，可得 $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle ABE} = 5$ ，由 k 的几何意义进行计算即可得到答案.

【详解】 解：设 BC 与 x 轴交于点 F ，连接 DF 、 OD ，如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$\because AD \perp x$ ，

$\therefore BC \perp x$ 轴，

$\therefore BC \parallel y$ 轴， $OF \perp BC$ ，

$\because S_{\triangle ODF} = \frac{1}{2} OF \cdot AD$ ， $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot OF$ ， $S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} AF \cdot AD$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AF \cdot BC$ ，

$\therefore S_{\triangle ODF} = S_{\triangle BCE}$ ， $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ABC}$ ，

$\therefore S_{\triangle OAD} = S_{\triangle ODF} - S_{\triangle ADF}$ ， $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle ABC}$ ，

$\therefore S_{\triangle OAD} = S_{\triangle ABE} = 5$ ，

$\because S_{\triangle OAD} = \frac{|k|}{2}$ ，

$$\therefore |k| = 10,$$

$$\because k > 0,$$

$$\therefore k = 10,$$

故答案为：10.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的性质，反比例函数系数 k 的几何意义，三角形的面积计算，熟练掌握平行四边形的性质，反比例函数系数 k 的几何意义，添加适当的辅助线，是解题的关键.

三、解答题（本大题共 9 题，满分 58 分，第 19~26 题每题 6 分，第 27 题 10 分）

19. 解方程： $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} - 1$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，先去分母变分式方程为整式方程，然后再解整式方程，最后对方程的解进行检验即可.

【详解】 解： $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} - 1$,

去分母得： $2 = 1 - x - (1 - x^2)$,

整理得： $x^2 - x - 2 = 0$,

解得： $x_1 = 2$, $x_2 = -1$,

检验：把 $x_1 = 2$ 代入 $(1-x)(1+x)$ 得： $(1+x)(1-x) = (1-2) \times (1+2) = -3 \neq 0$,

把 $x_2 = -1$ 代入 $(1-x)(1+x)$ 得： $(1+x)(1-x) = (1-1) \times (1+1) = 0$,

$\therefore x_1 = 2$ 是原方程的解， $x_2 = -1$ 是原方程的增根，

$\therefore$ 原方程的解为： $x = 2$.

20. 解方程： $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} = 4$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 将方程两边平方整理得到关于 x 的含有根号的无理方程，再次将方程两边平方得到一个一元一次方程，然后求解即可

【详解】 $\sqrt{x+5} = 4 - \sqrt{x-3}$

$$x+5 = 16 - 8\sqrt{x-3} + x-3$$

$$\sqrt{x-3}=1$$

$$x-3=1$$

$$x=4$$

经检验 $x=4$ 是原方程的根,

所以原方程的根为 $x=4$.

【点睛】 本题考查了无理方程, 一元一次方程的解法, 完全平方公式, 二次根式的混合运算, 转化无理方程为一元二次方程是解题的关键.

21. 解关于 x 的方程: $ax-a^2=2x-4$.

【答案】 当 $a \neq 2$ 时, $x=a+2$, 当 $a=2$ 时, 原方程有无数个解

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程, 因式分解, 分 $a \neq 2$, $a=2$, 先移项, 然后因式分解, 进而化系数为 1 的步骤解方程, 即可求解.

【详解】 解: 当 $a-2 \neq 0$ 时, 即 $a \neq 2$ 时,

$$ax-a^2=2x-4,$$

$$\therefore ax-2x=a^2-4,$$

$$\therefore x(a-2)=(a+2)(a-2),$$

解得: $x=a+2$,

当 $a=2$ 时, 原方程为 $2x-4=2x-4$,

原方程有无数个解.

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2-5xy-6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=1 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 将每个方程因式分解, 降次化为两个一次方程, 解出重新组合的方程组即可得到答案.

【详解】 解: $x^2-5xy-6y^2=0$ 可化为 $(x-6y)(x+y)=0$,

$$\therefore x-6y=0 \text{ 或 } x+y=0,$$

$$x^2-4xy+4y^2=1 \text{ 可化为 } (x-2y+1)(x-2y-1)=0,$$

$$\therefore x-2y+1=0 \text{ 或 } x-2y-1=0,$$

原方程组相当于以下四个方程组:

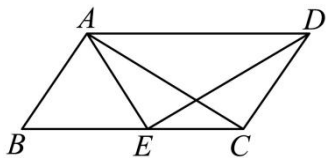
$$\begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{ ①}, \begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \text{ ②}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{ ③}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \text{ ④}$$

解得①②③④分别得: $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases},$

$$\therefore \text{原方程组的解是: } \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

【点睛】 本题考查解二元二次方程组，将每个二次方程因式分解，降次化为两个一次方程是解题的关键.

23. 如图，已知在 $ABCD$ 中， $AB=AE$ ，求证: $AC=ED$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查平行四边形的性质，全等三角形的判定与性质，结合平行四边形的性质，利用 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ 可证明结论;

【详解】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD=BC.$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB.$$

$$\because AB=AE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle B.$$

$$\therefore \angle B = \angle DAE.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AB=AE \\ \angle B = \angle DAE, \\ AD=BC \end{cases}$$

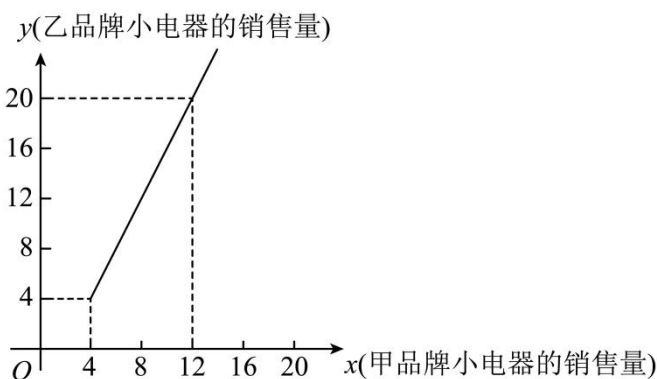
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAD (\text{SAS}),$$

$\therefore AC = ED$;

24. 在 2021 “五五购物节” 中, 某商店的两种品牌的小电器参与促销活动. 经统计后发现, 每天的销售中, 乙品牌小电器的销售数量 y (件) 与甲品牌小电器的销售量 x (件) 符合如图表示的函数关系.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不必写出自变量 x 的取值范围);

(2) 在 5 月 2 日一天的销售中, 甲、乙两种品牌的小电器的销售额分别为 1200 元和 1440 元, 已知甲品牌的小电器单价比乙品牌的小电器单价多 20 元, 求甲、乙两种品牌的小电器的单价. (其中小电器的单价大于 100 元)



【答案】 (1) $y = 2x - 4$; (2) 甲品牌的小电器单价为 200 元, 乙品牌的小电器单价为 180 元

【解析】

【分析】 (1) 根据图象上点的坐标, 利用待定系数法可求出 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 设甲品牌的小电器单价 m 元, 则乙品牌的小电器单价为 $(m-20)$ 元, 根据甲、乙两种品牌的小电器的销售额分别为 1200 元和 1440 元, 即可得出关于 m 的方程组, 解之即可得出结论.

【详解】 解: (1) 设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

将 $(4, 4)$, $(12, 20)$ 代入得:

$$\begin{cases} 4k + b = 4 \\ 12k + b = 20 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = 2 \\ b = -4 \end{cases},$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = 2x - 4$;

(2) 设甲品牌的小电器单价 m 元, 则乙品牌的小电器单价为 $(m-20)$ 元,

依题意得: $\begin{cases} mx = 1200 \\ (m-20)(2x-4) = 1440 \end{cases},$

解得: $m_1 = 200$, $m_2 = 60$.

∵小电器的单价大于 100 元,

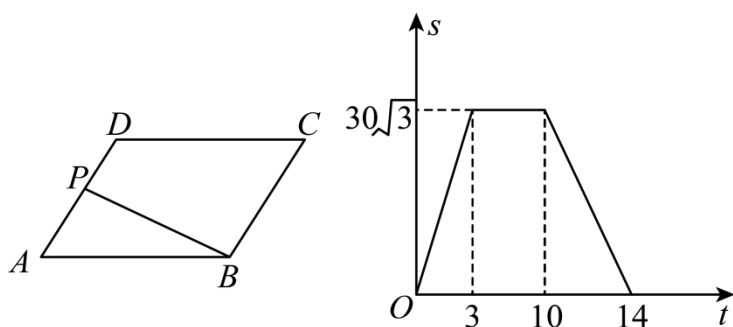
$$\therefore m = 200,$$

$$200 - 20 = 180 \text{ (元)},$$

答: 甲品牌的小电器单价为 200 元, 则乙品牌的小电器单价为 180 元.

【点睛】 本题考查了方程组的应用以及一次函数的应用, 解题的关键是: (1) 根据点的坐标, 利用待定系数法求出 y 关于 x 的函数关系式; (2) 找准等量关系, 正确列出方程组.

25. 如图, $\square ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 P 按 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ 方向运动, 到达点 B 时运动停止, 运动开始时以每秒 2 个长度单位匀速运动, 到达 D 点后, 改为每秒 m 个单位匀速运动, 到达 C 后, 改为每秒 n 个单位匀速运动, 在整个运动过程中, $\triangle ABP$ 的面积 S 与运动时间 t 的函数关系如图所示.



求: (1) 求 AB 、 BC 的长;

(2) 求 m 、 n 的值.

【答案】 (1) 20 (2) 当点 P 在线段 CD 上时 $m = \frac{20}{7}$; 当点 P 在线段 CD 上时 $n = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由图象可知, 当点 P 在 BC 上运动时, 3 秒钟到 C , 有知道 P 的运动速度, 所以可以求出 BC 的长;

(2) 有 (1) 可知 $DC = AB = 10$, $AD = BC = 6$, 结合给出的函数图象即可求出 a 和 b 的值.

【详解】 解: (1) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ,

从图象可知, 当点 P 在 AD 上运动时, 3 秒钟到 C ,

$$\text{所以 } AD = 2 \times 3 = 6,$$

$$\because \angle DAB = 60^\circ, DH \perp AB$$

$$\therefore \angle ADH = 30^\circ,$$

$$\because AD = 6,$$

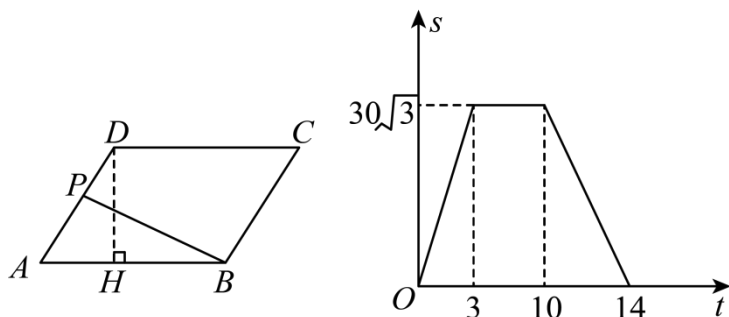
$$\therefore AH = 3, DH = 3\sqrt{3},$$

$\therefore$ 从图象可知, 当 $3 \leq t \leq 10$ 时, $\triangle ABP$ 面积不变为 30,

$$\therefore AB \cdot DH = 30\sqrt{3},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times AB = 30\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 20;$$

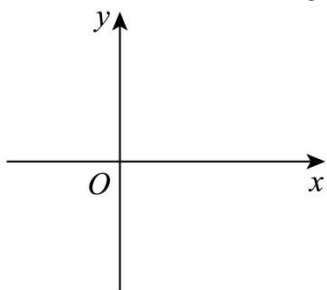


(2) 当点 P 在线段 CD 上时, $t_{CD} = 7$, 则 $m = \frac{20}{7}$;

当点 P 在线段 CB 上时, $t_{CB} = 4$, 则 $n = \frac{3}{2}$.

【点睛】本题是一次函数的综合题, 重点考查了动点问题的函数图象, 考查了学生观察图象的能力和解决问题的能力.

26. 已知: 一次函数 $y = \frac{1}{3}x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在第一象限的交点为 $A(1, n)$.



(1) 求 m 与 n 的值;

(2) 设一次函数的图像与 x 轴交于点 B , C 为 x 轴上一点, 连接 AC , 若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 求 C 的坐标.

【答案】(1) $m = \frac{5}{3}, n = 2$

(2) $(-5 + 2\sqrt{10}, 0)$ 或 $(-5 - 2\sqrt{10}, 0)$ 或 $(-\frac{5}{3}, 0)$ 或 $C(7, 0)$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数的图象与一次函数图象的交点问题, 等腰三角形的定义;

(1) 将点 A 代入反比例函数解析式可得 $n=2$, 进而将 $A(1,2)$ 代入 $y=\frac{1}{3}x+m$ 得, $2=\frac{1}{3}+m$ 得出 $m=\frac{5}{3}$;

(2) 先求点 B 的坐标, 勾股定理求得 AB 的长度, 进而分 $AB=AC, BC=BA, CA=CB$ 三种情况讨论, 结合坐标系, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because A(1,n)$ 在反比例数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,

$$\therefore n=\frac{2}{1}=2,$$

$$\therefore n=2,$$

$$\therefore A(1,2)$$

将 $A(1,2)$ 代入 $y=\frac{1}{3}x+m$ 得, $2=\frac{1}{3}+m$

$$\text{解得: } m=\frac{5}{3}$$

【小问 2 详解】

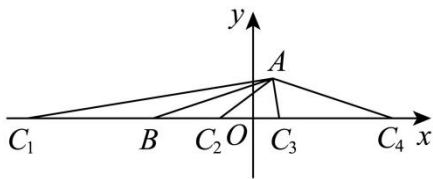
解: 由 (1) 可得 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

当 $y=0$ 时, $x=-5$,

$\therefore$ 一次函数的图像与 x 轴交于点 B ,

$$\therefore B(-5,0),$$

$$\therefore AB=\sqrt{(1+5)^2+2^2}=2\sqrt{10},$$



如图所示, 设 $C(x,0)$,

当 $BC=BA$ 时, 点 C 的坐标为 $(-5+2\sqrt{10},0)$ 或 $(-5-2\sqrt{10},0)$

当 $CB=CA$ 时,

$$\therefore CB=CA,$$

$$\therefore CB^2=CA^2,$$

$$\therefore (x+5)^2=(1-x)^2+2^2,$$

解得: $x = -\frac{5}{3}$;

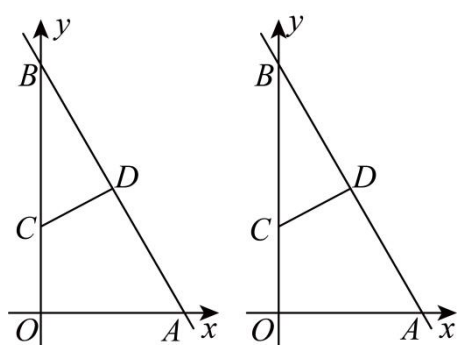
当 $AB = AC$ 时,

$\therefore A(1, 2), x_A - x_B = 6$

$\therefore C(7, 0)$

综上所述满足条件的点 C 坐标为 $(-5 + 2\sqrt{10}, 0)$ 或 $(-5 - 2\sqrt{10}, 0)$ 或 $(-\frac{5}{3}, 0)$ 或 $C(7, 0)$.

27. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(12, 0)$ 、点 $B(0, 12\sqrt{3})$, 点 D 是线段 AB 的中点, 点 $C(0, 4\sqrt{3})$, 点 E 为 x 轴上一动点.



备用图

- (1) 求直线 AB 的表达式, 并直接写出点 D 的坐标;
- (2) 连接 CE 、 DE , 以 CE 、 DE 为边作 $\square CEDF$, $\square CEDF$ 的顶点 F 恰好落在 y 轴上, 求点 F 的坐标;
- (3) 设点 M 是直线 $y = x + 8\sqrt{3}$ 上一点, 若以 C 、 D 、 E 、 M 为顶点的四边形为平行四边形, 请直接写出所有符合条件的点 M 的坐标.

【答案】 (1) 直线 AB 的表达式为 $y = -\sqrt{3}x + 12\sqrt{3}$; 点 D 的坐标为 $(6, 6\sqrt{3})$

(2) $F(0, 10\sqrt{3})$

(3) $M_1(-6\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $M_2(-10\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $M_3(2\sqrt{3}, 10\sqrt{3})$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数表达式的确定以及一次函数和平行四边形的判定的综合运用.

- (1) 利用待定系数法求出直线 AB 的表达式.
- (2) 由于以 CE 、 DE 为边的四边形为平行四边形, 利用平行四边形的性质, 对角线互相平分, 建立方程求解, 即可得出结论;
- (3) ① CD 为平行四边形的对角线 EM 也是这个平行四边形的对角线, 平行四边形的对角线的交点是同一

个点，把点 E 、 M 的坐标设出，利用中点坐标的确定方法，求出 CD 的中点和 EM 得中点，是同一个点，即可，② CD 为以 C 、 D 、 E 、 M 为顶点的四边形为平行四边形的边，利用 $CD \parallel EM$ 且 $CD = EM$ ，即可求出。

【小问 1 详解】

解：设直线的表达式为 $y = kx + b$ ，

$\because$ 直线 AB 与 x 轴， y 轴分别相交于点 $A(12, 0)$ 、点 $B(0, 12\sqrt{3})$ ，

$$\therefore \begin{cases} 12k + b = 0 \\ b = 12\sqrt{3} \end{cases},$$

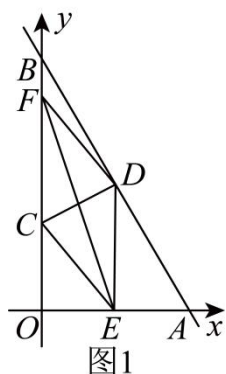
解得， $\begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = 12\sqrt{3} \end{cases}$ ，

即：直线 AB 的表达式为 $y = -\sqrt{3}x + 12\sqrt{3}$ 。

由中点坐标公式得， $D\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12\sqrt{3}}{2}\right)$ ，即 $D(6, 6\sqrt{3})$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 1，



$$\therefore D(6, 6\sqrt{3}), C(0, 4\sqrt{3}),$$

又以 CE 、 DE 为边的平行四边形交 x 轴于 E ，交 y 轴于 F ，设 $E(m, 0)$ 、 $F(0, n)$ ，

$$\therefore \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}(0+6), \quad \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}+6\sqrt{3}),$$

$$\therefore m = 6, \quad n = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore F(0, 10\sqrt{3}).$$

【小问 3 详解】

解：第一种情况： CD 为平行四边形的对角线，

$$\therefore D(6, 6\sqrt{3}), C(0, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore CD \text{ 的中点坐标为 } (3, 5\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 在直线 } y = x + 8\sqrt{3} \text{ 的图象上,}$$

$$\text{设 } M(m, m + 8\sqrt{3}), E(x, 0),$$

$$\therefore ME \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{m+x}{2}, \frac{m+8\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\therefore CD, ME \text{ 为平行四边形的对角线,}$$

$$\therefore \frac{m+x}{2} = 3, \quad \frac{m+8\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore m = 2\sqrt{3}, x = 6 - m = 6 - 2\sqrt{3}, ,$$

$$\text{即 } M(2\sqrt{3}, 10\sqrt{3});$$

第二种情况: CD 为平行四边形的边, 则 EM 也为边,

$$\text{即 } CD \parallel EM, \quad CD = EM,$$

$$\therefore D(6, 6\sqrt{3}), C(0, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore CD = \sqrt{(6-0)^2 + (6\sqrt{3}-4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\text{设直线 } CD \text{ 的表达式为 } y = kx + b,$$

$$\text{把 } D(6, 6\sqrt{3}), C(0, 4\sqrt{3}) \text{ 代入得, } \begin{cases} 6k + b = 6\sqrt{3} \\ b = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 4\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } EM \text{ 的表达式可设为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = -\sqrt{3}n,$$

$$\therefore E(-\sqrt{3}n, 0),$$

$$\text{设 } M(m, m + 8\sqrt{3}),$$

$$\therefore EM^2 = (m + \sqrt{3}n)^2 + (m + 8\sqrt{3})^2 = CD^2 = 48 \text{ ①},$$

又点 M 在直线 EM 的图象上,

$$\therefore m + 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}m + n \text{ ②},$$

由①②有 $m = -6\sqrt{3}$ 或 $m = -10\sqrt{3}$,

$$\therefore M_1(-6\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), M_2(-10\sqrt{3}, -2\sqrt{3}),$$

故符合条件的点的坐标为 $M_1(-6\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), M_2(-10\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), M_3(2\sqrt{3}, 10\sqrt{3})$.